

# 宇宙電磁気学：輻射の生成・散乱過程の基礎

服部 誠

2022年4月7日



---

天体物理学の大きな特徴は、例外的な場合を除いて地上で実験が出来ず且つ現場に行って資料を収集することも出来ないことである。従って、天体からの電磁波を観測して天体の物理状態を探るという研究手法がとられることになる。このような研究を遂行する為には、どのような物理過程を経てどのような特徴の電磁波が放出されるかを観測者は知らなければならない。そこで、ここでは、電磁波の放射散乱過程の基礎を学ぶことを目標とする。対象は、電磁気学の基礎を一通り学んだ学部3年生以上の学生である。

内容は、東北大学理学部天文学専攻の学部3年生向けに開講している一学期凡そ14回の講義内容に、ここでは省いたプラズマ中の電磁波の伝搬の基礎を除いて、凡そ沿っている。授業の基本方針は、式の導出に手を抜かない事・結果の物理的考察を必ず行う事の二つである。内容を見ていただければ分かるようにこれらの基本方針を満たしつつここに記述した内容を全て一学期でこなす事は大変である。そこで授業では、基本的な式の導出及び基本的だが抽象的な概念を具体的な形にした問題の解析を毎回レポート問題として課している。熱心な解答を寄せてくれた学生達、レポートの添削にTAとして携わってくれた大学院生達、特にこの授業を初めて開講した時にTAとして携わってくれた大田泉さん、学部学生として熱心な解答者としてTAとして2期2回添削に携わってくれた茅根祐司君にこの場を借りて深く感謝したい。彼らの多数のコメント・斬新な解答は、私自身の理解を深め・内容に磨きを掛けることに大いに役立った。



# 目次

第 1 章	フーリエ変換の基礎	1
1.1	デルタ関数	1
1.2	フーリエ変換	4
1.3	たたみ込み定理	5
1.4	ウイナー・キンチーの定理及びパーシバルの公式	6
1.5	観測の不確定性原理	8
1.6	様々な窓関数	11
1.7	RC circuit	15
第 2 章	電磁波の基本的性質	19
2.1	単位系	19
2.2	マックスウェル方程式	20
2.3	電磁場のエネルギー・運動量	21
2.4	電磁ポテンシャル	23
2.5	ゲージ変換	24
2.6	遅延ポテンシャル	24
2.7	リエナー・ブィーヘルトポテンシャル	28
2.8	速度場・輻射場	30
2.9	輻射場の基本的性質	33
2.10	輻射スペクトル	36
2.11	偏光・ストークスパラメータ	38
2.12	相対論的速度で運動する荷電粒子からの放射強度	41

2.13	ラーマーの公式 . . . . .	43
2.14	輻射場の公式の物理的導出 . . . . .	45
2.15	非相対論的運動をする荷電粒子系からの輻射場 . . . . .	47
2.16	輻射場のフーリエスペクトル . . . . .	49
2.17	Eモード・Bモード偏光 . . . . .	50
2.17.1	直線偏光の基本パターンとストークスパラメタ . . . . .	50
2.17.2	Coherency Matrix . . . . .	51
2.17.3	E・Bモード . . . . .	52
<b>第3章</b>	<b>トムソン散乱</b>	<b>59</b>
3.1	ラザフォード散乱 . . . . .	59
3.2	トムソン散乱 . . . . .	61
3.3	無偏光電磁波のトムソン散乱 . . . . .	64
3.4	無偏光背景輻射場のトムソン散乱による偏光 E・Bモード の生成 . . . . .	66
<b>第4章</b>	<b>プラズマ中の電磁波の伝搬</b>	<b>71</b>
4.1	Plasma . . . . .	71
4.2	Debye-Hückel theory . . . . .	73
4.3	冷たい等方プラズマ中の電磁波の伝搬 . . . . .	77
4.4	磁場を伴うプラズマ中の電磁波の伝搬：ファラデー回転 . . . . .	80
<b>第5章</b>	<b>連続波放射過程の基礎</b>	<b>85</b>
5.1	制動放射 . . . . .	85
5.1.1	一個の荷電粒子からの制動放射 . . . . .	86
5.1.2	プラズマからの制動放射 . . . . .	88
5.1.3	熱制動放射 . . . . .	90
5.2	シンクロトロン放射 . . . . .	92
5.2.1	サイクロトロン放射 . . . . .	92
5.2.2	相対論的ビーミング効果 . . . . .	93
5.2.3	シンクロトロン放射 . . . . .	95

---

	電磁場中の相対論的電子の運動方程式 . . . . .	95
	全放射強度 . . . . .	98
	スペクトラム . . . . .	98
	シンクロトロン放射スペクトルの厳密な導出 . . . . .	104
	偏光 . . . . .	107
	レーズン効果 . . . . .	108
	5.2.4 具体例 . . . . .	109
5.3	コンプトン散乱 . . . . .	110
	5.3.1 静止した電子と光子の散乱：コンプトン散乱 . . . . .	111
	5.3.2 運動する電子と光子の散乱：逆コンプトン散乱 . . . . .	113
	5.3.3 逆コンプトン散乱の放射強度 . . . . .	115
	5.3.4 逆コンプトン散乱の放射強度スペクトル . . . . .	117
5.4	チェレンコフ放射 . . . . .	125



## 第 1 章

# フーリエ変換の基礎

このコースで取り扱う現象は、線形の場合に限っている。線形現象の特徴は、重ね合わせの原理が適用できることである。そのような場合には、物理量をさまざまな周波数の波に分解して取り扱うフーリエ変換の手法が有効である。そこで本題に入る前にフーリエ変換の基礎についてまず復習することにする。

### 1.1 デルタ関数

本題に入る前にデルタ ( $\delta$ ) 関数とシンク (sinc) 関数についてまとめる。 $\delta$  関数とは次の性質を満たす関数のことである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (1.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (1.2)$$

この関数は次のような振る舞いをする。

$$\delta(x) = \infty \quad \text{at } x = 0 \quad (1.3)$$

$$= 0 \quad \text{at } x \neq 0 \quad (1.4)$$

さて  $\delta$  関数は以下のように波の重ね合わせで表わされる。

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \quad (1.5)$$

この式の物理的意味を理解しておく事は実用上非常に重要である。そこで式 (1.5) の右辺でデルタ関数が表せることを以下で証明しよう。

$$I(k_0, x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-k_0}^{k_0} dk e^{ikx}$$

で定義される関数  $I(k_0, x)$  を定義する。式 (1.5) の右辺は  $\lim_{k_0 \rightarrow \infty} I(k_0, x)$  で表される。 $I(k_0, x)$  は、

$$\text{sinc} X \equiv \frac{\sin X}{X}$$

で定義されるシンク関数 (sinc function) を用いて以下のように書ける。

$$I(k_0, x) = \frac{k_0}{\pi} \text{sinc} k_0 x$$

シンク関数は以下の特徴を持つ。

$$\begin{aligned} \text{sinc} 0 &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} dX \frac{\sin X}{X} &= \pi \end{aligned}$$

図 1.1 にこの関数の振る舞いを示した。この関数は、原点で最大値をとり減衰振動する。二つ目のピークの値は最大値の約  $1/8$  と小さく第ゼロ近似では、原点を中心とした一つ目の山に関数値が集中していると考えてよい。この一つ目の山の広がりの特徴付ける量として半値巾を定義する。半値巾とは、関数値がピーク値の半分になる所の間隔である。英語で Full Width at Half Maximum といひ FWHM という略号がしばしば使われる。シンク関数の FWHM は、約  $1.207\pi$  である。

式 (1.5) の右辺が、 $\delta$  関数の性質式 (1.2) を満たすことを示そう。

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \lim_{k_0 \rightarrow \infty} I(k_0, x)$$

と置く。 $I(k_0, x)$  が有限の値を持つ範囲は、 $x = 0$  を中心とした大体巾

## 1.1 デルタ関数

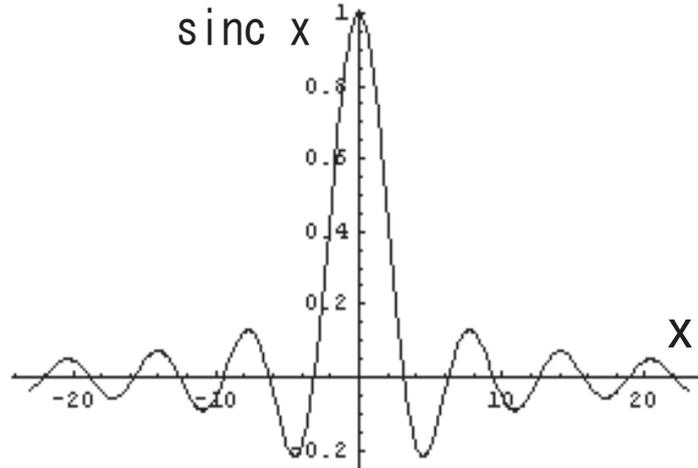


図 1.1 シンク関数 (sinc function) の振る舞い

$\pi/k_0$  の範囲である。したがって、 $k_0$  を無限大に近づけると原点の周りの非常に狭い範囲でのみ有限の値を持つことになる。このような狭い範囲では、関数  $f(x)$  の値が  $f(0)$  のままほぼ一定と見なせる。したがって、 $A$  は以下の様に近似的に計算できる。

$$A \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx f(0) \lim_{k_0 \rightarrow \infty} I(k_0, x) = f(0) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dX \frac{\sin X}{X} = f(0)$$

デルタ関数の性質 (1.1) が満たされることは、シンク関数の積分の性質から自明であろう。以上でデルタ関数が式 (1.5) の様な波の重ね合わせで表現できることが証明された。

次に

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}$$

の物理的解釈を述べる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk (\cos kx + i \sin kx)$$

と書ける。虚数部は奇関数  $f(-x) = -f(x)$  だから  $-\infty \sim +\infty$  の積分は

ゼロである。実数部は偶関数  $f(-x) = f(x)$  である。実数部の積分は、 $x = 0$  で位相が揃った  $-\infty \sim +\infty$  のすべての波数  $k$  の cosine 波を  $dk/2\pi$  の同じ重みで重ね合わせるという意味である。原点では、すべての波数の波の位相が揃っているので強め合って振幅無限大になる。一方、 $x \neq 0$  では  $0 \sim 2\pi$  の間のさまざまな位相の波が同じ割合で存在し、重ね合わさるお互い打ち消しあって振幅がゼロになる。

## 1.2 フーリエ変換

ある時間  $t$  の関数  $E(t)$  及び空間  $x$  の関数  $E(x)$  のフーリエ変換 (Fourier transformation) は以下のように定義される。

$$\hat{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{i\omega t} dt, \hat{E}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(x)e^{-ikx} dx$$

指数の肩が、時間変数  $t$  と空間変数  $x$  で符号が異なるのは、波の進行方向、即ち位相一定面の進む向きと波数ベクトル  $k$  の符号が一致するようにするためである。 $\hat{E}(\omega)$ 、 $\hat{E}(k)$  は一般に複素数であり、以下ではフーリエ変換係数或いは単にフーリエ係数と呼ぶ。フーリエ係数の絶対値の二乗は関数のフーリエスペクトル或いは単にスペクトルと呼ばれる。空間が3次元の場合は波数ベクトルは3次元ベクトル  $\mathbf{k}$  となり、指数の肩は  $-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$  となり、積分は  $d^3\mathbf{x}$  と3次元微小体積要素による積分となる。フーリエ係数  $\hat{E}(\omega)$  は、 $E(t)$  という波を構成する波の内、角周波数  $\omega$  を持つ波の振幅が  $|\hat{E}(\omega)|$  で  $t = 0$  での位相が  $\arg \hat{E}(\omega)$  であることを表す。

フーリエ係数から元の関数は以下のようにしてもとまる。

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega, E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(k)e^{ikx} dk$$

これをフーリエ逆変換と呼ぶ。前節で述べたデルタ関数のフーリエ係数は周波数或いは波数によらず  $1/2\pi$  で一定である。以後式 (1.5) をデルタ関数のフーリエ積分表示と呼ぶことにする。

直接測定可能な物理量は全て実数、例えば  $E^*(t) = E(t)$  ここで  $E^*(t)$  は関数  $E(t)$  の複素共役、であるという条件からフーリエ係数について重要な

### 1.3 たたみ込み定理

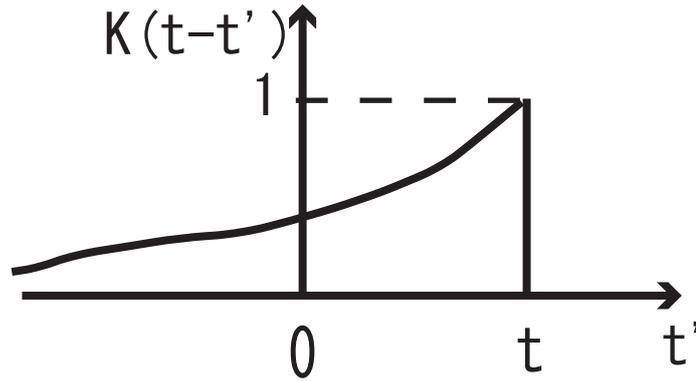


図 1.2 たたみ込み核の例

条件が課せられる。この条件を実条件 (Reality condition) と呼ぶ。フーリエ変換の定義式の複素共役を取り実条件を用いると以下の式を得る。

$$\hat{E}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{i(-\omega)t} dt = \hat{E}(-\omega)$$

これから負の周波数のフーリエ係数は、対応する正の周波数のフーリエ係数の複素共役と等しい。したがって、 $\hat{E}(\omega)$  は、 $\omega \geq 0$  の領域のもののみ測定すれば十分である。波数についても同様のことが言えるが波数の正負は波の進行方向を表しているので正負の区別を残しておく必要がある。

### 1.3 たたみ込み定理

この章では、たたみ込み定理 (convolution theorem) を紹介する。

$$f * K(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t')K(t-t')dt' \quad (1.6)$$

で定義される計算が関数  $f(t)$  とたたみ込み核  $K(t)$  (convolution kernel) のたたみ込み (convolution) と呼ばれる操作である。たたみ込みの物理的内容の理解を助けるために図 1.2 に示したような核を例として考える。関数  $f(t)$  は、時刻  $t$  に学習している内容を表すものとしよう。たたみ込みの

結果は現在の学力を表すと考えることができる。カーネルの値がゼロである  $t' > t$  からの寄与はない。これは現在の学力は、今より以前に学習した事柄の蓄積から成り立っている事を表している。因果律 (Causality) を満たしたカーネルは必ずこの条件を満たさなければならない。過去  $t'$  に学んだ内容は割合  $K(t-t')$  で現在の学力に反映される。過去から現在までに学習した事柄が核で表わされる割合で積み重なって現在の学力を形作っているのである。一度学んだ事は二度と忘れないという人の核は、過去に向かって常に1をとるものである。デルタ関数的カーネルの場合、現在学習していることがそのまま現在の学力とイコールである。非常に分かり易いが以前に学んだ事は一切蓄積になっていないという点で学習者としては少々問題である。

たたみ込み定理は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t')K(t-t')dt' = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{K}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \quad (1.7)$$

と書き表される。この定理は、関数と核のそれぞれのフーリエ積分表示をたたみ込みの式に代入することで簡単に証明することができる。

#### 1.4 ウィナー・キンチーの定理及びパーシバルの公式

ウィナー・キンチー (Wiener-Khintchine) の定理は以下のものである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t')f(t'+t)dt' = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-i\omega t}d\omega \quad (1.8)$$

ここで  $f(t)$  は任意の実関数である。左辺は  $t$  だけ時間がずれた自分自身との相関の時間平均であり、自己相関と呼ばれる。自己相関は、ある時刻の自分とそれから時間  $t$  後の自分に一定の関係があるときのみ有限の値を持つ。このようなき現在の自分と時間  $t$  後の自分には相関があるという。右辺は、関数  $f(t)$  のスペクトルのフーリエ変換である。したがってこの定理は、自己相関はスペクトルのフーリエ積分に等しいということを言っている。この定理から色々な時間間隔  $t$  について自己相関を測定し、それをフーリエ逆変換してやれば、スペクトルが求まることが分かる。これを利用して光

#### 1.4 ウィナー・キンチーの定理及びパーシバルの公式

のスペクトルを測定する装置がフーリエ分光器であり、広帯域遠赤外分光装置として現在も広く用いられている。

以下の公式は、パーシバル (Parseval) の公式と呼ばれる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')^2 dt' = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (1.9)$$

Wiener-Khintchine の公式で  $t = 0$  とした特殊な場合と解釈することもできる。関数  $f(t)$  は、異なる時間  $t$  を異なる軸と捉えることで、 $t$  が  $-\infty$  から  $+\infty$  までの範囲で連続で無限の値を取ることから、連続無限次元空間のベクトルと捉える事ができる。このような空間をヒルベルト空間と呼ぶ。同様に関数  $\hat{f}(\omega)$  は、角周波数  $\omega$  の値で指定される軸で張られる連続無限次元空間で定義されたベクトルと捉える事ができる。したがって、フーリエ変換は、 $t$  で特徴付けられる座標系から  $\omega$  で特徴付けられる座標系への座標変換である。パーシバルの公式は、フーリエ変換前後での関数のノルム (ベクトルの大きさに対応) の変換則を与えるものである。パーシバルの公式 (1.9) は、この教科書で採用したフーリエ変換では、変換前後で基底の直交性は保たれるが、関数のノルムが  $1/\sqrt{2\pi}$  倍スケールすることを示している。フーリエ変換前後で関数のノルムが保存するようにフーリエ変換を以下のように定義することでフーリエ変換後の基底を正規直交基底にするやり方もある。

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

この時逆変換は次のようになり

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

パーシバルの公式は以下のように変換前後でのノルムの保存を表す式となる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t')^2 dt' = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

この教科書で採用したフーリエ変換の定義のメリットは、変数を角周波

数  $\omega$  から周波数  $\nu$  に変換するとフーリエ変換および逆変換が以下のように

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{2\pi i\nu t} dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu)e^{-2\pi i\nu t} d\nu$$

のように余分な係数が無くなり対象な形に書けることである。ここで

$$\hat{f}(\nu) = 2\pi \hat{f}(\omega)$$

である。

## 1.5 観測の不確定性原理

フーリエ係数  $\hat{E}(\omega)$  を実際の観測から求める操作について考える。当然のことながら人が測定可能な時間は有限な時間間隔に限られる。分かり易い例として  $-T_0/2 < t < T_0/2$  の間のみ  $E(t)$  の測定が行われた場合を考える。この時間外では測定結果がないので  $E(t) = 0$  としなければならない。観測を行った期間でのみフーリエ変換を行った結果を  $\hat{E}_{T_0}(\omega)$  と定義する。

$$\hat{E}_{T_0}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt E(t) e^{i\omega t}$$

これは、次のような表記もできる。

$$\hat{E}_{T_0}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt W(t) E(t) e^{i\omega t}$$

ここで

$$W(t) = 1 \quad \text{for } -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2}$$

$$= 0 \quad \text{otherwise}$$

は、窓関数 (window function) と呼ばれる関数の一種で上記の場合はトッパット型窓関数 (top-hat window function) と呼ばれる。窓関数を使った表記を良くみるとたたみ込み定理を用いることが出来ることが分かる。た

## 1.5 観測の不確定性原理

だし、 $t$ と $\omega$ の関係が入れ替わっている。そこでたたみ込み定理を $dt/2\pi \rightarrow d\omega$ の対応関係に注意して用いると

$$\hat{E}_{T_0}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hat{E}(\omega') \hat{W}(\omega - \omega')$$
$$\hat{W}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{i\omega t} dt = \frac{T_0}{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{\omega T_0}{2}\right)} \sin \frac{\omega T_0}{2}$$

が得られる。積分の中に現れる窓関数のフーリエ係数 $\hat{W}(\omega - \omega')$ は $\omega' = \omega$ でピークを持ちその廻りに $\Delta\omega \sim 2\pi/T_0$ 程度の広がりを持った関数である。 $\hat{E}_{T_0}$ は、真のフーリエ係数 $\hat{E}$ とこの関数のたたみ込みであるから、真のフーリエ係数に比べてなまされ

$$\Delta\omega \sim \frac{2\pi}{T_0}$$

程度の周波数分布の不定性が現れる。上記の計算過程から明らかなように観測時間 $T_0$ に得た情報を全て足しあげてスペクトルを得ている。したがって、観測時刻は $\Delta t \sim T_0$ 程度不定である。以上から周波数の不定性と観測時刻の不定性を掛け合わせると以下の関係が得られる。

$$\Delta\omega \Delta t \sim 2\pi$$

ここまで述べた周波数分布及び観測時刻の不確定さは原理的なものであり、人為的に導入される測定誤差等により観測量の不確定さはこれらより必ず大きくなる。したがって、観測時刻の不確定さと周波数分布の不確定さには、

$$\Delta\omega \Delta t \geq 2\pi \tag{1.10}$$

なる関係が必ず存在することになる。これを観測の不確定性原理と呼ぶ。ここでは時間と周波数の場合を例にとったが、空間の位置と波数の関係でも同様のことが導ける。3次元空間の場合、各位置座標と波数成分の間に独立な3つの不確定性関係が成り立つ。導出過程を振り返れば明らかなように、これは波の性質から導かれたものである。波の重ね合わせで表される現象には必ずこの不確定性原理が現れる。上記不確定性関係の式に $\hbar$ を

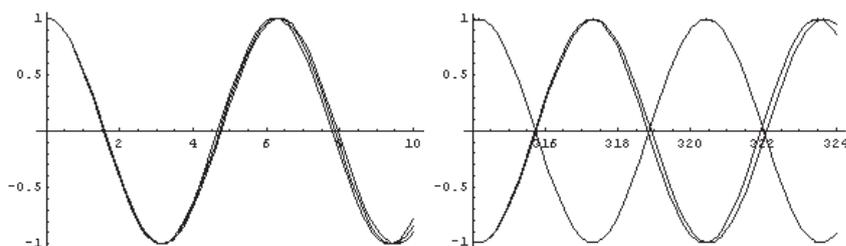


図 1.3  $\omega = 1, \omega = 1.01, \omega = 0.99$  の正弦波の比較。左図に示したように  $t = 0$  近辺では三つの波の位相は殆ど揃っており合成波はあたかも単色波のように振舞う。しかし、 $t = 2\pi/\Delta\omega = \pi$  経過すると右図に示したように三つの波の位相が  $0 \sim 2\pi$  の間にばらけてしまい、周波数が異なることが顕著に現れる。

掛ければそのまま量子力学の基本原則であるハイゼンベルグ (Heisenberg) の不確定性原理である。量子力学の本質が、全ての物質が粒子性ととも波動性を持つことであるということとハイゼンベルグの不確定性原理が密接に関連していることが理解できるであろう。

以下、観測の不確定性原理を波の重ね合わせを使って物理的に説明する。 $E(t) = \cos\omega_0 t$  の波が  $-\Delta t/2 < t < \Delta t/2$  の間のみ存在する場合を例として考える。ただし、 $2\pi/\Delta t \ll \omega_0$  とし、 $\omega > 0$  の領域のみ考える。フーリエ係数は、

$$\hat{E}(\omega) \sim \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{\Delta t}{2}}{\omega - \omega_0}$$

この結果から周波数分布は  $\omega = \omega_0$  を中心とした  $\Delta\omega = 2\pi/\Delta t$  程度の広がりを持っていることが分かる。波が存在している間は  $\omega = \omega_0$  の単色の波のみだがフーリエ係数を見ると  $\omega \neq \omega_0$  の様々な周波数の波が存在しているのは何故だろうか。この理由を考察する為に、周波数分布が  $\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega < \omega < \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega$  の範囲でのみある一定値を取るトップハット型に分布している場合を考える。この方が考え易い。 $\Delta\omega \ll \omega_0$  であつ初期位相が全ての周波数でゼロであれば、 $t = 0$  の周辺では全ての波の位相が殆どそろって見かけ上  $\omega = \omega_0$  の単色波のように振舞う。時間が経つと徐々に周波数

## 1.6 様々な窓関数

---

の違いによる位相の差が現れる。お互いが打ち消しあい重ね合わせた結果の振幅がゼロになるのは、全ての周波数の波の位相差が0から $2\pi$ の範囲に分布した時である。そこで丁度 $t = \Delta t/2$ で最も周波数の大きな波と小さな波の位相差が $2\pi$ になったとする。すると

$$\begin{aligned}(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega)\Delta t/2 - (\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega)\Delta t/2 &= 2\pi \\ \Delta\omega\Delta t &= 4\pi\end{aligned}$$

を得る。この結果は、 $\Delta t \sim 4\pi/\Delta\omega$ 程度が波の継続時間であり、それ以降は含まれる波がお互い打ち消しあい振幅が減少してしまうことを示している。言い方を変えると $t = 0$ の近辺では、全ての含まれる波の位相差が無視しえる程小さいので重ね合わせで出来た波があたかも単色のように振舞う。しかし、時間が立つと微妙な位相差が目立ち始め $t \sim 2\pi/\Delta\omega$ 後には、位相差が $0 \sim 2\pi$ の間に一様に分布してしまい、互いに打ち消しあって重ね合わせた波の振幅がゼロになってしまうのである。厳密には、この場合 $t = \Delta t/2$ で丁度全ての波が打ち消し合い振幅がゼロになるが、それ以降は重ね合わせた結果の波の振幅が再び有限となる。重ね合わせで得られる波の時間変化の様子はシンク関数となる。 $E(t) = \cos\omega_0 t$ の波が $-\Delta t/2 < t < \Delta t/2$ の間のみ存在する場合は、ここでの例の時間と周波数の関係を逆にしたケースと考えればよい。

## 1.6 様々な窓関数

前節で紹介した Top hat window は、観測していたかいないかを1か0で表して分かり易い窓関数である。しかし、そのフーリエスペクトルの絶対値は、角周波数が大きくなるにつれて一旦ゼロになった後も再び有限の値を待つようになる。二つ目のピークは中心値の20%程度と結構大きい。振幅がじょじょに小さくなるとは言えこのような振動が無限の周波数まで続く。このようにメインピークの両脇に現れる振動成分をサイドローブと呼ぶ。中心のピークから数えて隣の山を二次のサイドローブ、その又隣を三次のサイドローブと呼ぶ。Top hat window のサイドローブは他の窓

関数に比べると非常に大きい。大きなサイドローブの存在は次のような実際上の問題の種になる。

1 実際は、 $\omega_0$  のみの振動なのに見かけ上、別の位置にもスペクトルが有限値を持つように見えデータを見た人に誤解を与えやすい。

2 丁度サイドローブの位置の周波数を持つ波が存在した時、その振幅がたまたまサイドローブの振幅よりずっと小さければ、その存在を見落とす可能性がある。

3 2とは逆に他の周波数を持つ強度大きな波がサイドローブにより拾われて、 $\omega = \omega_0$  の位置のスペクトルに振幅に影響を与える可能性があり  $\omega_0$  の波の振幅を正しく測定できない。特に3は実際上かなり厄介な問題を引き起こす。物には必ず揺らぎがともない例えば波の振幅の揺らぎは強度が強いほど大きくなる。ある波の強度測定が目的である場合この揺らぎは、ノイズ(雑音)になる。サイドローブにより今興味の無い強度の大きな別の波が拾われるということは、同時にその波の強度の揺らぎによる大きなノイズも拾われるということである。これは実際の測定の非常な邪魔である。

Top hat window が持つ大きなサイドローブの問題を解決する為に幾つかの改良型窓関数が提案されている。それらから天文の研究の現場で良く用いられる具体例を幾つか以下に紹介する。

Gaussian window: Gaussian window とは以下のような形をした窓関数である。

$$W(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

ここでは、 $\int_{-\infty}^{\infty} dt W(t) = 1$  になる様に規格化している。こうすると  $W(t)dt$  を時刻が  $t \sim t + dt$  の間にある確率と解釈することができる。実際に窓関数として用いるときは、ピーク値が1になるように規格化する場合が多いだろう。その場合は上記の定義式から指数の前の定数を取ればよい。Gaussian window のフーリエスペクトルは以下のようなになる。

$$\hat{W}(\omega) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2}$$

## 1.6 様々な窓関数

フーリエスペクトルも又 Gaussian 関数になる。フーリエスペクトルが元の関数と一致する関数は、Gaussian のみである。この場合  $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{W}(\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$  である。そこで積分値が 1 になるように規格化したスペクトルを

$$\tilde{W}(\omega) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2}$$

定義する。これを用いると  $\tilde{W}(\omega)d\omega$  を角周波数が  $\omega \sim \omega + d\omega$  の範囲にある確率と解釈することができる。

Gaussian window の特徴を以下にまとめる。分布の広がりの特徴付ける量として分散値を求める。時間、周波数それぞれの平均値はゼロなので分散値は、それぞれの変数の二乗平均で以下の様にもとまる。

$$\begin{aligned} \langle t^2 \rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt t^2 W(t) = \sigma^2 \\ \langle \omega^2 \rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^2 \tilde{W}(\omega) = \frac{1}{\sigma^2} \end{aligned}$$

時間や周波数の値は平均の周りで  $\pm\sqrt{\langle t^2 \rangle}$ ,  $\pm\sqrt{\langle \omega^2 \rangle}$  程度の不定性を持つと考えることが出来る。従って、時間、周波数の不確定さはそれぞれ、 $\Delta t = 2\sigma$ ,  $\Delta\omega = 2/\sigma$  であり、Gaussian の場合

$$\Delta t \Delta\omega \sim 4$$

であると言える。この場合も確かに前節の述べた観測の不確定性原理通りの関係が成り立つことが分かる。Gauss 関数の特徴は、変数の値の平均値からのズレが標準偏差以下では、ほぼ中心値と同じ値で一定値と見なしてよいのに対して標準偏差以上にズレたところでは値が急激に減少することである。厳密には変数値が無限大のところでも有限の値を持つが実質的には  $\pm$  標準偏差程度の範囲で有限値を持つ関数と考えて殆どの場合で構わないだろう。スペクトル関数は単調減少関数であり、サイドローブが無い。しかし、 $\omega$  が大きくなってもゼロになる事は無く有限値を持ち続ける。平均値から十分離れた所での関数値の大きさは Top Hat window と比べて非常に小さい。ここまで述べた性質は、窓関数として理想的である。大きな欠

点は、無限の過去から無限の未来までの情報を集めないと使えないことである。実際の観測は有限の時間間隔で行われる。従って、有限の時間間隔でのみ有限値を取る窓関数が実際上必要である。その様な窓関数として良く使用される二つの窓関数を以下に紹介する。

気象学者の Han が開発した以下のような窓関数を Hanning window という。

$$W(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi t}{t_m} \right), & |t| < t_m \\ 0 & |t| > t_m \end{cases}$$

この関数とそのフーリエスペクトルを図に示した。サイドローブが現れるが、その振幅は Top Hat Window と比べて圧倒的に小さい。窓関数が有限値を取る時間間隔は  $2t_m$  であるが、同じ時間間隔で有限値をとる Top Hat Window と比べて中心の山の広がりが大きくなっている。言い換えると周波数の測定誤差  $\Delta\omega$  が大きくなっているということである。Top Hat Window は、観測を行った時間のデータは 100% の重みで採用するのに対して、Hanning Window では  $t = 0$  以外ではデータ採用の重みが 100% 以下であり特に  $t = \pm t_m$  周辺では重みが小さくなっている。従って、Hanning window の場合実効的な観測時間が  $2t_m$  以下である。こう考えると周波数の測定誤差が Top Hat Window を採用した場合より悪くなっている事が理解できる。Hanning window はスペクトル分解能を犠牲にしてサイドローブの振幅を抑えているのである。

Hamming は、Hanning window に手を加えて二次のサイドローブの振幅を更に抑える窓関数を提案した。これを Hamming window と呼び関数系は以下のとおりである。

$$W(t) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi t}{t_m}, & |t| < t_m \\ 0 & |t| > t_m \end{cases}$$

この関数とそのフーリエスペクトルを図に示した。この関数は、Hanning window と良く似ているが、境界で関数値が連続的にゼロになっておらず  $t = \pm t_m$  で有限値を持っている。スペクトルを見ると確かに二次のサイド

## 1.7 RC circuit

---

ローブのピーク値が Hanning window より小さく抑えられている。一方、Hanning window では、高次になるに従ってサイドローブのピーク値が大きく減少しているのに対して Hamming window ではその減少が非常に緩やかで顕著でない。4次以降では Hamming window のサイドローブの振幅が Hanning window を逆転して大きくなっている。Top Hat Window との比較においては、その性質は Hanning window の場合と同じである。

## 1.7 RC circuit

$\delta$  関数のフーリエ積分表示の物理的内容の具体的理解を手助けする上で格好の例題として図の様な RC 回路の抵抗にパルス電圧  $v(t) = v_0\delta(t)$  を掛けた時のコンデンサーの両端の出力電圧の時間変化及びフーリエスペクトルについて考察する。

コンデンサーに蓄えられている電荷  $CV$  の単位時間当たりの減少量が、抵抗を流れる電流である。抵抗による電圧降下とコンデンサーの極板間の電圧が等しいという関係から、

$$V = -R \frac{CdV}{dt} + v_0\delta(t)$$

という方程式が得られる。同時方程式の解は以下のとおり。

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dt}{RC} V = Ae^{-t/RC} \tau \equiv RC$$

ここで  $\tau$  を時定数 (time constant) といい、系の典型的な (typical) 反応時間 (response time scale) を表す。定数変化法を用いると以下の様に  $A(t)$  が求まる、

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{v_0}{\tau} \delta(t) e^{t/\tau} \\ A &= \int_{-\infty}^t \frac{v_0}{\tau} \delta(t) e^{t/\tau} \\ A &= 0 \quad \text{for } t < 0 \\ A &= \frac{v_0}{\tau} \quad \text{for } t > 0 \end{aligned}$$

以上から出力電圧の時間変化は以下の様にもとまる。

$$\begin{aligned} V &= 0 && \text{for } t < 0 \\ V &= \frac{v_0}{\tau} e^{-t/\tau} && \text{for } t > 0 \end{aligned}$$

一瞬に起きたパルス入力に対して出力は  $\tau$  程度の時間を掛けてユックリ減少していくことを表している。この現象は、パルス入力電圧によってコンデンサーに蓄えられた電荷が放出される時間変化過程を表していると考えれば物理的に考え易いであろう。抵抗値が大きくなれば少しの抵抗の電圧降下がコンデンサーの電圧と等しくなるのに少しの電流でよい。従って、流れる電流が小さくなりコンデンサーに蓄えられた電荷が放出されるのにより時間が掛かることになり、時定数が大きくなる。コンデンサーの電気容量が大きくなると極板間の電圧が同じでも蓄えられる電荷の量が多くなる。従って、全ての電荷を開放するのに要する時間が長くなり、時定数が大きくなる。これらのことから、時定数が  $R, C$  に比例することが理解できる。

出力電圧の時間変を Fourier 変換すると

$$\begin{aligned} \hat{V}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{v_0}{\tau} e^{-t/\tau} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{v_0}{\tau} e^{(-1/\tau + i\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{v_0}{\tau} \frac{-1}{-1/\tau + i\omega} = \frac{v_0}{2\pi} \frac{1}{1 - i\omega\tau} = \frac{v_0}{2\pi} \frac{1 + i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \end{aligned}$$

と出力電圧のスペクトルが得られる。振幅と位相に分けるとそれらはそれぞれ

$$\begin{aligned} |\hat{V}(\omega)| &\equiv \frac{v_0}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \\ \phi &\equiv \arg \hat{V}(\omega) = \tan^{-1} \omega\tau \end{aligned}$$

となる。一方 input signal のフーリエスペクトルは、

$$\begin{aligned} \hat{V}_{in}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_0 \delta(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} v_0 \\ |\hat{V}_{in}(\omega)| &= \frac{1}{2\pi} v_0 \end{aligned}$$

## 1.7 RC circuit

---

$$\arg \hat{V}_{in}(\omega) = 0$$

である。 $\delta$ 関数的パルス電圧を掛けることは、 $0 \sim \infty$ までの全ての角周波数の電圧を初期位相ゼロで同じ強度で掛ける事と等価である事が分かる。全ての正の角周波数 $\omega$ に対して、 $\phi > 0$ なので input に対して output の位相が遅れることになる。 $\omega = 0$ では出力電圧の振幅は、入力電圧と等しいが $\omega > 0$ では、出力は入力より減少し、その差は $\omega$ が大きくなるに従って大きくなる。従って、RC回路は低周波は減衰無しに通すが高周波は減衰させる効果を持つ。低い周波数を選択的に通すフィルターとして働きを持つ low pass filter としての機能を持つのである。カットオフが起きる周波数の目安は、

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

で、これを RC 回路のカットオフ周波数と呼ぶ。この結果は定性的には以下の様に説明できる。カットオフ周波数より大きな周波数で入力電圧を掛けるということは、時定数より短い時間間隔で電圧を掛ける事に対応する。時定数以下の時間では、まだ初めに掛けられた電圧により蓄えられた電荷十分残っていて極板間の電圧はまだ十分高い。そのような状態のコンデンサーに電圧を掛けようとするのでコンデンサーは、その時の極板間の電圧との差額分の電圧しか受け入れることができない。結果入力電圧の内残りの分は捨て去られてしまうのである。

RC回路は実際ノイズフィルターとして実験で用いられている。又、RC回路が示したパルスのインプットに対する時間的応答は、広く様々な自然現象で現れるものである。読者の多くは今後様々な局面で同様な時間応答を示す物理系に遭遇するだろう。その系をここで考察した RC 回路の問題に置き換えることで、その系の物理的特徴を学ぶ事の手助けになるだろう。例えば、インプット電圧を授業の進行スピード、アウトプット電圧を受講者の脳みその使用量とする。この場合、時定数は受講者が新たに学習した事を咀嚼して自分の物にし新たな事を学習する余裕が出来るまでに掛かる時間と解釈できる。授業の進行スピードが受講者の時定数より速い場合は、次々に教えられる新しい事項は受講者に吸収される事が無く闇に消え去っ

ていくわけである。この場合、受講者の頭が有効なローパスフィルターとして働いている分けである。

CR 回路はハイパスフィルターとして作用する。各自考察してみるとよいであろう。

## 第 2 章

# 電磁波の基本的性質

この節では電磁波の基本的性質についてまとめる。

### 2.1 単位系

天体物理学の研究の現場では、cgs gauss 単位系を用いることが多い。そこでこのコースでは、cgs gauss 単位系を用いる。電場  $E$ 、磁場  $B$  は、電荷  $-e$  を持つ電子に働く力として以下のように定義される。

$$\vec{F} = -e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \quad (2.1)$$

ここで  $\vec{v}$  は粒子の速度、 $c = 2.998 \times 10^{10} \text{cm/s}$  は真空中の光の速さである。右辺で表される電磁場による力をローレンツ力と呼ぶ。全ての巨視的な物質の電荷は、素電荷  $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$  の整数倍であることが非常に高い精度で確かめられている。

上記のローレンツ力の表式では、cgs gauss 単位系を用いている。以下に MKSA から cgs gauss 単位系へ変換を行うための対応関係をまとめる。ここで  $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$  は MKSA 単位系での真空の誘電率、透磁率である。

$$\text{MKSA} \rightarrow \text{cgs gauss}$$

$$cB \rightarrow B$$

$$\epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{4\pi}$$

$$\mu_0 \rightarrow \frac{4\pi}{c^2}$$

$$1\text{C} = 3 \times 10^9 \text{esu}$$

電荷を C や esu で表す代わりに以下の量を用いる事が多い。

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}, \hbar c = 197 \text{MeV fm}$$

$\alpha$  は微細構造定数と呼ばれる量であり MKSA では  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$  である。1fm =  $10^{-13}$ cm は凡そ原子核の大きさを表す長さの単位である。 $\hbar$  はプランク (M.Planck) 定数  $h = 6.62 \times 10^{-34}$ erg s を  $2\pi$  で割った定数である。1MeV =  $10^6$ eV はエネルギーの単位で 1eV とは電荷  $e$  の粒子に 1 V の電圧を掛けた時の位置エネルギーである。

## 2.2 マックスウェル方程式

真空中のマックスウェル (J.C.Maxwell) 方程式を以下にまとめる。

$$\text{div}\vec{E}(\vec{x}, t) = 4\pi\rho(\vec{x}, t) \quad (2.2)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\text{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (2.5)$$

上から順にガウス (K.Gauss) の法則、磁気単極子が存在しないという条件、ファラデー (M.Faraday) の電磁誘導の法則、アンペール (A.Ampère) ・マックスウェルの法則である。アンペール・マックスウェルの法則中の最後の項はマックスウェルの変位電流と呼ばれるもので、電荷保存則を保証するためにマックスウェルが付け加えた項である。マックスウェルの理論は、以下の節で述べるように電磁波の存在を予言する。電磁波の存在が、ヘルツ (H.Hertz) によって 1888 年に発見されその正しさが立証されている。

## 2.3 電磁場のエネルギー・運動量

電磁場のエネルギーや運動量は、場と荷電粒子系の相互作用を通して全系のエネルギー、運動量の保存から定義するのが自然なやり方である。まず電磁場のエネルギー密度、エネルギーフラックスを定義する。

電磁場の値の変化が顕著に現れるスケールを系の典型的スケール  $L$  とする。電子の個数密度を  $n$  とすると平均電子間隔は  $n^{-1/3}$  である。十分多数の電子を含む微小体積  $\Delta V$  を  $n^{-1/3} \ll \Delta V^{-1/3} \ll L$  を満たすように取る。電子系の電荷密度、電流密度は以下の平均操作で定義する。

$$\rho = \frac{1}{\Delta V} \sum_i q_i \vec{j} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i q_i \vec{v}_i$$

ここで  $q_i$ 、 $\vec{v}_i$  は体積  $\Delta V$  内の  $i$  番目の粒子の電荷、速度であり、和はこの体積内の全ての粒子について行う。式 (2.1) から非相対論的運動をする  $i$  番目の粒子に電磁場が及ぼす仕事率は以下のように求まる。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v}_i^2 \right) = \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i = q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}_i$$

磁場は仕事をせず粒子のエネルギーの増減に関与するのは電場のみである。粒子系の運動エネルギー密度を  $K \equiv (1/\Delta V) \sum_i (1/2) m \vec{v}_i^2$  で定義する。微小体積内の電子系に場がする仕事率の単位体積あたりの値は

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}_i = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

で与えられる。ここで、 $\Delta V^{-1/3} \ll L$  から微小体積内では電場の変化が無視できることを利用して各粒子の位置での電場  $\vec{E}_i$  を領域内の代表点に於ける電場  $\vec{E}$  に置き換えて和の外に出した。式 (2.5) と電場の内積から  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  を変形すると、電磁場と粒子系合わせた全系のエネルギー保存を表す式として以下の式を得る。

$$\frac{dK}{dt} + \frac{\partial U_{\text{field}}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{S} \quad (2.6)$$

$$U_{\text{field}} \equiv \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \quad (2.7)$$

$$\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.8)$$

この式から  $U_{\text{field}}$  と  $\vec{S}$  はそれぞれ電磁場のエネルギー密度、エネルギーフラックスと解釈することの妥当性が理解できる。 $\vec{S}$  はポインティングベクトル (Poynting vector) と呼ばれる。

次に電磁場の運動量について考える。粒子系の単位体積当たりの運動量を  $\vec{p}$  とする。粒子の運動方程式を微小体積  $\Delta V$  内の粒子で平均すると以下の式を得る。

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho\vec{E} + \frac{\vec{j}}{c} \times \vec{B}$$

マクスウェル方程式を用いて変形すると粒子系の運動量密度の  $j$  成分の発展方程式として以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dp_j}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} g_j &= -\text{div} \vec{M}_j \\ \vec{M}_j &\equiv (M_{jx}, M_{jy}, M_{jz}) \\ M_{ji} &\equiv -\frac{1}{4\pi} \left( E_j E_i - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ji} + B_j B_i - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ji} \right) \\ \vec{g} &\equiv \frac{1}{4\pi} \frac{1}{c} (\vec{E} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

ここで  $\delta_{ji}$  はクロネッカーのデルタである。この式から  $\vec{g}$  を電磁場の運動量密度ベクトル、 $\vec{M}_j$  を電磁場の運動量の  $j$  成分のフラックスと解釈することが妥当であることが理解できる。この式は、電子系と電磁場を含めた全系の運動量保存則を表す微分形の方程式である。ここで  $-M_{ji}$  を  $ji$  成分とする  $3 \times 3$  の行列はマクスウェルの応力テンソルである。運動量フラックスベクトルは系の運動量が減る方向が正である。一方、応力は外から仕事をして系の運動量を増やす方向が正であることを考えると符号が互いに逆であることが理解できるであろう。

## 2.4 電磁ポテンシャル

マクスウェル方程式は二つのグループに分けることができる。一つのグループは、式 (2.2) と式 (2.5) で電荷密度分布や電流密度分布という外的要因を含む方程式群である。もう一つのグループは、式 (2.3) と式 (2.4) である。これらは、電場・磁場のみを方程式の中に含み外的要因に依存しない。後者のグループを内部方程式 (internal equations) と呼ぶ。内部方程式を用いると電場・磁場をスカラーポテンシャル (scalar potential)  $\phi$  とベクトルポテンシャル (vector potential)  $\vec{A}$  で書き表すことができる。スカラー・ベクトルポテンシャルをまとめて電磁ポテンシャルと呼ぶ。式 (2.3) より

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.9)$$

この式をもう一つの内部方程式である式 (2.4) に代入すると

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

よって電場は電磁ポテンシャルを用いて以下のように表すことができる。

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.10)$$

電磁ポテンシャルは  $(\phi, \vec{A})$  という組でローレンツ変換に対して4元ベクトルとして振舞う。スカラー・ベクトルという呼称は、3次元の空間座標回転に対する変換性がそれぞれスカラー・ベクトルであることからくる。

残りの二つのマクスウェル方程式から電磁ポテンシャルを求める方程式を得ることができる。式 (2.2) から

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -4\pi\rho_e \quad (2.11)$$

式 (2.5) から

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2.12)$$

## 2.5 ゲージ変換

古典電磁気学では電磁ポテンシャルは計算を楽にするための便宜上のものであり物理的実在がある物理量とは考えない。それらから導出される電場・磁場が同一の物でありさえすれば、どんな物でもよい。このことから電磁ポテンシャルには以下に示すような不定性がある。スカラー関数の勾配の回転が恒等的にゼロであることから、

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$$

なる新たなベクトルポテンシャル  $\vec{A}'$  から得られる磁場は、 $\vec{A}$  から得られる磁場と等しい。この時

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

なる変換により新たなスカラーポテンシャル  $\phi'$  を定義し、 $(\phi', \vec{A}')$  により導かれる電場を計算すると  $(\phi, \vec{A})$  から計算される電場と等しいことが容易に示せる。以上のことは、電磁ポテンシャルには以下の様な不定性があることを示している。

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi, \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

上記の様な電磁ポテンシャルの変換をゲージ変換 (gauge transformation) と呼ぶ。これまでのことは以下のように言い換えることができる。電磁ポテンシャルの選び方にはゲージ変換の自由度分の不定性がある。あるいは、マックスウェル方程式はゲージ不変 (gauge invariant) である。特定の電磁ポテンシャルを選ぶことをゲージを選ぶと言う。

## 2.6 遅延ポテンシャル

電磁波の放射を調べる上で最も便利なゲージの選び方は電磁ポテンシャルが、ローレンツ条件

## 2.6 遅延ポテンシャル

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0$$

を満たすようにする選び方である。このゲージをローレンツゲージと呼ぶ。任意の電磁ポテンシャルに対して

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

を満たすように関数  $\psi$  を選ぶことができる。この  $\psi$  を用いてゲージ変換により  $(\phi', \vec{A}')$  に移ると移った先の電磁ポテンシャルはローレンツゲージを満たすことは容易に示される。すなわち必ずローレンツゲージを選択することができる。

以下ローレンツゲージが選ばれているとして話を進める。したがって、電磁ポテンシャルは、次の条件を満たす。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.13)$$

このとき、電荷・電流分布が与えられたとき電磁ポテンシャルを決める方程式は以下ようになる。

$$\square \phi = -4\pi \rho_e \quad (2.14)$$

$$\square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_e \quad (2.15)$$

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \quad (2.16)$$

最後の式はダランベルシアン (D'Alembertian) と呼ばれる演算子の定義式である。物理的に意味のあるこの方程式の解は、遅延ポテンシャル (retarded potential) と呼ばれており、以下の式で表される。

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{[\rho_e] d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (2.17)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j}_e] d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.18)$$

ここで  $[\ ]$  は、 $[\ ]$  内の物理量  $Q$  を遅延時間 (retarded time)  $t_{\text{ret}} = t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'|$  の時の値で評価せよ、ということを表す。

$$[Q] \equiv Q\left(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|\right)$$

遅延ポテンシャルが上記の式で与えられることを以下スカラーポテンシャルを例にとって順を追って示そう。以下の方程式を満たす関数をグリーン関数 (The Green's function) 呼ぶ。

$$\square G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = -\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t') \quad (2.19)$$

ここで  $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \equiv \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$  は3次元の  $\delta$  関数である。ローレンツゲージに於けるスカラーポテンシャルの満たす方程式との比較より、グリーン関数は、時刻  $t = t'$  の時のみ座標  $\vec{r} = \vec{r}'$  に  $\frac{1}{4\pi}$  の大きさの電荷が存在した事の影響が、任意の時刻  $t$ ・場所  $\vec{r}$  のスカラーポテンシャルにどのように現れるかを表した関数であると解釈することが出来る。グリーン関数のこの性質から伝達関数 (propagator) とも呼ばれる。グリーン関数を用いてスカラーポテンシャルは以下のように表わされる。

$$\phi(\vec{r}, t) = 4\pi \int G(\vec{r} - \vec{r}', t - t')\rho_e(\vec{r}', t')d^3\vec{r}'dt' \quad (2.20)$$

この式が成り立つことは両辺に  $\square$  を作用することで容易に示すことが出来る。式 (2.20) は、スカラーポテンシャルはグリーン関数と電荷密度分布の全時空点でのたたみ込みで与えられることを示している。ある時刻  $t'$  から  $t' + dt'$  の間に点  $\vec{r}'$  の周りの微小体積  $d^3\vec{r}'$  に存在する電荷  $\rho_e(\vec{r}', t')d^3\vec{r}'$  の点  $\vec{r}$  の時刻  $t$  に於けるスカラーポテンシャルへの寄与は、 $\{4\pi G(\vec{r} - \vec{r}', t - t')dt'\}\rho_e(\vec{r}', t')d^3\vec{r}'$  で与えられる。スカラーポテンシャルの満たす方程式は線形なので、全ての時間・空間に存在する電荷分布の影響の重ね合わせによってスカラーポテンシャルが得られる。したがって、これを  $\vec{r}'$ 、 $t'$  について積分したものとスカラーポテンシャルが表わせるのである。

以下式 (2.19) の解の内、物理的に意味のあるグリーン関数を求める。グリーン関数の内、物理的に意味のあるものは、結果が原因より必ず後に起こるものである。グリーン関数の定義より、原因は  $t = t'$  で起こるとしているため、その結果であるグリーン関数は  $t \geq t'$  でのみ有限の値を持ち  $t < t'$  ではゼロでなければならない。このときのグリーン関数を遅延グリーン

## 2.6 遅延ポテンシャル

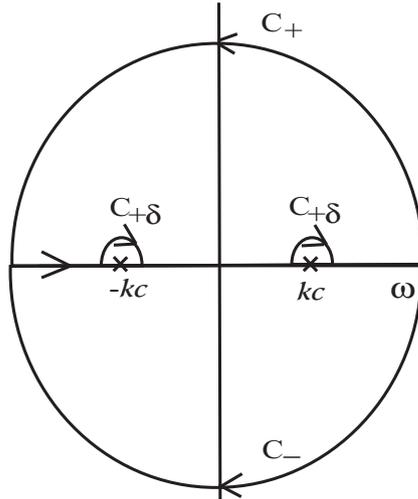


図 2.1 遅延グリーン関数を求めるための複素  $\omega$  平面内での積分路

関数 (retarded Green's function) と呼ぶ。したがって遅延グリーン関数は以下の遅延条件を満たさなければならない。

$$G_{\text{ret}}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \begin{cases} = 0 & (t < t') \\ \neq 0 & (t \geq t') \end{cases} \quad (2.21)$$

以下簡単のために  $t' = 0$ ,  $\vec{r}' = 0$  とする。式 (2.19) の両辺にグリーン関数とデルタ関数のフーリエ積分表示を代入することでグリーン関数のフーリエ積分表示  $\hat{G}(\omega, \vec{k})$  が以下のように求まる。

$$\hat{G}(\omega, \vec{k}) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{\omega^2 - k^2 c^2}$$

したがって、グリーン関数は以下の積分を実行すれば求まる。

$$G(\vec{r}, t) = -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k \frac{1}{\omega^2 - k^2 c^2} e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

まず  $\omega$  による積分を実行する。被積分関数を見ると明らかなように  $\omega = \pm kc$  で極を持つ。複素  $\omega$  平面上で図 2.1 に示したように積分路を取って、この極を上を避けることで遅延条件を満たすことができる。求めるグリー

ン関数は、極を除く実軸上の積分に積分路  $C_{+\delta}$  上の二つの値を足したものととして求まる。複素平面内で積分路を閉じさせるために付け加えた積分路  $C_{\pm}$  は、 $|\omega| \rightarrow \infty$  の極限で積分値がゼロになるという条件から、 $t > 0$  では積分路  $C_-$  を  $t < 0$  では積分路  $C_+$  を取らなければならない。したがって、 $t < 0$  のときは全積分路に囲まれた領域内で被積分関数は正則でありコーシーの積分定理より全積分がゼロとなる。すなわち  $G = 0$  となり遅延条件が満たされる。一方、 $t > 0$  のときは積分路内に極が含まれるため積分が有限な値を持つ。ここから先は単純な計算を行うだけで以下の結果を得る。

$$G_{\text{ret}}(\vec{r}, t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - \frac{|\vec{r}|}{c})}{|\vec{r}|} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (2.22)$$

時刻が正のときのグリーン関数は、原点に  $1/4\pi$  の電荷が存在する時のクーロンポテンシャルにデルタ関数が掛かった形になっている。デルタ関数の性質から  $r = ct$  の球面上でのみ値を持つことになる。これは時刻ゼロに座標原点に電荷が存在したという情報が光速  $c$  で等方的に伝搬して行くことを示している。この結果を式 (2.20) に代入することで遅延ポテンシャルの式 (2.17) が得られることを示すことは容易である。ベクトルポテンシャルについても同様である。

## 2.7 リエナー・ブィーヘルトポテンシャル

一つの運動する荷電粒子による電磁ポテンシャルを求める。電荷  $q$  の粒子が  $\vec{r} = \vec{r}_0(t)$  の軌跡に沿って運動しているとする。速度は  $\vec{u}(t) = \dot{\vec{r}}_0(t)$  である。電荷密度、電流密度は以下のように与えられる。

$$\rho_e(\vec{r}, t) = q\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \vec{j}_e(\vec{r}, t) = q\vec{u}(t)\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

以下、スカラーポテンシャルについて考える。遅延ポテンシャルは、式 (2.20) に式 (??)、(2.22) と上記の電荷分布を代入することで、以下のよう  
に与えられる。

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{r}' \int dt' \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} q\delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_0(t'))$$

## 2.7 リエナー・ブィーヘルトポテンシャル

$$= q \int dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}\right)$$

以下、 $t'$  についての積分について考える。時刻  $t'$  の荷電粒子と観測者の相対ベクトルを以下のように定義する。

$$\vec{R}(t') \equiv \vec{r} - \vec{r}_0(t'), R(t') \equiv |\vec{R}(t')|$$

荷電粒子を  $t'$  に出発した光が観測者に届く時刻の時間原点を  $t$  だけずらした時刻を  $t'' = t' - t + R(t')/c$  と定義して、積分変数の変換をする。 $R^2(t') = \vec{R}(t') \cdot \vec{R}(t')$ 、 $\vec{u}(t') = \dot{\vec{r}}_0(t') = -\dot{\vec{R}}(t')$  に注意して  $R^2(t')$  を  $t'$  で微分すると

$$2R(t')\dot{R}(t') = 2\vec{R}(t') \cdot \dot{\vec{R}}(t') = -2\vec{R}(t') \cdot \vec{u}(t')$$

ここで時刻  $t'$  の荷電粒子から観測者の方向を向いた単位ベクトル  $\vec{n}$  と光速で規格化した粒子の速度  $\vec{\beta}$  を以下の式で定義する。

$$\vec{n}(t') \equiv \frac{\vec{R}(t')}{R(t')}, \vec{\beta}(t') \equiv \frac{\vec{u}(t')}{c}$$

以上から  $dt''$  は以下のように書ける。

$$dt'' = (1 - \vec{n}(t') \cdot \vec{\beta}(t')) dt'$$

$t'$  に荷電粒子を出て観測者に向かった光が観測者に届く時刻と  $t' + dt'$  に出た光が観測者に届く時刻の差が  $dt''$  である。この結果は、ドップラー効果を表している。粒子の速度は光速を越えないので  $dt' > 0$  の時  $dt'' > 0$  が保証されている。このことは  $t''$  が  $t'$  の単調関数であることを示している。したがって、積分範囲も  $t'$  が  $-\infty \sim \infty$  のとき  $t''$  も  $-\infty \sim \infty$  である。又、 $t'' = 0$  を満たす  $t'$  も一意に決まる。

ここまでの結果を用いて遅延ポテンシャルを書き下すと以下のようになる。

$$\phi(\vec{r}, t) = q \int \frac{1}{\kappa(t')R(t')} \delta(t'') dt'' = \frac{q}{\kappa(t_{\text{ret}})R(t_{\text{ret}})} = \left[ \frac{q}{\kappa R} \right] \quad (2.23)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left[ \frac{q\vec{\beta}}{\kappa R} \right] \quad (2.24)$$

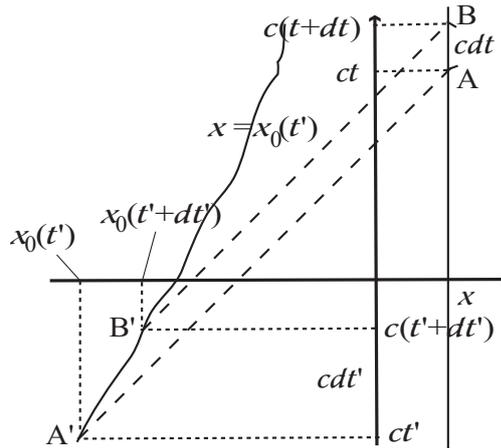


図 2.2 静止した観測者の時間偏微分

$$\kappa(t') \equiv 1 - \vec{n}(t') \cdot \vec{\beta}(t') \quad (2.25)$$

ここで  $t_{\text{ret}}$  は以下の式で定義される遅延時間である。

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{R(t_{\text{ret}})}{c}$$

この式で与えられる電磁ポテンシャルはリエナー・ブィーヒェルトポテンシャル (The Liénard-Wiechart potentials) と呼ばれる。

## 2.8 速度場・輻射場

この節では、運動する点電荷  $q$  の作る電場・磁場を導出する。これには、前節で求めたリエナー・ブィーヒェルトポテンシャルを式 (2.10)、式 (2.9) に代入すればよい。観測者の時間  $t$ 、空間座標  $\vec{r}$  での偏微分の計算は、 $t$ 、 $\vec{r}$  の変化に伴うその時空点での電磁ポテンシャルを生成に参与している電荷の時空点の変化も考慮して行わなければいけないため単純ではない。以下では、遅延時間を  $t' = t_{\text{ret}}$  と置き、この計算について解説する。

まず、観測者の時間による偏微分について考える。当たり前であるが、 $\partial/\partial t$  とは、観測者の座標  $\vec{r}$  を固定して観測者の時間  $t$  のみ変化させた時の

## 2.8 速度場・輻射場

物理量の変化を計算せよ、という意味である。微分される関数は  $\vec{\beta}(t')$  と  $R(t')\kappa(t') = |\vec{r} - \vec{r}_0(t')| - (\vec{r} - \vec{r}_0(t')) \cdot \vec{\beta}(t')$  である。これらは  $t$  を頭わに含まず、 $t$  の変化に伴う  $t'$  の変化を通して  $t$  に依存する。そこで  $t$  の偏微分から  $t'$  の偏微分への変換を行う。時空図に  $t$  の変化に伴う荷電粒子の位置の変化と  $t'$  の変化の様子を表した。簡単のため、系は空間一次元とした。観測者は座標  $x$  の位置に静止している。時刻  $t$  の観測者の事象 A と微小時間  $dt$  後の観測者の事象 B とでそれぞれ観測した電磁ポテンシャルの差分をとり  $dt$  で割る操作が、 $t$  による偏微分である。前々節で求めたグリーン関数の性質から、ある時空点に存在した点電荷が電磁場へ与える影響は光速  $c$  で等方的に伝播していく。したがって、事象 A、B で観測される電磁場は、それぞれ事象 A'、B' にいた電荷によって生成されたものである。事象 A と A' の時刻の関係は、 $t = t' + |\vec{r} - \vec{r}_0(t')|/c$  で与えられる。同様に事象 B と B' の時刻の関係は  $t + dt = t' + dt' + |\vec{r} - \vec{r}_0(t' + dt')|/c$  である。この二つの事象の間での観測者から粒子までの距離の変化量は、この間の粒子の運動により粒子が観測者に近づいた距離に等しいので  $|\vec{r} - \vec{r}_0(t' + dt')| - |\vec{r} - \vec{r}_0(t')| = -\vec{u}(t') \cdot \vec{n}(t') dt'$  と与えられる。以上から  $dt$  と  $dt'$  の関係は以下のように計算できる。

$$dt = dt'(1 - \beta(t') \cdot \vec{n}(t'))$$

したがって偏微分の変換式として以下の関係を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (2.26)$$

次に  $\vec{\nabla}$  について考える。この演算は、事象 A にいる観測者と同時刻  $t$  で微小距離  $\Delta\vec{r}$  離れた事象 C にいる観測者でそれぞれ測定した電磁ポテンシャルの勾配を求めることに対応する。ここでも簡単のために空間一次元系として時空図を示した。事象 C で観測される電磁場は事象 C' にいた電荷によって生成されたものである。事象 A と C で観測が行われる時刻は同じ  $t$  であるが、それぞれで観測される電磁場が生成された時刻・場所は異なることが分かる。事象 C の観測者から事象 C' の粒子までの距離と事象 A の観測者から事象 A' の粒子までの距離の差は、 $dt'$  間の粒子の運動により

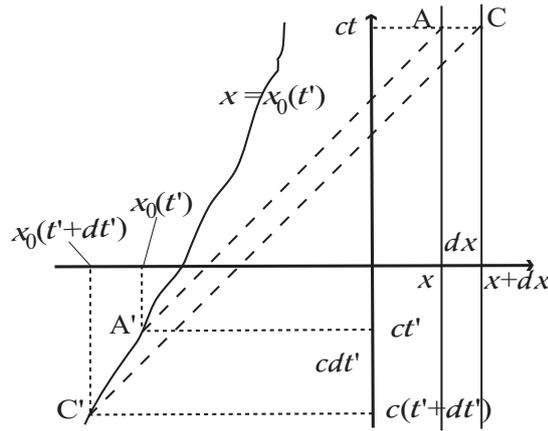


図 2.3 観測者の空間座標による偏微分

粒子が観測者に近づいた分短くなった距離と C が A より  $d\vec{r}$  だけ離れていることから  $d\vec{r} \cdot \vec{n}$  だけ元々離れている効果の足し合わせである。したがって、 $|\vec{r} + d\vec{r} - \vec{r}_0(t' + dt')| - |\vec{r} - \vec{r}_0(t')| = d\vec{r} \cdot \vec{n} - \vec{u}(t') \cdot \vec{n}(t') dt'$  である。先ほどと同様に事象 A と A' および C と C' のそれぞれの時間の関係を与える方程式の差を取りこの関係式を代入すると以下のように  $dt'$  と  $d\vec{r}$  の関係式を得る。

$$dt' = - \left( \frac{d\vec{r} \cdot \vec{n}}{c} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{c} dt' \right), \frac{\partial t'}{\partial \vec{r}} = - \frac{1}{\kappa(t')c} \vec{n}$$

したがって  $\vec{r}$  の偏微分を  $t'$  の偏微分へ変換は

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial t'}{\partial \vec{r}} \frac{\partial}{\partial t'} = - \frac{\vec{n}}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (2.27)$$

で与えられる。微分される関数の一つ  $R(t')\kappa(t')$  は、陽に観測者の位置  $\vec{r}$  に依存する。したがって、 $\vec{r}$  による偏微分は、式 (2.27) で与えられる  $\vec{r}$  の変化に伴う遅延時間の変化による寄与に、遅延時間  $t'$  を固定して  $\vec{r}$  で偏微分する操作が付け加わる。以上より  $\vec{r}$  による偏微分は以下のように求まる。

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right)_{\vec{r}_0} - \frac{\vec{n}(t')}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (2.28)$$

## 2.9 輻射場の基本的性質

もう一つの微分される関数である  $\beta(t')$  は、陽に  $\vec{r}$  に依存しないため  $\vec{\nabla}$  の操作では  $t'$  の微分のみが残る。

以上の結果を用いてのリエナー・ブィーヘルトポテンシャルの時間・空間微分を行って電場・磁場を求める。以下の計算を先に行って置くと見通しがよい。

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(t')\kappa(t')}{\partial t} &= -\frac{c}{\kappa(t')} \vec{n}(t') \cdot \vec{\beta}(t') + \frac{c}{\kappa(t')} \beta(t')^2 - \frac{R(t')}{\kappa(t')} \vec{n}(t') \cdot \dot{\vec{\beta}}(t') \\ \vec{\nabla} R(t')\kappa(t') &= \vec{n}(t') - \vec{\beta}(t') + \frac{\vec{n}(t')}{\kappa(t')} (\vec{n}(t') \cdot \vec{\beta}(t')) - \beta(t')^2 \frac{\vec{n}(t')}{\kappa(t')} \\ &\quad + \frac{R(t')}{c\kappa(t')} \vec{n}(t') (\vec{n}(t') \cdot \dot{\vec{\beta}}(t'))\end{aligned}$$

後は、ベクトル解析の公式  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ 、同一のベクトル同士の外積はゼロであることを旨く用いることで電場、磁場が得られる。読者各自で面倒がらずぜひ試みられよ。結果は以下ようになる。

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = q \left[ \frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right] + \frac{q}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times \{(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}}{\kappa^3 R} \right] \quad (2.29)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = [\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t)] \quad (2.30)$$

第一項は速度場、第二項は輻射場と呼ばれる。速度場の特徴を以下にまとめる。

1 電荷が負のとき電場ベクトルの方向は、電荷が遅延時間に於ける速度で等速直線運動していたとき観測時と同時刻に電荷が存在する位置を指す。電荷が正のときは逆向き。

2 強度は距離の二乗に反比例して減少する。

3 電荷が静止している時、電場は Coulomb の法則と一致し、磁場はゼロになる。

## 2.9 輻射場の基本的性質

輻射場の特徴をまとめる。

1 電荷が加速度を持つときのみ存在する。

2 強度は、距離に反比例する。

3 電場、磁場の向きは  $\vec{n}(t_{\text{ret}})$  と直行し、右手系をつくる。電場、磁場の振幅の大きさは同じ。伝搬方向は  $\vec{n}(t_{\text{ret}})$  である。

4 粒子の速度ベクトルが加速度ベクトルと  $\vec{n}$  が作る平面内にあるとき  
 或いは粒子の速度が非相対論的なきは、輻射場は同一平面内に電場成分を持つ直線偏光（詳細は後述）である。

速度場・輻射場の光源からの距離に対する依存性の違いから、光源の近くでは速度場が卓越する。このような領域はニアゾーン (near zone) と呼ばれる。一方光源から十分離れると速度場の存在は無視でき輻射場のみが残る。この様な領域をファーズゾーン (far zone) と呼ぶ。ファーズゾーンでは、ポインティングベクトルが以下のように書ける。

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} [E^2 \vec{n}] \quad (2.31)$$

光源を取り囲む十分遠方の閉曲面  $\Sigma$  から輻射場によって持ち出される単位時間あたりのエネルギー量は、 $\Sigma |\vec{S}| \propto r^2 r^{-2} = \text{一定}$  で光源から閉曲面までの距離によらず一定である。このことは、輻射場は無限遠方に電磁場のエネルギーを持ち運べることを示している。輻射場はこの性質ゆえに輻射場或いは電磁波と呼ばれる。一方速度場は  $\vec{S} \propto r^{-4}$  のため無限遠までエネルギーを持ち出すことが出来ない。

輻射場のエネルギー密度は  $U = 1/4\pi E^2$  と書ける。これを用いると、ポインティングベクトルは  $\vec{S} = cU\vec{n}$  と書け、確かにエネルギー流束になっていることが一目でわかる。運動量密度は以下のように書ける。

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{c} E^2 \vec{n} = \frac{U}{c} \vec{n} \quad (2.32)$$

したがって、電磁波の運動量はエネルギーの  $1/c$  である。

輻射場の位相一定面が平面の単色波を例に挙げる。これを平面波と言い電場は以下のように書き表される。

$$\vec{E} = \vec{\varepsilon} \hat{E}(\omega, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

ここで  $\vec{\varepsilon}$  は輻射場の電場の方向を表す時間・空間に依存しない単位ベクトル

## 2.9 輻射場の基本的性質

ルであり、偏光ベクトルと呼ばれる。 $\omega$  は角周波数、 $\vec{k}$  は波数ベクトルと呼ばれる。位相一定面を表す方程式は  $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{一定}$  である。これから位相一定面が平面であること、波の進行方向が波数ベクトルの方向であることが分かる。これらの式を真空中のマックスウェル方程式に代入すると

$$\omega^2 = c^2 k^2$$

のとき解であることが分かる。これを真空中の電磁波の分散関係式 (dispersion relation) と呼ぶ。この式から真空中では電磁波の位相速度がその波長に依存せず、真空は電磁波に対して非分散性媒質であることが分かる。

電磁波の角運動量について以下のような特殊な状況設定で考察する。電荷  $q$ 、質量  $m$  の粒子が角振動数  $\omega$  の  $z$  軸の正の方向に進行する右回り円偏光 (詳細は節 2.11 で説明) 単色電磁波  $E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$ ,  $E_y = -E_0 \sin(\omega t - kz)$  の下で定常的な運動をしている。粒子には速度に比例する抵抗力  $-\gamma \vec{v}$  が働いている。抵抗力が慣性力より圧倒的に強く、抵抗力と電磁波によるローレンツ力の釣り合いで定常運動が実現しているとする。粒子の運動が非相対論的であると磁場の力が無視でき、釣り合いの式から粒子の速度は  $\vec{v} = q\vec{E}/\gamma$  で与えられる。これより電磁波が粒子に単位時間あたりに与えるエネルギーは  $\dot{U} = \vec{v} \cdot q\vec{E} = q^2 E^2 / \gamma$  となる。一方、電磁波が粒子に与える単位時間あたりの角運動量  $\dot{L}$  は電磁波の与えるトルクである。粒子の位置  $\vec{r}$  は速度を時間積分すれば  $x = -qE_y / \gamma\omega$ ,  $y = qE_x / \gamma\omega$  と求まる。その結果から  $\dot{L} = \vec{r} \times q\vec{E} = (0, 0, -q^2 E^2 / \gamma\omega)$  となる。したがって、電磁波から粒子には電磁波の進行方向負の方向の角運動量が受け渡され、単位時間あたりに与えられる角運動量とエネルギーの大きさの比は  $1/\omega$  である。この結果から右回りの電磁波は、進行方向負を向いた角運動量を持ちその大きさはエネルギーの  $1/\omega$  であることが分かる。以上から電磁波の角運動量は以下のように書ける。

$$\vec{\ell} = \mp \frac{1}{4\pi\omega} \vec{E} \times \vec{B}$$

複号は、右回りの円偏光の時  $-$ 、左回りの円偏光の時  $+$  をとる。

## 2.10 輻射スペクトル

観測の現場に於いて輻射場が運ぶ単位時間、単位周波数、単位面積あたりのエネルギー量なる物理量が問題になる場面にしばしば遭遇する。そこでこの量を輻射スペクトルと呼ぶ。しかし、以下に示すように輻射スペクトルは近似的にしか定義できない量である。単位時間、単位面積あたりに輻射が運ぶエネルギー量はポインティングベクトルを用いて以下のように与えられる。

$$\frac{dW}{dt dA} = |\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} E^2(t)$$

したがって、単位面積を通過する全エネルギー量は以下ようになる。

$$\frac{dW}{dA} = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt E^2(t)$$

この式はパーシバルの公式と実条件を用いて輻射場の電場成分のフーリエ積分表示で以下のように書き表せる。

$$\frac{dW}{dA} = c \int_0^{\infty} d\omega |\hat{E}(\omega)|^2$$

この式から、単位周波数、単位面積あたりのエネルギー量を以下のように定義するのは自然であろう。

$$\frac{dW}{dA d\omega} = c |\hat{E}(\omega)|^2. \quad (2.33)$$

これをさらに単位時間あたりにしたい。単位時間、単位周波数あたりのエネルギー量は時間と周波数の導関数であるから数学的には、 $\Delta t$ 、 $\Delta\omega$  を同時にゼロにすることを要求する。ここで観測の不確定性原理から以下の関係式があったことに注意する必要がある。

$$\Delta t \Delta\omega > 2\pi$$

すなわち、 $\Delta t$ 、 $\Delta\omega$  を同時にゼロに出来ないのである。したがって、数学的に厳密な意味で輻射のスペクトルを定義することはできない。とは言え

## 2.10 輻射スペクトル

実用上便利なこの量を実際に行われている観測の条件に即して定義しておくことは有益である。

強度変化がない定常的な天体の観測をまず考える。観測が行われた時間間隔を  $T$  とする。単位時間あたりの輻射のエネルギー量をこの時間の中に受けた全エネルギー量を  $T$  で割ったものとして定義するのは自然である。そこで観測時間内で得たデータのみでフーリエ変換を敢行し以下の量を定義する。

$$\hat{E}_T(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt E(t) e^{i\omega t}$$

これを用いて単位時間、単位周波数、単位面積あたりの輻射のエネルギー量を以下のように時間平均で定義しても定常天体では実用上問題ない。

$$\frac{dW}{dAd\omega dt} \equiv c \frac{1}{T} |\hat{E}_T(\omega)|^2 \quad (2.34)$$

以下、これを輻射スペクトルと呼ぶ。もし観測している天体の強度が時間変動するときは、 $T$  は変動の時間スケール以下にすればよい。

上記の定義は、観測の不確定性原理と抵触しないことは明らかである。観測時間が  $T$  で有限であることから、スペクトル分解能は  $\Delta\omega > 2\pi/T$  になることが  $\hat{E}_T(\omega)$  の中に自動的に含まれているからである。実際には、殆どの場合で

$$T \gg \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

が成立していると考えてよい。例えば、スペクトル分解能  $R = \nu/\Delta\nu = 1,000,000$  の光学域  $\lambda = 5000\text{\AA}$  ( $\nu = 6 \times 10^{14}\text{Hz}$ ) での観測を考える。これは現在の光学域での観測としては非常に高い分解能の分光観測である。

このとき、 $\Delta\nu = 6 \times 10^8\text{Hz}$  であり、観測の不確定性原理から決まる時刻の不確定さは

$$\Delta t = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{1}{6} \times 10^{-8}\text{sec}$$

である。これは、通常の観測時間  $T$  に比べて圧倒的に短い。

## 2.11 偏光・ストークスパラメータ

前述したように電磁波は、その電場又は磁場成分を指定すればその物理状態が指定される。物質にエネルギーを伝えるのは電場成分であるので通常電場のみ扱う。電場は、進行方向に垂直な面内のベクトルである。ベクトルであるという事の厳密な意味は、進行方向を軸として座標を一回転させると一回元に戻るということにより定義される。進行方向を軸として座標を一回転させた時元に戻る回数を波動のスピンと呼ぶ。したがって、電磁波はスピンの1である。スピン0は例外で、任意の無限小回転に対して普遍なもの、すなわち一回転させると無限回元に戻るものである。このような波動をスカラー波と呼び音波がその例である。電磁波のベクトル性を反映した物理量が偏光状態と呼ばれるものである。以下単色電磁波の偏光状態について説明する。簡単のため電磁波は平面波としその伝搬方向をz軸にとる。

位相を  $\tau = \omega t - kz$  で表すと任意の単色電磁波の電場成分は以下のように書ける。

$$E_x = a_1 \cos(\tau + \delta_1), E_y = a_2 \cos(\tau + \delta_2) \quad (2.35)$$

これは以下のように変形できる。

$$\begin{pmatrix} \frac{E_x}{a_1} \\ \frac{E_y}{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta_1 & -\sin\delta_1 \\ \cos\delta_2 & -\sin\delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix}$$

以下

$$\delta \equiv \delta_2 - \delta_1 \quad (2.36)$$

と定義し、右辺に現れた行列の逆行列を両辺に掛け、その結果の転置行列との内積をとると最終的に以下の式を得る。

$$X^2 + Y^2 - 2XY \cos\delta = \sin^2\delta$$

ここで  $X \equiv E_x/a_1$ 、 $Y \equiv E_y/a_2$  である。これは  $X$ 、 $Y$  の完全二次形式である。この完全二次形式の随伴行列の二つの固有値が共に正であることが

## 2.11 偏光・ストークスパラメータ

ら  $X$ 、 $Y$  の軌跡は楕円を描く。したがって、単色電磁波の偏光状態は一般に楕円偏光である。

以下、 $x$ 、 $y$  成分の位相差  $\delta$  の値によって偏光状態がどのように変わるか調べる。位相差  $\delta$  を用いて電場の各成分を書きなおすと

$$E_x = a_1 \cos(\tau + \delta_1), E_y = a_2 \cos(\tau + \delta + \delta_1)$$

となる。 $\delta = \pi/2$  のとき

$$E_x = a_1 \cos(\tau + \delta_1), E_y = -a_2 \sin(\tau + \delta_1)$$

であり、 $a_1 = a_2$  なら右廻りの円偏光となる。以下  $a_1 = a_2$  の場合を考える。 $\delta$  が減少するにしたがって  $0 < \delta < \pi/2$  の範囲では、右回り楕円偏光になる。 $\delta = 0$  で楕円がつぶれて直線偏光になる。 $\delta$  がさらに減少して負になると左回り楕円偏光になり、 $\delta = -\pi/2$  で左回り円偏光になる。

円偏光の右回り左回りは、見方に依存した定義で客観性を欠く表現である。実際、業界（光学業界とプラズマ業界）によって同じ右回りで全く逆周りを指している。光学業界では、電磁波が進んでくる方向に向かって時計周りを右回りと定義する。これは、電磁波を受ける観測者の立場に立った定義と言える。一方、プラズマ業界では、粒子の進行方向に右ねじが進む方向を右回りと定義する。プラズマ業界で扱う粒子が主に質量を持った粒子である為、観測者によって粒子の進行方向が異なる可能性がある為此のような定義の方が便利なのである。より客観的な定義として以下の式で定義されるヘリシティ (helicity) がある。

$$h \equiv \frac{\vec{s} \cdot \vec{k}}{|\vec{s}| |\vec{k}|} \quad (2.37)$$

ここで  $\vec{s}$  は円偏光電磁波のスピンベクトルである。円偏光電磁波のスピンベクトルの向きは、偏光ベクトルの回転方向に右ねじを回転した時ねじが進む方向として定義される。ヘリシティは正か負のみ意味があり、電磁波の進行方向とスピンの向きが同じときを正、逆のときを負のヘリシティと定義する。

偏光状態は通常ストークスパラメータ (Stokes parameters) と呼ばれる

以下の式で定義される4つの物理量で表される。

$$\begin{aligned} I &= a_1^2 + a_2^2, & Q &= a_1^2 - a_2^2 \\ U &= 2a_1a_2\cos\delta, & V &= 2a_1a_2\sin\delta \end{aligned} \quad (2.38)$$

これらの間には、以下の関係が成り立つ。

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2 \quad (2.39)$$

したがって、独立なストークスパラメータは3つであり、偏光状態を特徴つける物理量は  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $\delta$  の3つであったことと対応している。直線偏光のときは  $V = 0$  であり、 $V$  は円偏光を特徴つける量といえる。円偏光のときは  $Q = U = 0$  であり、これらは直線偏光を特徴つける量といえる。 $I$  は強度と等価な量ではあるが、正確には平均強度の2倍の量である。式 (2.39) が成り立つとき、電磁波は完全偏光しているという。単色光は必ずいずれかの偏光状態に完全偏光しているのである。

現実の電磁波は全てが完全偏光している訳では無い。例えば多くの自然光は無偏光である。以下、無偏光の電磁波がどのように実現しているのかを考察する。多くの場合現実の電磁波は、継続時間が有限のパルス波の重ねあわせで実現している。このパルス波を波連と呼ぶ。一つの波連はある特定の偏光状態にあるとする。無偏光の電磁波は、この波連の初期位相と発せられる時刻及び偏光状態がランダムであるときに実現する。波連の継続時間より十分長い観測時間で偏光板を使って観測することを考える。特別な方向が存在しないので、偏光板をどの方向に傾けても得られる強度は一定になる。したがって、直線偏光していないという測定結果を得る。同様に円偏光を測定しても右回りと左回りがほぼ同数存在するので、円偏光していないという結果になる。これが無偏光状態であり、

$$Q = 0, U = 0, V = 0$$

となる。一方、現実の電磁波での完全偏光した状態とは、全ての波連が同じ偏光状態である場合である。一般の場合は、完全偏光した状態と無偏光状態の重ね合わせである。したがって、ストークスパラメータは以下の関係式を満たす。

## 2.12 相対論的速度で運動する荷電粒子からの放射強度

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2$$

そこで電磁波の偏光の度合いを表す物理量として偏光度  $\Pi$  を以下のように定義する。

$$\Pi \equiv \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I} \quad (2.40)$$

偏光度が 0 と 1 の間の値を持つとき電磁波は部分偏光しているという。

## 2.12 相対論的速度で運動する荷電粒子からの放射強度

加速度運動する相対論的荷電粒子からの電磁波の放射強度を求める。電荷  $q$  の粒子の加速運動によって時刻  $t$  に観測者  $\vec{r}$  の位置で作られる輻射場は以下のように書けた。

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{q}{c} \left[ \frac{1}{R} \vec{g} \right] \\ \vec{g} &\equiv \frac{1}{\kappa^3} \vec{n} \times \{ (\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \}. \end{aligned}$$

観測者が受信する粒子からの放射の単位立体角単位時間当たりの強度は

$$\frac{dW}{dt d\Omega} = \frac{c}{4\pi} [R^2 E^2] \quad (2.41)$$

である。これを受信強度 (received power) と呼び  $dP_r/d\Omega$  と書く。一方、観測者が  $dt$  間に受信した放射は、粒子が  $dt'$  間に放射した電磁波であり、 $dt = dt' \kappa$  なる関係で結ばれる。粒子が単位時間当たりに放射した電磁波の強度を放射強度 (emitted power) といい、 $dP_e/d\Omega$  と書き、以下の式で与えられる。

$$\frac{dP_e}{d\Omega} \equiv \frac{dW}{dt' d\Omega} = \frac{c}{4\pi} [\kappa R^2 E^2] \quad (2.42)$$

したがって、全放射強度 (total emitted power) は以下のように与えられる。

$$P_e = \frac{q^2}{4\pi c} \int d\Omega [\kappa g^2]$$

全放射強度を求めるには上式の立体角積分を以下の手順に従って実行す

ればよい。 $\vec{v}$  の方向を  $z$  軸にとり、 $\dot{\vec{v}}$  を  $x$ - $z$  平面をとって  $\vec{v}$  とのなす角を  $i$  とする。又、 $\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$  とする。これらの変数を使って被積分関数は以下のように書ける。

$$\vec{n} \cdot \vec{\beta} = \beta\cos\theta, \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} = \dot{\beta}(\sin\theta\cos\phi\sin i + \cos\theta\cos i), \dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\beta} = \dot{\beta}\beta\cos i$$

$$\begin{aligned} \kappa g^2 = & \dot{\beta}^2 \left\{ \frac{1}{\kappa^3} + \frac{2}{\kappa^4} \beta(\cos i \sin i \sin\theta\cos\phi + \cos^2 i \cos\theta) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\kappa^5} \gamma^{-2} (\sin^2 i \sin^2\theta\cos^2\phi + 2\sin i \cos i \sin\theta\cos\theta\cos\phi + \cos^2 i \cos^2\theta) \right\} \end{aligned}$$

立体角積分は  $\mu = \cos\theta$  という変数変換を用いて  $\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu$  と書き直す。任意の正の整数  $n$  に対して以下の三つの関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} I_{n+1} &\equiv \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = \frac{(1+\beta)^n - (1-\beta)^n}{n\beta(1-\beta^2)^n} \\ J_{n+1} &\equiv \int_{-1}^1 \frac{\mu d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = \frac{1}{n} \frac{dI_n}{d\beta} \\ K_{n+1} &\equiv \int_{-1}^1 \frac{\mu^2 d\mu}{(1-\beta\mu)^{n+1}} = \frac{1}{n} \frac{dJ_n}{d\beta} \end{aligned}$$

この関係式を用いて以下のように立体角積分が実行できる。

$$\begin{aligned} \int [\kappa g^2] d\Omega &= 2\pi \left[ \dot{\beta}^2 \left( I_3 + 2\beta J_4 - \gamma^{-2} K_5 - \left\{ 2\beta J_4 + \frac{1}{2\gamma^2} (I_5 - 3K_5) \right\} \sin^2 i \right) \right] \\ &= \frac{8\pi}{3c^2} [\dot{u}^2 \gamma^6 (1 - \beta^2 \sin^2 i)]. \end{aligned}$$

ここで  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  はローレンツ因子である。以上から加速度運動する任意の速度の電子からの電磁波の全放射強度が以下のようにもとまる。

$$P_e = \frac{2e^2}{3c^3} [\gamma^6 (\dot{u}^2 - |\dot{\vec{u}} \times \vec{\beta}|^2)] \quad (2.43)$$

これを始めに求めたのはリエナー (Liénard) であり 1898 年のことである。これは相対論の発見以前のことである。この呼び名は一般的ではないがこの本ではリエナーの公式と呼ぶ。

## 2.13 ラーマーの公式

電荷の運動が非相対論的な時 ( $\beta = u/c \ll 1$ ) に限った場合の電磁波の全放射強度は、式 (2.43) の  $\beta$  の最低次を求めることで以下のように求まる。

$$P = \frac{2q^2\dot{u}^2}{3c^3} \quad (2.44)$$

これをラーマー (Larmor) の公式と呼ぶ。非相対論的極限では、 $\beta$  の最低次を取る限り放射強度と受信強度の違いはない。

非相対論的な運動をする点電荷が作る輻射場の詳細を調べる。何時でも  $\beta \ll 1$  が成り立つためには、 $\dot{\beta}\Delta t < O(\beta)$  でなければならない。ここで  $\Delta t$  は系の特徴的な時間スケールであり、たとえば放射される輻射の周期  $\Delta t \sim 1/\nu$  などである。輻射場を  $\beta$  の一次までの近似で表すと以下のようになる。

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \left[ \frac{q}{Rc^2} \vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{u}}) \right] \quad (2.45)$$

$\vec{n}$ 、 $\vec{E}_{\text{rad}}$ 、 $\dot{\vec{u}}$  の関係を図示した。電場・磁場の大きさは次のようになる。

$$|\vec{E}_{\text{rad}}| = |\vec{B}_{\text{rad}}| = \left[ \frac{q\dot{u}}{Rc^2} \sin\Theta \right] \quad (2.46)$$

これらを式 (2.42) に代入して  $\beta$  の最低次をとることで電磁波の放射強度分布が以下のように得られる。

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dW}{dt d\Omega} = [R^2 S] = \left[ \frac{q^2\dot{u}^2}{4\pi c^3} \sin^2\Theta \right] \quad (2.47)$$

次に放射の周波数分布を求める。この系の双極子モーメントは  $\vec{d}(t') = q\vec{r}_0(t')$  で与えられる。これを用いると輻射場の電場の振幅は以下のように書ける。

$$E(t) = \ddot{d}(t') \frac{\sin\Theta}{c^2 R} \quad (2.48)$$

双極子モーメントのフーリエ積分表示  $\hat{d}(\omega)$  を用いると電場の振幅の周波数分布が以下のように得られる。

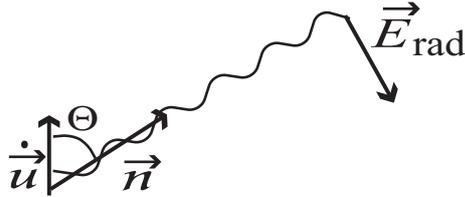


図 2.4 輻射場の伝搬方向・偏光ベクトルと荷電粒子 ( $q > 0$ ) の加速度ベクトルの関係

$$\hat{E}(\omega) = -\frac{1}{c^2 R} \omega^2 \hat{d}(\omega) \sin\theta \quad (2.49)$$

ここで  $R$  の時間変化を無視した。この結果から非相対論的運動をする荷電粒子から放射される輻射の周波数は、粒子の振動の周波数と同じであることが分かる。このことは、非相対論的近似に於いて輻射場を  $\beta$  の最低次、即ち 1 次のみ残したと直接関係している。輻射場の式 (2.29)、(2.30) を  $\beta$  についてテイラー展開すると  $\beta^2$  等高次の項が出てくる。粒子が振動数  $\omega_0$  で単振動しているとする。たとえば 2 次の項は、 $E(t) \propto \beta \dot{\beta} \propto \cos\omega_0 t \sin\omega_0 t \propto \sin 2\omega_0 t$  という寄与を与える。したがって、2 次の項の存在は  $\omega = 2\omega_0$  という倍周波の電磁波の生成と結びつく。さらに高次の項を残せば、更に高調波の存在と結びつく。逆に 1 次まですなわち双極子のみ残した近似では、高調波は存在せず放射される電磁波の周波数は  $\omega = \omega_0$  のみとなるのである。上記の結果から、単位周波数あたりの全放射エネルギーの角度分布及び単位周波数あたりの全放射エネルギーは以下のようにもとまる。

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = c |\hat{E}(\omega)|^2 = \frac{1}{c^3} \omega^4 |\hat{d}(\omega)|^2 \sin^2\theta \quad (2.50)$$

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{8\pi\omega^4}{3c^3} |\hat{d}(\omega)|^2 \quad (2.51)$$

以上の結果から分かった加速度運動する非相対論的な電荷から放射される輻射の性質についてまとめる。

- 1 放射強度は電荷の二乗、加速度の二乗に比例する。

## 2.14 輻射場の公式の物理的導出

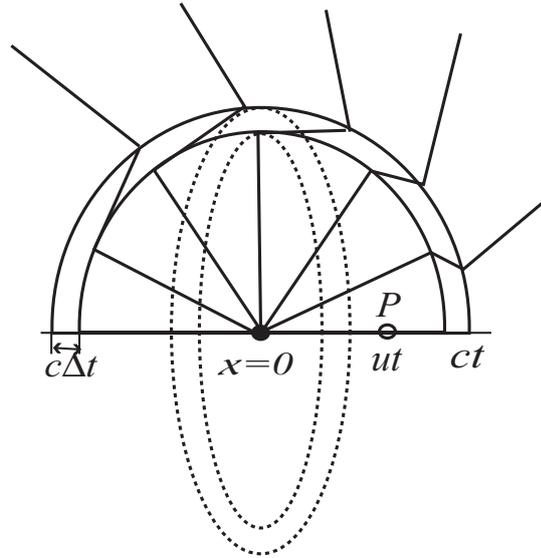


図 2.5 相対論的速度で運動する荷電粒子の作る電場

- 2 電場の振幅分布は双極子分布になる。加速度の方向で放射強度はゼロとなり、加速度と直行する方向で放射強度が最大となる。
- 3 電場が加速度と  $\vec{n}$  が作る面内にある直線偏光となる。
- 4 放射される電磁波の周波数は、放射体の振動の振動数と同じである。

## 2.14 輻射場の公式の物理的導出

加速度運動する電荷から電場振幅が距離に反比例することを以下の例を用いて物理的に示そう。図 2.5 に示した様に  $x$  軸の正の方向に速度  $u$  で等速直線運動していた荷電粒子が原点に到達した瞬間突然一定の加速度で減速を始め  $\Delta t$  秒後に静止したとする。減速を開始してから  $t$  秒後の様子を図に示した。 $x$  軸上の点  $P$  は、減速をせず等速運動を続けたとしたとき粒子が到達しているはずの位置を示した。減速時間  $\Delta t$  は  $t$  に比べて十分短いとして、粒子はほぼ原点で静止したとする。半径  $ct$  の球面より外側の領域には、粒子が減速を始めたという情報はまだ伝わっておらず点  $P$  を中心

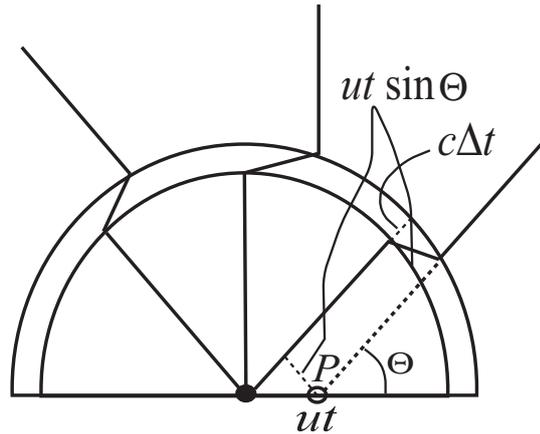


図 2.6 非相対論的運動をする荷電粒子の作る電場

とした放射状に電気力線が分布した速度場のみが存在する。一方半径  $c(t - \Delta t)$  の球面内側では、粒子が静止したという情報が伝わっており、ここには原点を中心とした放射状の速度場のみ存在する。この二つの球面に挟まれた球殻状の領域は減速が起きている間に生成された電磁場が存在する領域である。系の対称性からこの領域内の電気力線は同一平面内に存在しなければならない。荷電粒子以外に電荷が存在しないことから、電気力線は連続でなければならない。これらの条件から電気力線の分布は図のようになる。図から明らかなように加速度運動をする荷電粒子が作る電場は進行方向とほぼ直行している。このことは輻射場が横波であることに対応している。球殻内の電場の球面に沿った成分を  $E_t$  とする。図の点線で示したようにこの球殻の粒子の軌跡に垂直な断面を原点を中心としたリング状に取る。このリングを貫く電気力線は  $E_t 2\pi ct c \Delta t$  であり、これは保存する。したがって、 $E_t \propto 1/ct = 1/R$  を得る。

次に荷電粒子の運動が非相対論的な場合に限ると図 2.6 を用いた物理的考察のみからラーマーの公式が導かれることを示そう。この場合、先ほどの例とは異なり半径  $ct$  の球面の外側の領域の速度場が、点  $P$  を中心として等方的になる。半径  $ct$  と半径  $c(t - \Delta t)$  の球面で挟まれた領域内の電場の

## 2.15 非相対論的運動をする荷電粒子系からの輻射場

動径成分を  $E_r$  とする。これは速度場なので  $E_r = q/(ct)^2$  と書ける。図から次の関係が成り立つことが容易に分かる。

$$\frac{E_t}{E_r} = \frac{utsin\Theta}{c\Delta t}$$

この関係式から  $E_t$  が以下のように求まる。

$$E_t = \frac{q\dot{u}}{c^2 R} \sin\Theta$$

ここで  $\dot{u} = u/\Delta t$ ,  $R = ct$  の置き換えを行った。この結果はラーマーの公式 (2.46) と一致する。

## 2.15 非相対論的運動をする荷電粒子系からの輻射場

ここまでは一つの点電荷から放出される輻射について考察した。しかし、現実の天体からの輻射は多数の荷電粒子からの輻射の重ね合わせである。そこで多数の荷電粒子を含む系からの輻射にこれまでの結果を拡張するための近似方法を示す。 $N$  個の荷電粒子を含む系を考える。第  $i$  番目の粒子の位置・速度・電荷をそれぞれ  $\vec{r}_i$ ,  $\vec{u}_i$ ,  $q_i$  とする。ただし、粒子の運動は非相対論的運動とする。原理的には、全ての荷電粒子が作る輻射場を計算し、重ね合わせればよいのだが、粒子毎に遅延時間が異なりかつ粒子の数も非常に多いので現実的にはこれを厳密に実行することは不可能である。

まず以下の二つの極限的条件を満たす場合について重ね合わせがどのように実行されるか考察する。簡単のため各粒子からの放射の波形は  $E_0(t)$  で共通とする。 $i$  番目の粒子までの遅延時間を  $t_i$  とすると時刻  $t$  に観測者が観測するこの系からの電磁波の電場は以下の式で表される。

$$E(t) = \sum_{i=1}^N E_0(t - t_i)$$

$E_0(t)$  のフーリエ積分表示  $\hat{E}(\omega)$  を用いると  $E(t)$  のフーリエ積分表示は以下のように表される。

$$\hat{E}(\omega) = \hat{E}_0(\omega) \sum_{i=1}^N e^{i\omega t_i}$$

放射スペクトルを求める為に  $|\hat{E}(\omega)|^2$  を計算する。

$$|\hat{E}(\omega)|^2 = |\hat{E}_0(\omega)|^2 \left( \sum_{i=1}^N 1 + \sum_{i \neq j} e^{i\omega(t_i - t_j)} \right) \quad (2.52)$$

右辺第一項は同一粒子からの寄与であり和は  $N$  となる。第二項は異なる粒子同士の掛けあわせからきた項である。第二項を以下、二つの極限の場合について評価する。全粒子が存在する系のサイズを  $L$  とする。系のサイズが放射される電磁波の波長  $\lambda$  より十分小さいとき、各粒子からの遅延時間の差  $t_i - t_j$  は電磁波の周期より十分短く、 $|\omega(t_i - t_j)| \ll 2\pi$  である。したがって、第二項の和は  $N(N-1)$  となる。このような波の重ね合わせを可干渉 (coherent) な重ね合わせと呼ぶ。したがってこの場合  $|\hat{E}(\omega)|^2 = N^2 |\hat{E}_0(\omega)|^2$  となる。これは各粒子からの放射が重ね合わせの結果強めあい、粒子一個からの放射強度の  $N$  倍より圧倒的に強くなることを示している。次に  $L \gg \lambda$  で且つ粒子間平均距離  $n^{-1/3}$  が波長より十分大きい、 $n^{-1/3} \gg \lambda$  の場合を考える。系内で粒子は一様かつランダムに分布しているとす。この場合、各  $i, j$  の組み合わせごとに  $|\omega(t_i - t_j)|$  は  $0 \sim 2\pi$  の間の値をランダムに取る。このように位相が  $0 \sim 2\pi$  の間のランダムな値を取る多数の波の重ね合わせを行うとお互い打ち消しあい近似的にゼロとみなしてよい。この近似を乱雑位相近似 (Random Phase Approximation)、別名 RPA、と呼ぶ。このような波の重ねあわせを非可干渉 (incoherent) な重ね合わせと呼ぶ。したがって、この場合は  $|\hat{E}(\omega)|^2 = N |\hat{E}_0(\omega)|^2$  となる。これは系全体からの強度が各粒子からの放射強度の足し算であることを示している。例えば、星間プラズマや銀河団プラズマでは電子密度が  $1 \sim 10^{-3} \text{cm}^{-3}$  と希薄であり粒子間隔が放射される電磁波の波長より十分長く、各電子からの放射の非可干渉な重ね合わせで全系からの放射強度が得られる。

最後に各粒子からの放射の波形が共通であるとする、ここまで課してきた条件を外し、個々の粒子からの放射が式 (3.54[?]) で書き表わされる一般の場合について議論する。ここでは扱いが特に、系の大きさが放射される電磁波の波長より十分小さいときを取り上げる。各粒子間の遅延時間の差

## 2.16 輻射場のフーリエスペクトル

が無視出来るため、輻射場の電場は以下のように書ける。

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \sum_i \left[ \frac{q_i \vec{n}_i \times (\vec{n}_i \times \dot{\vec{u}}_i)}{c^2 R_i} \right]_0$$

$[\ ]_0$  は小領域内の代表点での遅延時間で評価せよという意味である。この放射体から観測者が十分遠方に離れると、 $R_i \rightarrow R_0$ ,  $\vec{n}_i \rightarrow \vec{n}_0 = \vec{n}$  であり、粒子毎の距離の差、方向ベクトルの差も無視できるので代表点で置き換えることができる。輻射場は以下のように書ける。

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \sum_i q_i \dot{\vec{u}}_i)}{R_0} \right]_0 = \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \ddot{\vec{d}})}{c^2 R_0} \right]_0$$

$$\vec{d} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$$

ここで粒子についての和が  $[\ ]$  の中に入る事が出来たのは、粒子間の遅延時間の差を無視できたからである。最後に導入された  $\vec{d}$  は同時刻での和で定義され、考えている領域内の粒子系の双極子モーメントである。この結果は、系の大きさが放射される電磁波の波長より十分小さいとき、粒子系の全双極子モーメントと同じ双極子モーメントを持つ単一の電荷からの輻射場で粒子系からの放射が近似できることを示している。この近似を双極子近似と呼ぶ。

## 2.16 輻射場のフーリエスペクトル

位置  $\vec{r}$  にいる観測者が時刻  $t$  に観測する輻射場のフーリエスペクトル  $\hat{E}(\vec{r}, \omega)$  は次の式で与えられる。

$$\hat{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{T_1}^{T_2} \frac{q \vec{n} \times \{(\vec{n} - \vec{\beta}(t')) \times \dot{\vec{\beta}}(t')\}}{c \kappa(t')^3 R(t')} e^{i\omega t} dt$$

ここで  $R(t') = |\vec{r} - \vec{r}_0(t')|$  は  $t' = t - R(t')/c$  遅延時間に  $\vec{r}_0(t')$  にいた荷電粒子と観測者との相対距離である。また  $T_1 < t < T_2$  は、スペクトルを求める為の観測が行われた期間である。ただしこの間に荷電粒子の加速度が

有限の値を持つとした。以下では、観測者が荷電粒子から十分離れているとして  $\vec{n} = (\vec{r} - \vec{r}_0(t'))/R(t')$  の時間変化は無視する。この式を  $R(t')^2 = \vec{R} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0(t'))$  より得られる関係式  $R(t') = \vec{n} \cdot \vec{r} - \vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')$  と  $dt = \kappa(t')dt'$  を用いて  $t'$  で書き換えると以下の式を得る。

$$\hat{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi R} e^{i\omega \vec{n} \cdot \vec{r}/c} \int_{T'_1}^{T'_2} \frac{q}{c} \vec{n} \times \frac{\{(\vec{n} - \vec{\beta}(t')) \times \dot{\vec{\beta}}(t')\}}{\kappa(t')^2} e^{i\omega(t' - \vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')/c)} dt'$$

ここで相対距離をその変化が無視できるほど小さいとし代表時刻（例えば  $t' = 0$ ）での相対距離  $R$  で近似した。さらに

$$\frac{\vec{n} \times \{(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}}{\kappa^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{\kappa} \right)$$

を用いて部分積分を実行すると次の式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{E}(\vec{r}, \omega) &= \frac{q}{2\pi c R} e^{i\omega \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}(t'))}{\kappa(t')} e^{i\omega(t' - \vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')/c)} \right]_{T'_1}^{T'_2} \\ &\quad - \frac{i q \omega}{2\pi c R} e^{i\omega \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}} \int_{T'_1}^{T'_2} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta}(t')) e^{i\omega(t' - \vec{n} \cdot \vec{r}_0(t')/c)} dt' \end{aligned}$$

荷電粒子の軌道をこの式に代入すればその荷電粒子から放射される輻射のスペクトルが求められる。長時間平均を取ると右辺第一項が消えて第二項の積分のみが残る。

## 2.17 Eモード・Bモード偏光

### 2.17.1 直線偏光の基本パターンとストークスパラメータ

任意の直線偏光状態はストークスパラメータの  $Q, U$  により表わされる。しかし、ある偏光状態に対して  $Q, U$  がどのような値を取るかは座標系の取り方に依存する。座標系の取り方に値が依存する物理量は、直線偏光の物理状態を表現する物理量として適しておらず座標系の取り方に依存しない直線偏光状態を表現する物理量が必要である。その様な要請に応える物理量が直線偏光の Eモード・Bモードである。以下では直線偏光を扱う。従っ

## 2.17 Eモード・Bモード偏光

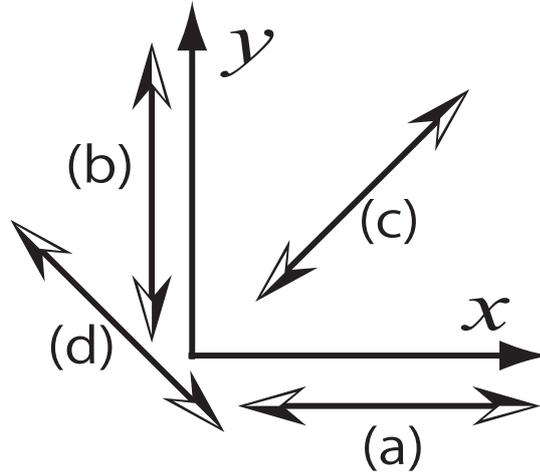


図 2.7 ストークスパラメータ  $Q, U$  の値と直線偏光のパターン。  $Q, U$  の値が以下の4つの組の場合について直線偏光のパターンを図示した：  
(a)  $Q > 0, U = 0$ , (b)  $Q < 0, U = 0$ , (c)  $Q = 0, U > 0$ , (d)  $Q = 0, U < 0$ 。

て  $V = 0$  とする。

まず直線偏光状態の基本状態について整理する。図 2.7 にストークスパラメータ  $Q, U$  が  $(Q > 0, U = 0), (Q < 0, U = 0), (Q = 0, U > 0), (Q = 0, U < 0)$  の4つの組を持つ場合について偏光状態を図示した。ここで座標を  $z$  軸を軸として45度回転したとする。新たな座標  $x' - y'$  系で同じ偏光状態を測定したときのストークスパラメータの測定結果は以下のようになる：  
(a)  $Q' = 0, U' < 0$ , (b)  $Q' = 0, U' > 0$ , (c)  $Q' > 0, U' = 0$ , (d)  $Q' < 0, U' = 0$ 。このように同じ偏光状態であっても座標系の取り方によってストークスパラメータ  $Q, U$  の値は異なる。

### 2.17.2 Coherency Matrix

ここでは coherency matrix を導入する。 $z$  方向に伝搬する角振動数  $\omega$  の電磁波の  $z = 0$  での電場の  $x, y$  成分を次のように複素数で表現する。

$$E_x = a_1 e^{i(\omega t + \delta_1)}, E_y = a_2 e^{i(\omega t + \delta_2)}$$

ここで  $a_1, a_2$  は振幅を表す実数、 $\delta_1, \delta_2$  は初期位相を表す実数である。Coherency Matrix は以下の式で定義される。

$$J \equiv \begin{pmatrix} E_x E_x^* & E_x E_y^* \\ E_x^* E_y & E_y E_y^* \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

初期位相の差  $\delta \equiv \delta_2 - \delta_1$  を導入して式 (2.53) を変形しストークスパラメータの定義式を用いると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} U \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} V \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.54)$$

### 2.17.3 E・B モード

以下直線偏光のみを扱う。従って  $V = 0$  である。天球面を平面で近似し、ストークスパラメータの空での分布  $I, Q, U$  を平面波でフーリエ展開した時のスペクトルを  $\hat{I}(\vec{k}), \hat{Q}(\vec{k}), \hat{U}(\vec{k})$  とする。Coherency matrix のフーリエスペクトル  $\hat{J}(\vec{k})$  は以下のように書ける。優秀な読者諸君にとっては言うまでもないことと思うが、ここで現れた  $\vec{k}$  は空のストークスパラメータの分布をフーリエ変換した時現れるモードの波数ベクトルであり、電磁波の波数ベクトルでは無いことを断わっておく。

$$\begin{aligned} \hat{J}(\vec{k}) &= \frac{1}{2} \hat{I}(\vec{k}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \hat{Q}(\vec{k}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \hat{U}(\vec{k}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.55)$$

平面はの波数ベクトル  $\vec{k}$  と  $x$  軸の成す角を  $\theta_k$  とする。平面波の波数ベクトル  $\vec{k}$  と  $x$  軸が一致するように座標系を  $z$  軸の周りに回転して得られる新しい座標系を  $K'$  系とする。 $K'$  系では電磁波の電場の各成分のフーリエ

## 2.17 Eモード・Bモード偏光

スペクトルは以下のように書ける。

$$\begin{aligned}\hat{E}'_x(\vec{k}) &= \hat{E}_x(\vec{k})\cos\theta_k + \hat{E}_y\sin\theta_k \\ \hat{E}'_y(\vec{k}) &= -\hat{E}_x(\vec{k})\sin\theta_k + \hat{E}_y\cos\theta_k\end{aligned}$$

$K'$ 系での coherency matrix のフーリエスペクトル  $\hat{J}'(\vec{k})$  は  $\hat{J}(\vec{k})$  と以下の関係で結ばれる。

$$\hat{J}'(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix} \hat{J}(\vec{k}) \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$$

これから以下の式を得る。

$$\begin{aligned}\hat{J}'(\vec{k}) &= \frac{1}{2}\hat{I}(\vec{k}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\hat{Q}(\vec{k})\cos 2\theta_k + \hat{U}(\vec{k})\sin 2\theta_k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2}(-\hat{Q}(\vec{k})\sin 2\theta_k + \hat{U}(\vec{k})\cos 2\theta_k) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

偏光 E モード  $\hat{E}(\vec{k})$ 、B モード  $\hat{B}(\vec{k})$  を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\hat{J}'(\vec{k}) &= \frac{1}{2}\hat{I}(\vec{k}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\hat{E}(\vec{k}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2}\hat{B}(\vec{k}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

E・B モードは、波数ベクトルを  $x$  軸と一致させた時の基底

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のそれぞれの係数であり、座標系の取り方に任意性は無い。つまり E・B モードは座標系に依存しない物理量である。二つの式を比較することから E、B モードとストークスパラメータの間の以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned}\hat{E}(\vec{k}) &= \hat{Q}(\vec{k})\cos 2\theta_k + \hat{U}(\vec{k})\sin 2\theta_k \\ \hat{B}(\vec{k}) &= -\hat{Q}(\vec{k})\sin 2\theta_k + \hat{U}(\vec{k})\cos 2\theta_k\end{aligned}\tag{2.56}$$

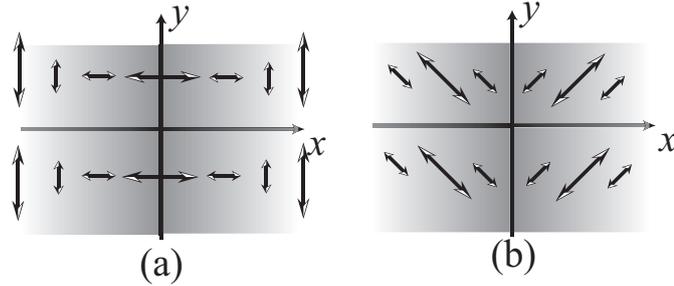


図 2.8 単一波数の平面波モードのみの場合の偏光 E・B モードの偏光パターン: (a)E モード  $Q_0 > 0, U_0 = 0$ , (b)B モード  $Q_0 = 0, U_0 > 0$ .

これらの式から coherency matrix の内直線偏光に関わる部分は座標系を一回転すると 2 回元に戻る物理量即ちスピンの 2 の物理量であることもわかる。

以上のように E・B モードはフーリエ波数空間で定義されるものである。しかし、実空間での各モードの偏光パターンを図示することは、具体的イメージを持つ上で役にたつ。そこで幾つかの基本的例について実空間での偏光パターンを図する。波数  $\vec{k} = (k, 0)$  の単一のモードのみ存在する場合を考える。この場合  $\theta_k = 0$  である。ここで  $Q(x, y) = Q_0 \cos kx, U(x, y) = U_0 \sin kx$  の場合を考える。式 (2.56) をフーリエ逆変換することで E・B モードの空での分布が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} E(x, y) &= Q(x, y) = Q_0 \cos kx \\ B(x, y) &= U(x, y) = U_0 \sin kx \end{aligned}$$

Pure E モードの場合は  $B = 0$  であり、即ち  $U = 0, Q \neq 0$  である。同様に Pure B モードの場合は  $E = 0$  であり、即ち  $Q = 0, U \neq 0$  である。これらを元にそれぞれについて偏光パターンを図示する。

式 (2.56) の両辺に  $-k^2$  を掛け  $k_x = k \cos \theta_k, k_y = k \sin \theta_k$  を用いると次の式を得る。

$$-k^2 \hat{E}(\vec{k}) = (-k_x^2 + k_y^2) \hat{Q}(\vec{k}) - 2k_x k_y \hat{U}(\vec{k})$$

## 2.17 Eモード・Bモード偏光

$$-k^2 \hat{B}(\vec{k}) = 2k_x k_y \hat{Q}(\vec{k}) + (-k_x^2 + k_y^2) \hat{U}(\vec{k})$$

フーリエ逆変換の定義より以下の式をそれぞれの物理量のフーリエスペクトルと空間分布は以下の関係で結ばれる。

$$E(x, y) = \int d^2k \hat{E}(\vec{k}) e^{-i(k_x x + k_y y)}$$

$$B(x, y) = \int d^2k \hat{B}(\vec{k}) e^{-i(k_x x + k_y y)}$$

$$Q(x, y) = \int d^2k \hat{Q}(\vec{k}) e^{-i(k_x x + k_y y)}$$

$$U(x, y) = \int d^2k \hat{U}(\vec{k}) e^{-i(k_x x + k_y y)}$$

これらから以下の式を得る

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)E(x, y) = D_x Q(x, y) + D_y U(x, y)$$

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)B(x, y) = -D_y Q(x, y) + D_x U(x, y)$$

ここで

$$D_x \equiv \partial_x^2 - \partial_y^2$$

$$D_y \equiv 2\partial_x \partial_y$$

偏光ベクターを  $\vec{P} = (Q, U, 0)$  のようにストークスパラメータの  $Q$  を  $x$  成分に  $U$  を  $y$  成分に持つベクトルとして定義する。また、勾配ベクトルを  $\vec{D} = (D_x, D_y, 0)$  のように演算子  $D_x, D_y$  を成分に持つ微分演算子として導入する。これらのベクトルの  $z$  成分は以下の議論の理解を助けるために付け足したものであり無くても問題がない。これらを用いると至る所で  $B = 0$  の E モードのみ存在する場合は、

$$\vec{D} \times \vec{P}_E = 0 \quad (2.57)$$

を満たす場合と言い換えることができる。この事から E モードの偏光ベクトルは以下のようにスカラーポテンシャル  $\Phi_E$  の勾配で書けることがわかる。

$$\vec{P}_E = \vec{D}\Phi_E \quad (2.58)$$

この関係式の静電場の場合との類似からこの偏光モードを E モード (electric mode) と呼ぶのである。同様に  $E = 0$  で B モードのみ存在する場合は、

$$\vec{D} \cdot \vec{P}_B = 0 \quad (2.59)$$

を満たす場合と言い換えることができる。この事から B モードの偏光ベクトルは以下のようにベクトルポテンシャル  $\vec{A}_B = (0, 0, \Phi_B)$  の回転で書けることがわかる。

$$\vec{P}_B = \vec{D} \times \vec{A}_B \quad (2.60)$$

この関係式の静磁場の場合との類似からこの偏光モードを B モード (magnetic mode) と呼ぶのである。図 2.8 に示した例は、 $\Phi_E = -Q_0/k^2 \cos kx$ ,  $\Phi_B = U_0/k^2 \sin kx$  の場合である。

E・B モードの偏光パターンを示す典型的なもう一つの例として  $\Phi_E = 1/r$ ,  $\Phi_B = 1/r$  のそれぞれの場合を考える。ここで  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  である。ポテンシャルからそれぞれのモードを計算する式 (2.58), (2.60) にこれらを代入することで次の結果を得る。E モードに対して

$$\begin{aligned} Q_E &= D_x \Phi_E = \frac{3(x^2 - y^2)}{r^5} \\ U_E &= D_y \Phi_E = \frac{6xy}{r^5} \end{aligned} \quad (2.61)$$

この結果を図 2.9 に示した。B モードに対して

$$\begin{aligned} Q_B &= D_y \Phi_B = \frac{6xy}{r^5} \\ U_B &= -D_x \Phi_B = -\frac{3(x^2 - y^2)}{r^5} \end{aligned} \quad (2.62)$$

この結果を図 2.10 に示した。

2.17 Eモード・Bモード偏光

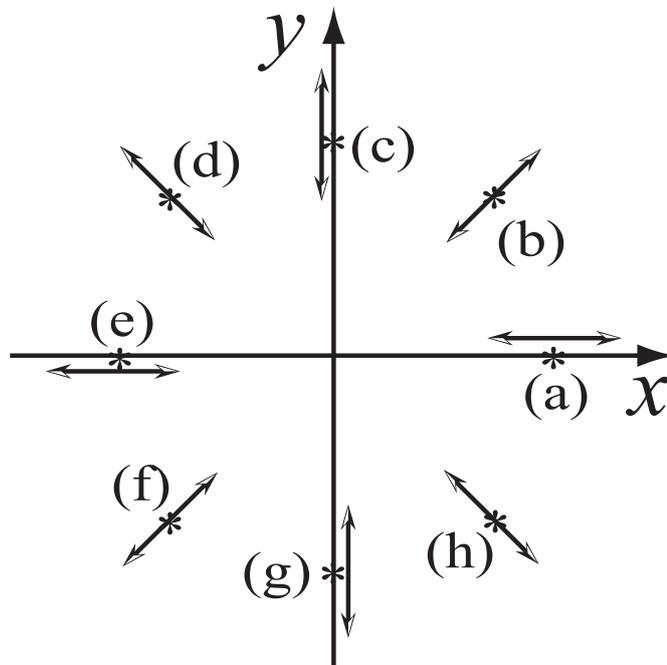


図 2.9 式 (2.61) で示した例の E モードの偏光パターン。図中各点での  
 ストークスパラメータの値は以下の通り (a) $Q_E > 0, U_E = 0$ , (b) $Q_E =$   
 $0, U_E > 0$ , (c) $Q_E < 0, U_E = 0$ , (d) $Q_E = 0, U_E < 0$ , (e) $Q_E >$   
 $0, U_E = 0$ , (f) $Q_E = 0, U_E > 0$ , (g) $Q_E < 0, U_E = 0$ , (h) $Q_E =$   
 $0, U_E < 0$ 。

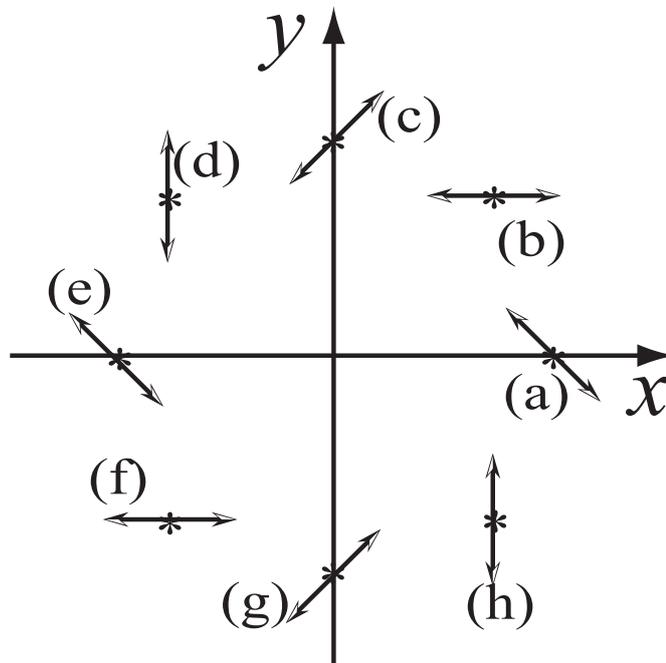


図 2.10 式 (2.62) で示した例の B モードの偏光パターン。図中各点での  
 ストークスパラメータの値は以下の通り (a) $Q_B = 0, U_B > 0$ , (b) $Q_B <$   
 $0, U_B = 0$ , (c) $Q_B = 0, U_B < 0$ , (d) $Q_B > 0, U_B = 0$ , (e) $Q_B =$   
 $0, U_B > 0$ , (f) $Q_B < 0, U_B = 0$ , (g) $Q_B = 0, U_B < 0$ , (h) $Q_B >$   
 $0, U_B = 0$ 。

## 第3章

# トムソン散乱

この章では、自由電子による電磁波の散乱の基礎であるトムソン (J.J.Thomson) 散乱について学ぶ。トムソン散乱に入る前に散乱問題の基礎であるラザフォード散乱についてまず復習する。

### 3.1 ラザフォード散乱

陽子による電子の散乱の問題を考える。陽子は、電子より 1840 倍質量が重いので以下では陽子は重心に静止しているとする。電子の運動方程式は以下のように書ける。

$$m_e \frac{dv_x}{dt} = -\frac{e^2 x}{r^3}, m_e \frac{dv_y}{dt} = -\frac{e^2 y}{r^3}$$

無限遠での電子の初速度を  $V_0$ 、衝突パラメータを  $b$  とする。中止力場中での運動なので角運動量保存が成り立つ。極座標表示を用いて粒子の位置を表すと、方位角  $\psi$  の運動方程式は角運動量保存則を用いて以下のように書ける。

$$m_e r^2 \dot{\psi} = -m_e b V_0 \rightarrow \dot{\psi} = -\frac{V_0 b}{r^2}$$

散乱角を  $\theta$  とすると散乱後の漸近的速度は  $(V_0 \cos\theta, -V_0 \sin\theta)$  と書ける。角運動量保存則を用いて  $x$  方向の運動方程式を  $t$  の微分から  $\psi$  の微分に書

き換えそれを積分すると

$$\int_{V_0}^{V_0 \cos \theta} dv_x = -\frac{e^2}{m_e V_0 b} \int_{\pi}^{-\theta} d\psi \cos \psi$$

$$\frac{m_e V_0^2 b}{e^2} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \cot \frac{\theta}{2}$$

ここで入射電子の無限遠での角度は  $\psi = \pi$  であり、散乱後は  $\psi = -\theta$  であることを用いた。入射電子の個数密度を  $n$  とする入射個数フラックスは  $I = nV_0$  である。微小面積要素  $bd\phi|db|$  に単位時間に入射した電子の数は、 $nV_0 bd\phi|db|$  である。散乱によって  $\phi$  は変化しないので、これは角度  $\theta, \phi$  の方向を中心とした微小立体角  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  の中に散乱されて出て行く電子の数と等しい。ここで  $d\theta$  は以下の式で与えられる。

$$db = -\frac{e^2}{2m_e V_0^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

ここでマイナス符号がつくのは、衝突パラメータが大きくなると散乱角  $\theta$  が小さくなることを反映している。以下ではこれらの絶対値をとって大きさのみ扱う。以上から以下の式を得る。

$$nV_0 bd\phi|db| = \frac{nV_0}{2} \left( \frac{e^2}{m_e V_0^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta d\phi$$

$$= nV_0 \frac{1}{4} \left( \frac{e^2}{m_e V_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega$$

微分散乱断面積を入射個数フラックス  $I$  を用いて以下の式で定義する。

$$I \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} \equiv I \frac{bd\phi|db|}{d\Omega}$$

以上のことから微分散乱断面積が以下のようにもとまる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left( \frac{e^2}{m_e V_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

散乱角が  $\pi/2$  以上のときは、粒子は入射電子の方向に戻ってくるので、この場合を激しく散乱された場合と考え大角度散乱の条件とする。 $b$  と  $\theta$  の関係から  $\theta > \pi/2$  のとき  $b < e^2/m_e V_0^2$  である。これは  $m_e V_0^2 \leq e^2/b$  と

### 3.2 トムソン散乱

も書ける。左辺は無限遠での電子の運動エネルギーを表し、右辺は陽子に最も近づいたときのクーロンポテンシャルエネルギーである。この式は、電子の無限遠での運動エネルギーが最も近づいたときのクーロンエネルギーより小さいと陽子のクーロン力の影響が大きく現われ、大角度散乱が起きる、ということの意味している。また、 $b \rightarrow 0$  で  $\theta \rightarrow \pi$  である。以上から、電子の大角度散乱の全断面積は、

$$\sigma = \frac{1}{4} \left( \frac{e^2}{m_e V_0^2} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\theta = \pi \left( \frac{e^2}{m_e V_0^2} \right)^2$$

となる。最後の式の括弧の中は、丁度  $\pi/2$  散乱されるときに衝突パラメータであり、電子にとって陽子は、これを半径とした円盤的であることを意味している。

断面積についておさらいする。全断面積とは衝突時の的の面積の大きさを表している。微分断面積は、 $(d\sigma/d\Omega)d\Omega$  で入射フラックスが1のとき、角度  $\theta, \phi$  の方向を中心とした微小立体角  $d\Omega$  の中に散乱されて出て行く電子の数を与える。ランダムに粒子を投げ込んだとき、ある方向に散乱されて出てくる確率に比例した量と考えることもできる。

### 3.2 トムソン散乱

自由電子による電磁波の散乱を考察する。直線偏光した単色（周波数  $\omega_0$ ）の電磁波が自由電子に入射すると電子を揺らす。電子の速度が非相対論的  $u \ll c$  の場合を考える。この場合、磁場によるローレンツ力を無視できる。電子の運動方程式は

$$m_e \ddot{\vec{r}} = -e\vec{\epsilon} E_0 \cos\omega_0 t \quad (3.1)$$

$\vec{\epsilon}$  は電磁波の偏光ベクトルである。 $\vec{d} = -e\vec{r}$  がこの系の双極子モーメントとなる。運動方程式から以下の式を得る。

$$\ddot{\vec{d}} = \frac{e^2 E_0}{m_e} \vec{\epsilon} \cos\omega_0 t \quad (3.2)$$

電磁波が入射したことにより双極子モーメントの時間二階微分が生じる。したがって、この電子は電磁波を放射する。

以下では、電子によって放射された波（二次波）を電子による散乱波と考えて散乱断面積を導出する。放射波強度の時間平均を考える。ここで時間平均とは、電磁波の一周期  $T$  にわたる平均と考えてもよいし、周期より十分長い時間  $T$  にわたる平均と考えてもよい。長時間平均の方が実際の観測で行われる操作と近いのでここでは長時間平均と考えて扱う。単位立体角辺りの放射強度の長時間平均は、式 (2.42) に式 (3.2) を代入することで以下のように求まる。

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{4\pi c^3} \left( \frac{e^2 E_0}{m_e} \right)^2 \sin^2 \Theta \cos^2 \omega_0 t \sim \frac{1}{8\pi c^3} \frac{e^4 E_0^2}{m_e^2} \sin^2 \Theta$$

全放射強度は、

$$\langle P \rangle = \int d\Omega \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^4 E_0^2}{3m_e^2 c^3}$$

となる。一方入射電磁波のエネルギーフラックスはポインティングベクトルで与えられ、その時間平均は以下のようにもとまる。

$$\langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{c}{4\pi} E_0^2 \cos^2 \omega_0 t \sim \frac{c}{8\pi} E_0^2$$

ラザフォード散乱にならって微分散乱断面積は以下のように定義できる。

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \langle S \rangle \frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}$$

この式は、両辺を光子一個当たりのエネルギー  $\hbar\omega$  で割って光子の数にし、 $d\Omega$  を掛けると理解しやすい。左辺が、角度  $\theta, \phi$  の方向の微小立体角  $d\Omega$  に散乱されて出て行く単位時間あたりの光子の数であり、右辺が微小面積  $(d\sigma(\Theta)/d\Omega)d\Omega$  に入射した光子の数となる。したがって、微分散乱断面積は以下のようにもとまる。

$$\left( \frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} \right) = \frac{e^4}{m_e^2 c^4} \sin^2 \Theta = r_0^2 \sin^2 \Theta \quad (3.3)$$

ここで  $r_0 = e^2/m_e c^2 = 2.82 \times 10^{-13} \text{cm}$  は古典電子半径と呼ばれる量で

### 3.2 トムソン散乱

---

あり、電子が作る電場の自己エネルギー  $e^2/r_0$  が質量エネルギー  $m_e c^2$  と等しいとすることで決まる電子の大きさである。これから全散乱断面積が以下のようにもとまる。

$$\sigma_T = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta r_0^2 \sin^2\theta d\theta = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 0.665 \times 10^{-24} \text{cm}^2$$

これをトムソン散乱の全断面積 (Thomson cross section) と呼ぶ。ラザフォード散乱の入射電子の速度を光速  $c$  で置き換えた断面積とほぼ一致している。

トムソン散乱の特徴をまとめる。

- 1 断面積は入射電磁波の周波数に依存しない。
- 2 散乱波の周波数は入射波の振動数と等しい。また、断面積の導出方法から明らかなように入射波の全エネルギーと散乱波の全エネルギーは等しい。すなわち、トムソン散乱は弾性散乱であり、電磁波のエネルギーが散乱前後で保存、言い換えるとフォトン数と各々のフォトンのエネルギーを散乱前後で保存する。

3 入射波が  $\vec{\epsilon}$  方向に直線偏光している場合、散乱された電磁波は  $\vec{\epsilon}$ 、 $\vec{n}$  の作る平面内に電場がある直線偏光。

4 後方・前方散乱対象性 (Backward-Forward symmetry):  $\theta \rightarrow \theta + \pi$  にしても微分散乱断面積が変わらない。すなわち散乱されて入射波の進行方向に対して前方に出て行く光子数と後方に出て行く光子数が等しい。

特徴4は、散乱波の全運動量がゼロであることを意味している。しかし、入射波はある一定の方向から入ってきたとしているので有限の運動量を持っている。すなわち散乱前後で電磁波の運動量が保存していない。これは、電磁波による電子の運動方程式で磁場によるローレンツ力を無視したことに直接起因している。電磁波の運動量は磁場によって荷電粒子に伝えられる。このことはたとえば、式(3.1)に従って運動を始めた電子に対する電磁波の磁場の効果を調べれば分かるので読者は試みるとよい。電磁波は電場で荷電粒子を揺らしてエネルギーを伝え、揺れだしたら磁場で押して運動量を伝えているのである。したがって、磁場の効果は無視した時点で

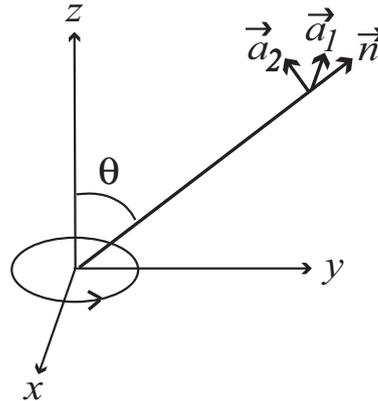


図 3.1 左回り円偏光の電子による散乱

電磁波の運動量の伝搬が無視されたことになっている。運動量保存まで考慮した取り扱い及びトムソン散乱の理論の適用限界についてはコンプトン散乱の章で扱う。

### 3.3 無偏光電磁波のトムソン散乱

無偏光の電磁波のトムソン散乱を考察する。無偏光を、右回り円偏光と左回り円偏光が同じ割合で位相がランダムに混合した状態として扱う。入射波の角振動数  $\omega$ 、進行方向を  $z$  軸正の方向とする。電磁波の入射前電子は  $z = 0$  で静止していたとする。

左回り円偏光の電子による散乱を扱う。電子の速度が非相対論的であるとして磁場による力を無視すると電子の運動方程式は以下ようになる。

$$m_e \frac{du_x}{dt} = -eE_0 \cos \omega t, m_e \frac{du_y}{dt} = -eE_0 \sin \omega t \quad (3.4)$$

$z$  軸となす角  $\theta$  の  $\vec{n}$  の方向に散乱される電磁波を考える。簡単の為に  $\vec{n}$  が  $yz$  平面内にあるとする。散乱波の偏光ベクトルを  $\hat{a}_1, \hat{a}_2$  とする。 $xyz$  方向の単位ベクトルをそれぞれ  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  とする。 $\hat{a}_1 = -\hat{x}$  とすると、

### 3.3 無偏光電磁波のトムソン散乱

$$\vec{a}_2 = -\hat{y}\cos\theta + \hat{z}\sin\theta, \vec{n} = \hat{y}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta$$

となる。これらを式 (2.45) に代入すると以下の結果を得る。

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{e^2 E_0}{Rm_e c^2} (\hat{a}_1 \cos\omega t + \hat{a}_2 \cos\theta \cos(\omega t - \pi/2)) \quad (3.5)$$

ここで物理量は自動的に遅延時間で求めることにして [] をはずした。この結果から前節と同様の手続きを経て微分散乱断面積、全断面積として以下の結果を得る。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} (\cos^2\theta + 1), \sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (3.6)$$

次に散乱波のストークスパラメータを求める。式 (3.5) より、 $\delta \equiv \delta_2 - \delta_1 = -\pi/2$

$$\begin{aligned} I_l &= \left(\frac{e^2 E_0}{Rm_e c^2}\right)^2 (\cos^2\theta + 1), & Q_l &= \left(\frac{e^2 E_0}{Rm_e c^2}\right)^2 (1 - \cos^2\theta) \\ U_l &= 0, & V_l &= -2 \left(\frac{e^2 E_0}{Rm_e c^2}\right)^2 \cos\theta \end{aligned} \quad (3.7)$$

これらから  $\Pi = 1$  が求まり、散乱波は完全偏光している。その偏光状態は、入射波の進行方向に対する散乱波の進行方向の角度によって以下のように変わる。 $\theta = 0$  のとき左廻り ( $V < 0$  より) 円偏光、 $0 < \theta < \pi/2$  左廻り ( $V < 0$  より) 楕円偏光、 $\theta = \pi/2$  直線偏光、 $\pi/2 < \theta < \pi$  右廻り ( $V > 0$  より) 楕円偏光、 $\theta = \pi$  右廻り ( $V > 0$  より) 円偏光。

同様のことを入射波が右回り円偏光であるときについて考察する。散乱波の輻射場が以下の式で与えられることが容易に理解できる。

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{e^2 E_0}{Rm_e c^2} (\hat{a}_1 \cos\omega t + \hat{a}_2 \cos\theta \cos(\omega t + \pi/2)) \quad (3.8)$$

$\delta = +\pi/2$  であるところだけが左回りの時との違いである。この結果から散乱断面積が式 (3.6) と同じになることが分かる。次にストークスパラメータは  $I_r = I_l$ ,  $Q_r = Q_l$ ,  $U_r = 0$ ,  $V_r = -V_l$  である。

無偏光の散乱は、分解した左回り円偏光と右回り円偏光それぞれの散乱波の非可干渉な重ね合わせである。よって無偏光の電磁波の散乱断面積は、それぞれの結果を足して 2 で割ったものであり、式 (3.6) が無偏光の電磁波

に対するトムソン散乱断面積を与える。完全偏光のときと同じ結果である。これは、もともと静止していた電子には、特別な方向は存在しないことから、どんな方向に偏光した電磁波に対しても同じように散乱することを反映した結果である。無偏光の電磁波の電子による散乱波のストークスパラメータは以下のように求まる。

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}(I_l + I_r) = I_l, & Q &= \frac{1}{2}(Q_l + Q_r) = Q_l, \\ U &= \frac{1}{2}(U_l + U_r) = 0, & V &= \frac{1}{2}(V_l + V_r) = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

したがって、無偏光の電磁波の散乱波は、直線偏光しておりその偏光度は定義式 (2.40) に代入することで以下のように与えられる。

$$\Pi = \frac{1 - \cos^2\theta}{1 + \cos^2\theta} \quad (3.10)$$

入射方向と平行な方向から見ると散乱波は無偏光、垂直な方向から見ると100%直線偏光している。このことは、入射波を  $\vec{n}$  と入射波の波数ベクトルが作る面内の偏光とそれに直行する偏光の二つの直線偏光に分解して考えると理解しやすい。 $\theta = \pi/2$  のとき、面内の偏光成分が電子を振動させる方向は観測者の視線方向と一致する。したがって、この振動による二次波は観測者には届かない。一方、これに垂直な偏光成分の散乱波は最大強度で届く。これらの非可干渉な重ね合わせの結果、100%直線偏光して観測される。 $\theta = 0$  のときは両方が同じ強度で観測されるので、入射波が無偏光なら散乱波も無偏光になる。

### 3.4 無偏光背景輻射場のトムソン散乱による偏光 E · B モードの生成

式 (2.45) と式 (3.2) から偏光ベクトル  $\vec{\epsilon}_{in}$  の方向に直線偏光した電子から見て  $\vec{n}$  方向から飛来した入射電磁波が自由電子によりトムソン散乱を受けた後電子から見て  $\vec{n}'$  方向に飛び去る散乱波の電場ベクトルは以下のように書ける。

### 3.4 無偏光背景輻射場のトムソン散乱による偏光 E・B モードの生成

$$R\vec{E}_{out}(\vec{n}') = \frac{1}{c^2} \vec{n}' \times (\vec{n}' \times \ddot{\vec{d}}) = r_0 E_{in}(\vec{n}) (\vec{n}' (\vec{n}' \cdot \vec{\varepsilon}_{in}) - \vec{\varepsilon}_{in}) \cos \omega_0 t \quad (3.11)$$

ここで  $r_0$  は古典電子半径、 $E_{in}$  と  $\omega_0$  は入射電磁波の電場の振幅と角振動数、 $R$  は電子から観測者までの距離である。散乱波の偏光ベクトルを  $\vec{\varepsilon}_{out}$  とすると以下のように書ける。

$$\vec{\varepsilon}_{out} = \frac{-\vec{\varepsilon}_{in} + (\vec{n}' \cdot \vec{\varepsilon}_{in}) \vec{n}'}{\sqrt{1 - (\vec{n}' \cdot \vec{\varepsilon}_{in})^2}}$$

これを用いると散乱波の振幅は以下のように書ける。

$$RE_{out}(\vec{n}') = r_0 E_{in}(\vec{n}) (\vec{\varepsilon}_{out}(\vec{n}') \cdot \vec{\varepsilon}_{in}(\vec{n})) \quad (3.12)$$

最後の係数  $(\vec{\varepsilon}_{out}(\vec{n}') \cdot \vec{\varepsilon}_{in}(\vec{n}))$  は、観測者から見た電子の振動方向が  $\vec{\varepsilon}_{out}$  であり、観測者から見た電子の振動の振幅が元々の電子の振動方向  $\vec{\varepsilon}_{in}$  の  $\vec{\varepsilon}_{out}$  への射影分だけ減少することを表している。式 (3.3) に  $\sin \Theta = \vec{\varepsilon}_{out}(\vec{n}') \cdot \vec{\varepsilon}_{in}(\vec{n})$  を代入することで  $\vec{n}$  方向から入射する電磁波が電子により  $\vec{n}'$  方向に散乱される場合の微分散乱断面積は以下のように書ける。

$$\frac{d\sigma(\vec{n}, \vec{n}')}{d\Omega} = r_0^2 (\vec{\varepsilon}_{out}(\vec{n}') \cdot \vec{\varepsilon}_{in}(\vec{n}))^2 \quad (3.13)$$

次に任意の方向  $\vec{n}$  から飛来した電磁波が原点に静止する電子に散乱されて  $\vec{n}'$  の方向に飛び去る場合について散乱波のストークスパラメータを求めよう。トムソン散乱で生成されるのは直線偏光のみであるので  $Q, U$  を計算すればよい。図 3.2 に原点に静止する電子への入射波の飛来方向  $\vec{n}$  と散乱波の進行方向  $\vec{n}'$  及びそれらの偏光ベクトルを図示した。ここでは簡単のため  $\vec{n}'$  を  $z$  軸と一致させるよう  $\vec{n}' = (0, 0, 1)$  ととった。観測者は散乱波の進行方向の延長線上即ち  $z$  軸上正の方向に存在する。観測される散乱波のストークスパラメータの計算の便宜上散乱波の偏光ベクトルを  $x, y$  軸に一致するよう  $\vec{\varepsilon}'_1 = (1, 0, 0), \vec{\varepsilon}'_2 = (0, 1, 0)$  と取った。入射波の二つの独立な偏光ベクトルは以下のようにとった。入射波の進行方向  $\vec{n}$  と散乱波の進行方向  $\vec{n}'$  が作る平面を入射平面と呼ぶ。図 3.2 のように、一つの偏光ベクトル  $\vec{\varepsilon}_1$  を入射平面内にとりもう一つ  $\vec{\varepsilon}_2$  を  $\vec{n}$  と  $\vec{\varepsilon}_1$  に直行する方向にとる。これ

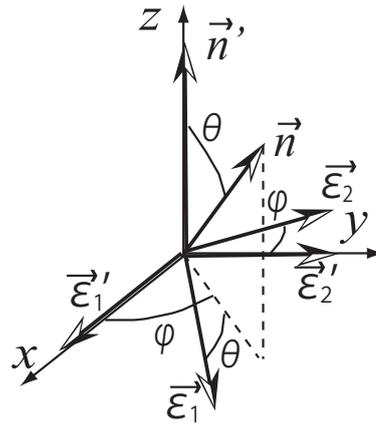


図 3.2 原点に静止する電子への入射波の飛来方向  $\vec{n}$  と散乱波の進行方向  $\vec{n}'$  及びそれらの偏光ベクトル。

らのベクトルの各成分は以下のように書ける。

$$\begin{aligned}\vec{n} &= (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \\ \vec{\varepsilon}_1 &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) \\ \vec{\varepsilon}_2 &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\end{aligned}$$

散乱波の振幅の  $x, y$  成分は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}RE_{out,x} &= r_0 E_{in} \vec{\varepsilon}'_1 \cdot (\vec{n}'(\vec{n}' \cdot \vec{\varepsilon}_{in}) - \vec{\varepsilon}_{in}) \\ &= -r_0 E_{in} \vec{\varepsilon}'_1 \cdot \vec{\varepsilon}_{in} \\ RE_{out,y} &= r_0 E_{in} \vec{\varepsilon}'_2 \cdot (\vec{n}'(\vec{n}' \cdot \vec{\varepsilon}_{in}) - \vec{\varepsilon}_{in}) \\ &= -r_0 E_{in} \vec{\varepsilon}'_2 \cdot \vec{\varepsilon}_{in}\end{aligned}$$

この結果は、散乱波の電場の各成分の振幅は入射波の電場によって引き起こされる電子の振動の振幅の各方向への射影の大きさに比例することを示している。

無偏光の入射輻射場が電子に散乱された結果生成されるストークスパラメータ  $Q, U$  を計算する式を導出する。無偏光入射電磁波を、各電磁波を偏光成分  $\vec{\varepsilon}_1$  と  $\vec{\varepsilon}_2$  の各成分に分解した時、そのアンサンブル平均が同じ大き

### 3.4 無偏光背景輻射場のトムソン散乱による偏光 E・B モードの生成

さ  $E_{in}$  を持つような互いの位相が独立で偏光方向がランダムな直線偏光の重ね合わせでモデル化する。即ち各要素電磁波は以下のような直線偏光で表され

$$\vec{E}_{in}(j) = E_{in} \cos \phi(j) \vec{\epsilon}_1 + E_{in} \sin \phi(j) \vec{\epsilon}_2 \quad (3.14)$$

無偏光電磁波はこれらの重ね合わせにより以下のように表される。

$$\vec{E}_{in} = \sum_j \vec{E}_{in}(j) \quad (3.15)$$

ここでの重ね合わせにおいて位相がランダムで偏光方向がランダムであることから

$$\vec{E} \sim 0 \quad (3.16)$$

且つ入射電磁波の振幅は以下のように書ける。

$$|\vec{E}_{in}|^2 = \sum_j |E_{in}|^2 (\cos^2 \phi(j) + \sin^2 \phi(j)) = N |E_{in}|^2 \quad (3.17)$$

以下では入射電磁波を要素に分解した時の要素波の数  $N$  で平均、つまり  $N$  で割った量を扱う。入射電磁波のフラックスはポインティングベクトルの長時間平均を使って以下のように計算される。

$$S_{in}(\vec{n}) = \frac{c}{8\pi} E_{in}^2 ((\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_1)^2 + (\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}_2)^2) = \frac{c}{4\pi} E_{in}^2$$

散乱波のストークスパラメータの単位時間あたり単位立体角あたりの振幅は次のように計算される。

$$\begin{aligned} \frac{dQ(\vec{n}', \vec{n})}{d\Omega'} &= \frac{c}{8\pi} r_0^2 E_{in}^2 ((\vec{\epsilon}'_1 \cdot \vec{\epsilon}_1)^2 + (\vec{\epsilon}'_1 \cdot \vec{\epsilon}_2)^2 - (\vec{\epsilon}'_2 \cdot \vec{\epsilon}_1)^2 - (\vec{\epsilon}'_2 \cdot \vec{\epsilon}_1)^2) \\ &= \frac{1}{2} S_{in}(\vec{n}) r_0^2 ((\vec{\epsilon}'_1 \cdot \vec{\epsilon}_1)^2 + (\vec{\epsilon}'_1 \cdot \vec{\epsilon}_2)^2 - (\vec{\epsilon}'_2 \cdot \vec{\epsilon}_1)^2 - (\vec{\epsilon}'_2 \cdot \vec{\epsilon}_1)^2) \\ \frac{dU(\vec{n}', \vec{n})}{d\Omega'} &= \frac{c}{8\pi} r_0^2 E_{in}^2 2((\vec{\epsilon}'_1 \cdot \vec{\epsilon}_1)(\vec{\epsilon}'_2 \cdot \vec{\epsilon}_1) + (\vec{\epsilon}'_1 \cdot \vec{\epsilon}_2)(\vec{\epsilon}'_2 \cdot \vec{\epsilon}_2)) \\ &= \frac{1}{2} S_{in}(\vec{n}) r_0^2 2((\vec{\epsilon}'_1 \cdot \vec{\epsilon}_1)(\vec{\epsilon}'_2 \cdot \vec{\epsilon}_1) + (\vec{\epsilon}'_1 \cdot \vec{\epsilon}_2)(\vec{\epsilon}'_2 \cdot \vec{\epsilon}_2)) \end{aligned}$$

これらに  $\vec{n}, \vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2$  の  $\theta, \varphi$  依存性を代入すると以下の式を得る。

$$\frac{dQ(\vec{n}', \vec{n})}{d\Omega'} = -\frac{1}{2} S_{in}(\vec{n}) r_0^2 (1 - \cos^2\theta) \cos 2\varphi$$

$$\frac{dU(\vec{n}', \vec{n})}{d\Omega'} = -\frac{1}{2} S_{in}(\vec{n}) r_0^2 (1 - \cos^2\theta) \sin 2\varphi$$

これを全方向から入射する入射波に対して足し合わせることで入射フラックスが任意の角度依存性を持つ場合について散乱波のストークスパラメータを求める式が以下のように求まる。

$$\frac{dQ(\vec{n}')}{d\Omega'} = - \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2} S_{in}(\vec{n}) r_0^2 (1 - \mu^2) \cos 2\varphi \quad (3.18)$$

$$\frac{dU(\vec{n}')}{d\Omega'} = - \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2} S_{in}(\vec{n}) r_0^2 (1 - \mu^2) \sin 2\varphi \quad (3.19)$$

これらの式から入射フラックスの角度依存性が四重極モーメントを持つ時のみ散乱波の偏光が生じることがわかる。ここで  $\mu \equiv \cos\theta$  である。

## 第 4 章

# プラズマ中の電磁波の 伝搬

天文学では、宇宙空間を伝搬してきた電磁波を観測する。電磁波が伝播する空間は真空では無く、電離した気体で満たされている。一般に荷電粒子と中性粒子で構成された準中性気体のことをプラズマと呼ぶ。そこでこの章では、プラズマ中を伝播する電磁波の基本事項を学ぶ。

詳細に入る前にエネルギーを色々な単位で換算した量をまとめる。エネルギーの単位  $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-12}\text{erg}$  は、 $k_B T$  に等しいとして温度に換算すると  $11600\text{K}$  であり約 1 万度で、 $= h\nu$  として周波数に換算すると  $240\text{THz}$  であり、波長にすると  $1.25\mu(12500\text{\AA})$  であり約 1 ミクロンで近赤外線に対応する。

### 4.1 Plasma

Plasma の語源はギリシャ語で「鋳型に入れて作られたもの」という意味の言葉である。元々、核融合実験等高温ガスを容器に閉じ込める事で得られたのでその様な名前がついたのであろう。しかし、プラズマの大きな特徴は、協調的振舞い (plasma collective phenomenon) と呼ばれるあたかも皆で示し合わせたかのような集団的振る舞いをすることにある。まるでプラズマが意思を持っているかのように自発的に状況を調整して新たな状

態を作りあげる。従って、プラズマは「鋳型に入れて作られたもの」という言葉から受ける受身的な印象とは裏腹に、実際には非常に自発的な性質をもったものであり、このネーミングは本質を正しく捉えていないといえる。しかし、幸いにも多くの日本人にとってギリシャ語は遠い存在であり、プラズマという言葉から「鋳型に入れて作られたもの」という結びつきを連想することは稀であり、プラズマという言葉に対して真っ白である。我々にとっては、プラズマとはこれから勉強することが全てである。

プラズマの協調的振る舞いは、それが電離気体であることから来る。そこには中性気体では、現れない様々な変化に富んだ現象が現れる。このことからプラズマは、固体、液体、気体の物質の三態につぐ新たな第4の状態と言われることもある。

プラズマを特徴付ける量として以下の式で定義される  $\Gamma$  パラメータと呼ばれる物がある。

$$\Gamma \equiv \frac{e^2/a}{k_B T} \sim \frac{e^2 n^{1/3}}{k_B T}$$

ここで  $a$  は粒子の平均間隔であり粒子の数密度  $n$  と  $a = n^{-1/3}$  の関係にある。即ち  $\Gamma$  パラメータは、隣同士の粒子間のクーロンエネルギーと熱運動のエネルギーの比である。

$\Gamma \ll 1$  の場合を弱結合プラズマ呼ぶ。この場合、近接粒子のクーロン力が、粒子の熱運動に及ぼす影響は非常に小さいが、多数の粒子が集まって集団的現象を引き起こす。この条件を具体的に評価すると

$$n \ll \left( \frac{k_B T}{e^2} \right)^3 \sim 2 \times 10^{29} \left( \frac{T}{10^4 K} \right)^3 \text{ cm}^{-3}$$

となり、例えば宇宙空間に於ける代表的プラズマである星間空間の HII region ( $n_e \sim 0.03 \text{ cm}^{-3}$ ,  $T_e \sim 10^4 K$ ) や銀河団中高温ガス ( $n_e \sim 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ ,  $T_e \sim 10^8 K$ ) は弱結合プラズマであることが分かる。弱結合プラズマにおいて、電子のイオン(今は陽子のみとする)による散乱の平均自由行程を計算すると

$$\lambda_e = \frac{1}{\sigma n_p} \sim 10^{13} \left( \frac{n_p}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1} \left( \frac{T}{10^4 K} \right)^2 \text{ cm}$$

## 4.2 Debye-Hückel theory

---

となる。ここで電子の速度に熱速度  $\sqrt{k_B T_e / m_e} = 400(T/10^4 K)^{0.5} \text{ km/s}$  を代入した。これは、粒子間の平均距離  $n^{-1/3} = 1 \text{ cm}$  より圧倒的に長い。

従って、電子は多数の陽子とすれ違って初めて一回散乱されることになる。この為、 $n^{-1/3} \ll \ell \ll \lambda_e$  のように粒子間の平均間隔より圧倒的に長い平均自由行程よりずっと短いスケール  $\ell$  を考えることが可能になる。

このようなスケールでは、粒子間の衝突は無視できるが、多数の粒子により集団の効果は現れる。この様はスケールを扱うときプラズマを無衝突プラズマ (collisionless plasma) と呼ぶ。

一方  $\Gamma > 1$  の場合を強結合プラズマと呼び、代表例として レーザー核融合プラズマがある。

宇宙に於けるプラズマは元々電氣的に中性だった原子が電離して生成される。従って、電子によって持ち込まれる負の電荷量とイオンによって持ち込まれる正の電荷量は常に等しく、系全体で電氣的中性が保たれている。電氣的中性が破れると非常につよいクーロン力が発生して電氣的中性を復元する方向に電子に力が働き、直ちに電氣的中性が実現される性質をプラズマはもっている。この為局所的にも非常によい精度で電氣的中性が保たれている。プラズマのこの性質は charge neutrality condition と呼ばれている。

## 4.2 Debye-Hückel theory

電氣的に中性な無限に広がった電子・イオン弱結合プラズマ中に点電荷  $q_0$  を加えた時の静電場の様子を調べる。まず、真空中に点電荷  $q_0$  を加えた場合について考察する。Gauss's law から静電ポテンシャル  $\phi(\vec{r})$  は以下の方程式の解として以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\Delta\phi(\vec{r}) &= -4\pi q_0 \delta^3(\vec{r}) \\ \phi(\vec{r}) &= \frac{q_0}{r}\end{aligned}$$

統計力学によれば、温度  $T$  で粒子系では、粒子のエネルギーが  $E \sim E + dE$  の範囲にある確率は

$$P(E)dE \propto e^{-\frac{E}{k_B T}} dE$$

で与えられる。特に自由な非相対論的運動をしている粒子系では速度が  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \sim \vec{v} + d\vec{v} = (v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z)$  の範囲にある確率が以下のように書ける。

$$P(v)dv_x dv_y dv_z = \frac{1}{(2\pi k_B T/m)^{3/2}} e^{-\frac{mv^2/2}{k_B T}} dv_x dv_y dv_z : v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

電子が存在する領域の体積を  $V$  とし一様に分布しているとする。微小体積  $d^3x$  内に着目した一つの電子が存在する確率は  $P(v)d^3v d^3x/V$  である。

クーロンポテンシャルエネルギー  $-e\phi(\vec{r})$  が存在する時粒子のエネルギーは、

$$E = \frac{mv^2}{2} - e\phi(\vec{r})$$

ある位置  $\vec{r} \sim \vec{r} + d\vec{r}$  で速度が  $\vec{v} \sim \vec{v} + d\vec{v}$  の範囲の電子が見つかる確率は以下のようになる。

$$P(\vec{r}, \vec{v})d^3\vec{r}d^3\vec{v} = \frac{e^{-\frac{-m_e v^2/2 + e\phi(\vec{r})}{k_B T}}}{A} d^3\vec{r}d^3\vec{v}, A \equiv \int_V d^3\vec{r}d^3\vec{v} e^{-\frac{-m_e v^2/2 + e\phi(\vec{r})}{k_B T}}$$

$V \rightarrow \infty$  の極限を考え、無限遠方で  $\phi(\vec{r}) = 0$  とする。無限遠での電子の数密度を  $n_0$ 、任意の位置  $\vec{r}$  での電子の数密度  $n_e(\vec{r})$  とする。ある微小領域  $\vec{r} \sim \vec{r} + d\vec{r}$  に電子が存在する確率が  $n_e(\vec{r})d^3\vec{r}/N$ 、 $N \equiv \int_V d^3\vec{r}n_e(\vec{r})$  で与えられる。 $N$  は全体積に含まれる電子の数である。これは  $d^3\vec{r} \int d^3\vec{v} P(\vec{r}, \vec{v})$  に等しくなければならない。この関係式と無限遠での条件から電子密度が以下の式で与えられる。

$$n_e(\vec{r}) = n_{e0} e^{\frac{e\phi(\vec{r})}{k_B T}}$$

電子の密度は、一つの電子が各場所での単位体積に存在する確率に比例することを考えればこの式結果は自明であろう。ここで

## 4.2 Debye-Hückel theory

$$f(v, \vec{r}) = n_{e0} \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} e^{-\frac{(mv^2/2 - e\phi(\vec{r}))}{k_B T}}$$

で定義される関数  $f$  を電子の速度分布関数とよび、全速度空間での積分が各場所での電子数密度を与える。上述の電子数密度分布の結果を見ると Potential energy  $-e\phi$  の低い所に粒子が集まる事が分かる。無限遠では、電子と陽子の密度が等しいので陽子は  $n_p = n_{e0}$  で重いので殆ど動かず、至るところ一様に分布していると考えられる。今、弱結合プラズマを考えているので

$$\left| \frac{e\phi(\vec{r})}{k_B T} \right| \ll 1$$

の条件が成り立っている。この条件の下で電子の密度分布をテイラー展開すると以下の式を得る。

$$n_e(r) = n_{e0} e^{\frac{e\phi(\vec{r})}{k_B T}} \sim n_p \left[ 1 + \frac{e\phi(\vec{r})}{k_B T} \right]$$

以上から一様プラズマの原点に点電荷  $q_0$  を置いた時の Poisson 方程式は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\vec{r}) &= -4\pi q_0 \delta^3(\vec{r}) - 4\pi(en_p - en_e(r)) \sim -4\pi q_0 \delta^3(\vec{r}) + 4\pi en_p \frac{e\phi(\vec{r})}{k_B T} \\ \left[ \Delta - \frac{1}{\lambda_D^2} \right] \phi &= -4\pi q_0 \delta^3(\vec{r}) \\ \lambda_D &\equiv \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi e^2 n_p}} \sim 7 \times 10^2 \left( \frac{T}{10^4 \text{K}} \right)^{0.5} \left( \frac{n_{e0}}{1 \text{cm}^{-3}} \right)^{-0.5} \text{cm} \end{aligned}$$

ここで  $\lambda_D$  は Debye length と呼ばれる長さの次元をもった量である。上式の解は、以下のようなになる。

$$\phi = \frac{q_0}{r} e^{-r/\lambda_D}$$

この結果はプラズマの存在によって点電荷から Debye length 以上離れると静電ポテンシャルが急激に減少することを表している。これは、中心の電荷によるクーロン力の到達距離が  $r < \lambda_D$  に限られる、と言い換えることもできる。

この現象をより詳細に調べてみる。まず空間でのプラズマの全電荷を調べる。

$$\begin{aligned}
 \int_{+0}^{\infty} 4\pi r^2 dr e(n_p - n_e(r)) &= - \int_{+0}^{\infty} 4\pi r^2 dr 4\pi e^2 \frac{\phi(\vec{r})}{k_B T} \\
 &= - \int_{+0}^{\infty} r dr e^{-r/\lambda_D} q_0 \frac{4\pi n_{e0} e^2}{k_B T} \\
 &= - \int_{+0}^{\infty} \frac{r}{\lambda_D} d\frac{r}{\lambda_D} q_0 e^{-r/\lambda_D} \\
 &= -q_0
 \end{aligned}$$

となり丁度中止に置いた点電荷が持ち込む電荷を打ち消す量になっている。元々電気的中性が保たれていたプラズマから全電荷が  $-q_0$  が発生したようにみえることが気になる人は、中心の電荷  $q_0$  をイオンの一部を中心に集めて作ったものと考えればよいであろう。中心にできた電荷の偏りを電子の分布に一樣分布から偏りが出来ることで打ち消して遠方にいる観測者にとっては電気的中性が保たれるようになっている。この電荷の遮蔽現象を Debye shielding と呼ぶ。デバイ波長は電子の平均間隔よりは十分長く、その内に入っている電子の数は

$$A_c \equiv n_e \lambda_D^3 \sim 4 \times 10^6$$

で非常に大きい。これから電荷の遮蔽現象は非常に多数の電子によって行われている事が分かる。一方、デバイ波長は、電子の平均自由行程と比べると十分短く Debye shielding を引き起こす電子の電子同士或いはイオンとの衝突は無視できることが分かる。は無衝突プラズマの特徴的現象であることが分かる。例えば  $q_0 > 0$  の場合を考える。この時、 $\phi > 0$  なので中心部に電子が偏って分布していることになる。これは以下のようにして起きる。中心に電荷が無いときは直進していた電子の軌道が電荷の存在により中心に引き付けられ軌道が少し曲がる。軌道の変化が少量であることは、弱結合プラズマであることから保証される。一つの電子の軌道の変化による遮蔽効果は非常に小さいが、多数の電子に同様の軌道の変化が起きる事でデバイ波長程度はなれると中心においた電荷がほぼ遮蔽されるのである。これが無衝突なのに個々の電子が協調的に振る無い集団で一つの現象を引

### 4.3 冷たい等方プラズマ中の電磁波の伝搬

き起こすプラズマ現象の典型的な例である。

最後に弱結合プラズマの条件をデバイ波長を用いて書き換えておく。粒子間の静電ポテンシャルと熱運動エネルギーの比は

$$\Gamma = \frac{e^2 n_{e0}^{1/3}}{3/2 k_B T} \sim \frac{1}{(n_{e0} \lambda_D^3)^{2/3}} = \frac{1}{\Lambda_c^{2/3}} \\ \sim \left( \frac{\lambda_D}{\lambda_e} \right)^{2/3}$$

この式からもプラズマが弱結合であるという事と Debye shielding に関わる電子の数が多数であることが関係していること又デバイ波長のスケールではプラズマは無衝突プラズマとして扱えることが分かる。

Debye-Hueckel の理論のデバイ波長を  $\pi$  中間子のコンプトン波長で  $q_0$  を強い力のチャージに置き換えると、強い力のポテンシャルが得られる。 $\lambda_D \rightarrow \check{\lambda}_\pi = \frac{\hbar}{m_\pi c} \sim 1\text{fm}$ ,  $q_0 \rightarrow q_{\text{strong}}$  これは湯川秀樹によって初めて提案された理論であり、その事によって

$$\phi = \frac{q_0}{r} e^{-r/\lambda_D}$$

の型のポテンシャルが有名になった為、この型のポテンシャルを湯川ポテンシャル或いは湯川型と呼ぶこともある。

### 4.3 冷たい等方プラズマ中の電磁波の伝搬

冷たい（熱運動が無視できる）一様等方なプラズマ中の電磁波の伝搬を考える。宇宙空間のプラズマは殆どの場合、近接する粒子間のクーロンポテンシャルと比べて粒子の運動エネルギーが圧倒的に大きい状態、しなわち弱結合プラズマである。ここでの設定は一見強結合プラズマを仮定しているように見えるが、得られる結果は弱結合プラズマ中を伝搬する電磁波の性質を正しく現している。任意の電磁波は二つの直行する直線偏光に分解できる。そこで以下では、一つの方向に直線偏光した電磁波の伝搬を考える。系には特徴的な方向が無いので、任意の電磁波の伝搬はこの結果の重ね合わせで表現できる。電磁波を注入する前では、電場、磁場、電子の速度、電

流はゼロである。これらは電磁波が入射したことによる摂動量としてのみ有限値をとる。マクスウェル方程式及び電子の運動方程式を摂動量の1次まで展開し線形化して解く。線形方程式の解は、一次独立な固有解の重ね合わせで表現できる。したがって、一つのフーリエモードを取り出してその性質を調べれば十分である。

$$\begin{aligned}\vec{E}, \vec{B}, \vec{v}, \vec{j}, \rho &\propto e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \vec{j} &= \vec{j}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}\end{aligned}$$

の様に摂動量を展開する。これらをマクスウェル方程式、粒子の運動方程式に代入すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned}i\vec{k} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho & i\vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \\ i\vec{k} \times \vec{E} &= \frac{i\omega}{c}\vec{B} & i\vec{k} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} - \frac{i\omega}{c}\vec{E} \\ \vec{v} &= \frac{e}{i\omega m_e}\vec{E}\end{aligned}$$

電流密度が  $\vec{j} = -en_e\vec{v}$  で与えられること及び電磁波が横波である為  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$  である事を用いて、上記の結果を変形すると最終的に以下の分散関係式を得る。

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_{pe}^2 \quad (4.1)$$

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}} = 10^4 \left(\frac{n_e}{0.03}\right)^{1/2} \text{ Hz} \quad (4.2)$$

$$\nu_{pe} = \frac{\omega_{pe}}{2\pi} = 3 \left(\frac{n}{10^5 \text{ cm}^{-3}}\right)^{0.5} \text{ MHz} \quad (4.3)$$

これが冷たいプラズマ中を伝播する電磁波の分散関係式である。 $\omega_{pe}$  は電子プラズマ振動数と呼ばれる量で、電磁波の注入により生じた電荷分布の偏りで生じた電場による復元力による振動の振動数である。これは注入した波の振動数に依存せず、プラズマの電子密度のみに依存していることが特徴である。得られた分散関係式を更に変形すると以下の式を得る。

### 4.3 冷たい等方プラズマ中の電磁波の伝搬

$$\frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} = c \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}}}, \quad n = \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} \quad (4.4)$$

$c/n$  はプラズマを伝搬する電磁波の位相速度であり、 $n$  はプラズマの屈折率である。したがって、プラズマは屈折率が1以下であり、位相速度が光速を越える媒質である。 $\omega < \omega_{pe}$  の低周波数の電磁波の時、 $k$  が虚数になる。このことは、このような低周波の電磁波はプラズマ中を伝播できず、外部からプラズマに入射させた場合表面で反射されることになる。 $\omega \ll \omega_{pe}$  のとき、電磁波は表面からプラズマに  $c/\omega_{pe}$  程度の深さ進入して反射される。そこで  $c/\omega_{pe}$  の事を進入長 (penetration length) と呼ぶ。プラズマは、摂動を与えると固有なプラズマ振動数で振動する性質があり、それよりユックリ振動することができず、プラズマ振動数以下の振動数の電磁波を伝搬することが出来ないことを示している。たとえば、地球高層大気に存在する電離層の電子密度  $n = 10^5 \text{ cm}^{-3}$  を代入するとプラズマ振動数は3 MHz程度になる。したがって、3MHz以下の低周波の電磁波を宇宙に向けて放射すると電離層底面で反射される。このことを積極的に利用して、地球の裏側との交信に使われたこともある。

プラズマ中の電磁波による情報伝搬について以下議論する。情報伝搬の速度は以下の群速度で与えられる。

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} \sim c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)$$

最後の式は、 $\omega \gg \omega_{pe}$  として展開した。この結果を用いて、天体から発せられたパルスの観測者への到達時間  $t_p$  を考える。

$$t_p = \int_0^d \frac{ds}{v_g} \sim \frac{d}{c} + (2c\omega^2)^{-1} \int_0^d \omega_{pe}^2 ds = \frac{d}{c} + \frac{2\pi e^2}{m_e c \omega^2} \int_0^d n_e ds$$

最後の式の第二項がプラズマの存在によるパルス到達の遅れを表わす。そこでこの部分を以下のように表わす。

$$\Delta t_p = \frac{2\pi e^2}{m_e c \omega^2} DM, DM \equiv \int_0^d n_e ds \quad (4.5)$$

$DM$  は  $\text{pc cm}^{-3}$  という単位で表され、ディスパージョンメジャー (The dispersion measure) と呼ばれる。これは、 $1\text{cm}^{-3}$  のプラズマ中を  $DM$  pc 走ったことを表す量である。プラズマの電子密度が既知の場合、時間遅れを測定して  $DM$  を測り、天体までの距離の測定を行う。時間遅れが電磁波の周波数の二乗に逆比例することを利用して複数の周波数でのパルスの到達時間を測定することで、 $DM$  を測定する。

星間物質の電子密度の揺らぎによって屈折角に揺らぎが生じる。天体の大きさが非常に小さいときは天体から異なる方向に発せられた光線が観測者の位置で再び交差し干渉縞を作る。この干渉縞の中を地球の公転運動等により地球が運動することで天体の見かけの強度が強くなったり弱くなったりする。この現象をシンチレーション (Scintillation) と呼ぶ。この現象は、非常に小さな天体の大きさを制限する方法として有効である。最近では、星間物質のシンチレーションを用いてガンマ線バーストの膨張速度の決定した仕事がある。

#### 4.4 磁場を伴うプラズマ中の電磁波の伝搬：ファラデー回転

プラズマに外場としての磁場  $\vec{B}_0$  が存在する時、この磁場に沿った電磁波の伝搬を考える。外場として磁場があると磁場の方向が特別な方向になる。したがって、非等方プラズマとなる。

電磁波の複素数表示を行う。 $\vec{n}$  は電磁波の進行方向を表す単位ベクトル。互いに直行する偏光ベクトル  $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2$  を  $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{n}$  の順で右手系をなすように定義する。これらは互いに直行する単位ベクトルである。 $\vec{n}$  は電磁波の進行方向を表す単位ベクトル。実数部が実際の成分を表すと約束して式 (2.35) で表わされた一般の電場は以下のように書ける。

$$\vec{E} = a_1 \vec{\epsilon}_1 + a_2 e^{-i\delta} \vec{\epsilon}_2 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_1)} \quad (4.6)$$

$a_1, a_2$  は実数。ストークスパラメータの  $I$  は、 $\vec{E} \cdot \vec{E}^*$  で計算出来る。ただし、 $*$  は復素共役をとれという意味である。

#### 4.4 磁場を伴うプラズマ中の電磁波の伝搬：ファラデー回転

円偏光の場合  $a_1 = a_2 = E_0$ 。右廻り円偏光のとき  $\delta = \pi/2$  なので

$$\vec{E} = \sqrt{2}E_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_1)} \vec{\epsilon}_- \quad (4.7)$$

$$\vec{\epsilon}_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\epsilon}_1 - i\vec{\epsilon}_2) \quad (4.8)$$

左廻りの時  $\delta = -\pi/2$  なので

$$\vec{E} = \sqrt{2}E_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_1)} \vec{\epsilon}_+ \quad (4.9)$$

$$\vec{\epsilon}_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\epsilon}_1 + i\vec{\epsilon}_2) \quad (4.10)$$

と書ける。ここで  $\vec{\epsilon}_+$ ,  $\vec{\epsilon}_-$  はそれぞれ電磁波の helicity が正、負のときの円偏光の偏光ベクトルである。これらは以下の式を満たす。

$$\vec{\epsilon}_+ \cdot \vec{\epsilon}_+^* = 1, \quad \vec{\epsilon}_+ \cdot \vec{\epsilon}_-^* = 0 \quad (4.11)$$

$$\vec{\epsilon}_- \cdot \vec{\epsilon}_+^* = 0, \quad \vec{\epsilon}_- \cdot \vec{\epsilon}_-^* = 1 \quad (4.12)$$

$$\vec{\epsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\epsilon}_+ + \vec{\epsilon}_-) \quad (4.13)$$

$$\vec{\epsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\vec{\epsilon}_+ - \vec{\epsilon}_-) \quad (4.14)$$

したがって、任意の電磁波の電場ベクトルは以下のように左右の円偏光に分解することができる。以下では、左回り及び右廻りに円偏光した電磁波の伝播を考えこれらの結果を後で重ねあわせることで任意の偏光の電磁波の伝播の様子を調べる。

$$\vec{E} = (E_+ \vec{\epsilon}_+ + E_- \vec{\epsilon}_-) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (4.15)$$

$$E_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 e^{-i\delta_1} - ia_2 e^{-i\delta_2}) \quad (4.16)$$

$$E_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 e^{-i\delta_1} + ia_2 e^{-i\delta_2}) \quad (4.17)$$

磁場に沿って進む左廻り電磁波がプラズマに入射したとしよう。 $\vec{B}_0 = B_0 \vec{n}$ ,  $\vec{E}(t, \vec{r}) = E_+ e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{\epsilon}_+$  と書ける。引き起こされる電子の運動の速度は光速より十分遅いとする。これから電磁波の磁場によるローレンツ力は無視できる。外部磁場の強度は電磁波の磁場の強度より圧倒的に強

いとす。電磁波は横波なので  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ 。電子の運動方程式とそれから得られる電子の速度は以下ようになる。

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}_0, -im_e\omega\vec{v} = -e\vec{E} - \frac{eB_0}{c}\vec{v} \times \vec{n}$$

$$\vec{v}_0 = \frac{eE_+}{im_e\omega}\vec{\varepsilon}_+ - i\frac{\omega_{ce}}{\omega}\vec{v}_0 \times \vec{n}, \omega_{ce} \equiv \frac{eB_0}{m_e c} = 17 \left( \frac{B_0}{1\mu\text{G}} \right) \text{Hz}$$

任意の3次元ベクトルである  $\vec{v}_0$  は、 $\vec{n}, \vec{\varepsilon}_+, \vec{\varepsilon}_-$  のそれぞれの直行成分に分解できる。 $\vec{n}$  の方向に力が働かないので、簡単のため  $\vec{n}$  方向の速度はゼロとする。次に  $\vec{\varepsilon}_+$  成分を求めるため、 $\vec{\varepsilon}_+$  との内積を取り変形すると以下の結果を得る。

$$\vec{v}_0 \cdot \vec{\varepsilon}_+^* = -\frac{ieE}{m_e(\omega - \omega_{ce})}$$

更に  $\vec{\varepsilon}_-$  成分を求める為、 $\vec{\varepsilon}_-$  との内積を取ると以下ようになる。

$$\vec{v}_0 \cdot \vec{\varepsilon}_-^* = 0 \quad (\omega \neq -\omega_{ce})$$

以上から  $\vec{v}$  と電流密度が以下のように書ける。

$$\vec{v}_0 = -i\frac{eE}{m_e(\omega - \omega_{ce})}\vec{\varepsilon}_+ \quad (4.18)$$

$$\vec{j}_0 = -en\vec{v}_0 = \frac{ine^2E}{m_e(\omega - \omega_{ce})}\vec{\varepsilon}_+ \quad (4.19)$$

この結果をマックスウェル方程式に代入して変形を進めると磁場に沿った方向に進む左回り円偏光電磁波の分散関係式を得る。

$$\omega^2 = c^2k^2 + \frac{\omega\omega_{pe}^2}{\omega - \omega_{ce}} \quad (4.20)$$

同様に右廻りの電磁波が入射した時電子の速度は以下のように書ける。

$$\vec{v}_0 = -i\frac{eE}{m_e(\omega + \omega_{ce})}\vec{\varepsilon}_- \quad (4.21)$$

この結果と左回り電磁波が伝搬するときとの結果から、電子は電磁波の電場ベクトルの回転方向と同じ方向に回転することがわかる。回転の速度は、電磁波が右廻りの時の方が左廻りの時より遅い。外部磁場による電子のサ

#### 4.4 磁場を伴うプラズマ中の電磁波の伝搬：ファラデー回転

イクロトン運動の回転方向は、左回り円偏光の電場の回転方向と同じであり電磁波の入射はサイクロトン運動を助ける方向に電子に力を及ぼす。一方、右回り円偏光の電場の回転方向はサイクロトン運動の回転方向と逆である。この事が回転速度の違いに現れていると解釈できる。右回り円偏光の分散関係式は以下ようになる。

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \frac{\omega \omega_{pe}^2}{\omega + \omega_{ce}} \quad (4.22)$$

ここまでの結果を波数ベクトルについて解くと以下の式を得る。

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{ce})}} \sim \frac{\omega}{c} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2 \left( 1 \pm \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right) \right] \quad (4.23)$$

最後の式変形では  $\omega \gg \omega_{ce}$  を仮定した。この結果から左回りの電磁波の波長が右回り電磁波より長くなることが分かる。磁場を伴ったプラズマの中を磁場に距離  $d$  進んだときの電磁波の位相の進みは右回り左回りそれぞれについて以下ようになる。

$$\phi_{\pm} = \int_0^d k_{\pm} ds$$

$k_+ < k_-$  より  $\phi_+ < \phi_-$  である。これは左回り電磁波の方が少ない位相の変化量でプラズマを抜けることを示しており、位相速度が大きいことを示している。電子をそのサイクロトン運動と同じ方向に回転させようとするため位相が早く進むが、右回り円偏光のときは逆に電子から抵抗を受け位相の進みが遅くなると解釈することができる。右回りと左回りの電磁波の位相の進みの差  $\Delta\phi \equiv \phi_- - \phi_+$  は、磁場の電磁波の進行方向成分  $B_{\parallel}$  を用いて以下のように書ける。

$$\Delta\phi = \frac{4\pi e^3}{m_e^2 c^2 \omega^2} \int_0^d n_e B_{\parallel} ds$$

プラズマに入射した電磁波がある方向に直線偏光していたとする。この時入射直前の電磁波について簡単のために  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ,  $a_1 = 0$  とする。すると入射電磁波は、以下のように書ける。

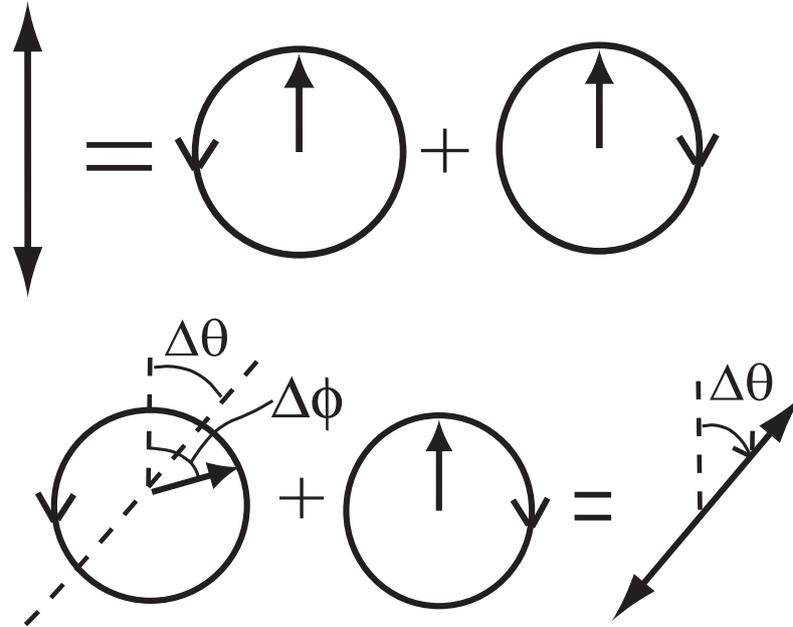


図 4.1 ファラデー回転による偏光面の回転

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2}i} a_2 (\vec{\epsilon}_+ - \vec{\epsilon}_-) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (4.24)$$

図から分かるようにプラズマ伝播後位相差が  $\phi$  ついたとき、偏光面は元の位置から時計回りに次の角度  $\Delta\theta$  だけ回転した直線偏光となる。

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \Delta\phi = \frac{2\pi e^3}{m_e^2 c^2 \omega^2} \int_0^d n_e B_{\parallel} ds = \text{RM} \lambda^2 \quad (4.25)$$

この偏光方向の回転をファラデー (Faraday) 回転と呼ぶ。ファラデー回転を特徴付ける量として以下のように定義されるローテンションメジャー (Rotation Measure)、RM、がある。RM ( $\text{rad m}^{-2}$ ) は、波長 1 m の電磁波が伝搬したとき、ファラデー回転による偏光方向の回転が RM ラディアンになるものとして定義される。

## 第 5 章

# 連続波放射過程の基礎

天体から放射される電磁波はそのスペクトルの特徴によって線放射 (line emission) と連続波放射 (continuum emission) に大別される。線放射の代表例は、原子に束縛された電子の束縛エネルギー準位間の遷移過程で放射される電磁波である。連続波放射の代表例は自由電子が加速度を受けた際に放射される電磁波である。この章では天体からの連続波放射の主な発生機構である、自由-自由放射 (free-free emission)、シンクロトロン放射、逆コンプトン散乱、チェレンコフ放射の基礎を学ぶ。ここで放射 (emission) とは一般に光子数の生成を伴う現象のことを指す言葉である。逆コンプトン散乱は光子数生成を伴わないので厳密には放射ではない。しかし、天体からの連続波スペクトル生成の主要機構の一つであるのでここでは一まとめにして扱う。

### 5.1 制動放射

この節では、自由な電子がイオンと衝突したとき電子が運動エネルギーの一部を電磁波として放射する過程について考察する。ただし、放射後も電子はイオンに束縛されず自由電子である場合に限定する。放射前後で電子は束縛されていない自由な状態なのでこの放射過程を自由-自由遷移放射 (Free-free emission) と呼ぶ。この過程は電子が減速 = 制動を受ける

ことで起きる放射なので制動放射とも呼ばれる。19世紀後半レントゲン(K.Röntgen)の時代にドイツで盛んに行われた陰極線の実験の過程で発見された放射なのでドイツ語で制動を表わす brems と光線の放射を表わす strahlen を合成したブレムスシュトラールング (bremsstrahlung) とも呼ばれる。

この節の前半では、一個の電子の制動放射過程を学び、後半では非相対論的な熱運動をする電子系からの制動放射である熱制動放射 (thermal bremsstrahlung) について学ぶ。

詳細に入る前にエネルギーをいろいろな単位で換算した量をまとめる。エネルギーの単位  $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-12}\text{erg}$  は、 $= k_B T$  として温度に換算すると  $11600\text{K}$  であり約1万度、 $= h\nu$  として電磁波の周波数に換算すると  $240\text{THz}$ 、波長にすると  $1.25\mu(12500\text{\AA})$  で近赤外線に対応する。

### 5.1.1 一個の荷電粒子からの制動放射

プラズマ中の電子は、電子やイオンから常にクーロン力を受けて加速度運動している。したがって、双極子放射による電子からの電磁波の放射が期待される。まず電子同士の相互作用を考える。電子同士の系の電気的雙極子モーメントは  $\vec{d} = -e\vec{r}_1 - e\vec{r}_2 = -2e\vec{R}$  であり本質的に重心と等しい。

二つの電子が互いのクーロン力を受けて運動しているとき重心の加速度はゼロである。したがって、電子同士の電気雙極子モーメントの時間二階微分はゼロであり、電子同士の相互作用による電気雙極子放射はおこらない。荷電粒子同士の衝突による雙極子放射は、異種粒子間の衝突でのみ生じる。

ここでは電子-陽子衝突を扱う。この場合電荷が同じだが質量は陽子の方が電子より  $m_p/m_e = 1836$  倍大きいので、加速度は電子の方が陽子より  $m_p/m_e = 1836$  倍大きく、放射の殆んどは電子からである。以下、簡単のため陽子は原点に止まっているとする。陽子から電子を見た相対位置ベクトルを  $\vec{r}$  とすると、この系の雙極子モーメントは  $\vec{d} = -e\vec{r}$  となる。したがって、電子の運動方程式から電気雙極子モーメントの時間二階微分が求まる。電子の加速度を求めるには電子の軌道を知らなければならない。正

## 5.1 制動放射

確な軌道を求めるには輻射を放出することの電子の運動方程式へのバックリアクションを正確に考慮しなければならない。しかし、これは所謂鶏と卵の問題であり厳密な取り扱いは難しく、通常摂動法を用いて逐次精度を上げて行く方法が用いられる。幸い制動放射が観測される天体の殆どは弱結合プラズマであるのでイオンのクーロン力が及ぼす電子軌道への影響は無視しえるほど小さく、散乱角も非常に小さい。電子のイオンによる散乱角が小さい小角度散乱 (small-angle scattering) のときは、バックリアクションを無視した取り扱いで十分精度のよい結果が得られる。小角度散乱では、陽子との相互作用による電子の軌道の変化も小さいので、陽子との相互作用を無視した自由なときの電子の軌道、つまり直線軌道を電子は走ると近似する。

この過程で放射される電磁波の振動数にどのような特徴があるかを考察する。電子の運動が、非相対論的であれば双極子近似で十分良い精度の結果が得られる。したがって、双極子の振動の周波数と同じ周波数の電磁波が放射される。以下電子の運動は非相対論的であるとする。双極子モーメントのフーリエ積分表示  $\hat{\vec{d}}(\omega)$  は、以下の式で与えられる。

$$\hat{\vec{d}}(\omega) = \frac{e}{2\pi\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\vec{v}} e^{i\omega t} dt \quad (5.1)$$

ここで  $\vec{v}$  は電子の速度である。衝突パラメータ (impact parameter) を  $b$  とし、衝突時間を  $\tau = b/v$  で定義する。電子が陽子のクーロン力の影響を強く受けて加速度運動している期間は、最も陽子に近づいた地点を中心に衝突パラメータ程度の距離を運動している期間である。したがって、 $\tau$  を電子とイオンの衝突 (電子のイオンによる減速) が起きている時間と考えるのは妥当であろう。言い換えると電子からの放射が出ている時間間隔は  $\tau$  程度である。観測の不確定性原理から放射される電磁波の周波数分布はゼロを中心として  $\omega \sim 1/\tau$  程度の広がりを持ったものであることが期待される。以下簡単の為に電子は、衝突時間の間は一定の加速度を受けそれ以外では加速は受けないと近似する。すると式 (5.1) の積分は以下ようになる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \dot{\vec{v}} e^{i\omega t} \sim \Delta \vec{v} \text{sinc} \frac{\omega\tau}{2}$$

ここで  $\dot{\vec{v}}_\tau$  を  $\Delta\vec{v}$  と書いた。これは陽子との散乱前後での電子の速度の変化量である。双極子モーメントはシンク関数の性質から以下のように計算できる。

$$\hat{\vec{d}}(\omega) \sim \begin{cases} \frac{e}{2\pi\omega^2} \Delta\vec{v}, & \omega\tau \ll 1 \\ 0, & \omega\tau \gg 1 \end{cases}$$

この結果を式 (2.51) に代入して、非相対論的電子からの制動放射の単位周波数あたりのエネルギー放射強度が以下のように求まる。

$$\frac{dW}{d\omega} = \begin{cases} \frac{2e^2}{3\pi c^3} |\Delta\vec{v}|^2, & \omega\tau \ll 1 \\ 0, & \omega\tau \gg 1 \end{cases} \quad (5.2)$$

小角度散乱を考えているので速度の変化は軌道と垂直方向にのみ起こると仮定して良い。軌道に垂直方向の電子の運動方程式を立て積分すると以下の結果を得る。

$$m_e \frac{dv_\perp}{dt} = \frac{e^2}{b^2 + v^2 t^2} \frac{b}{(b^2 + v^2 t^2)^{0.5}}$$

$$\Delta v = \frac{e^2}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{2e^2}{m_e v b}$$

この結果を代入することで制動放射のスペクトル分布が求まる。

$$\frac{dW(b)}{d\omega} = \begin{cases} \frac{8e^6}{3\pi c^3 m_e^2 v^2 b^2}, & b \ll v/\omega \\ 0, & b \gg v/\omega \end{cases} \quad (5.3)$$

### 5.1.2 プラズマからの制動放射

前節の結果を用いて、電子密度  $n_e$ 、陽子密度  $n_p$  からなるプラズマからの放射を考察する。電磁力は非常に強いので電荷中性が破れると直ちに復元して電荷分布の中性を保とうとする性質をプラズマは持つ。この性質から  $n_e = n_p$  がよい近似で成立しているはずである。ある一つの陽子を中心にした半径  $b \sim b + db$  の円環を考える。ここを単位時間あたりに通過する電子の数は  $n_e v 2\pi b db$  である。一方単位体積あたりのターゲットの数は  $n_p$

## 5.1 制動放射

である。制動放射が観測される天体では殆どの場合、放出される電磁波の波長（例えば  $10\text{\AA}$ ）が電子間距離（例えば銀河団では  $10\text{cm}$  程度）より圧倒的に短い。したがって異なる電子からの放射は非可干渉な重ね合わせでよい。以上から単位体積・単位角周波数あたりの放射強度は次のように求まる。

$$\frac{dW}{d\omega dV dt} = n_e n_p 2\pi v \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{dW(b)}{d\omega} b db = \frac{16e^6}{3c^3 m_e^2 v} n_e n_p \ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right)$$

ここで被積分関数には  $\omega \ll v/b$  の低周波数極限の結果を代入した。そこで  $b_{max} = v/\omega$  を衝突パラメータの最大値として採用する。式 (5.3) の導出には小角度散乱の仮定を用いていた。そこで散乱角が  $90$  度以下であることを小角度散乱の条件として採用すると衝突パラメータの最小値が  $b_{min} = e^2/m_e v^2$  で与えられる。実際には、 $b \sim b_{max}$  や  $b \sim b_{min}$  では低周波極限や小角度散乱の近似の精度は良くない。衝突パラメータの最大値・最小値を決める境界は不定性が大きい。しかし幸いなことに  $b_{max}$ 、 $b_{min}$  は対数の中に入っているのでこの不定性からくる誤差は大きくない。上記の  $b_{max}$ 、 $b_{min}$  はあくまで一つの例であり、対象としているプラズマの状態によっては異なる物理によってこれらが決まることに注意が必要である。最後の対数の部分をクーロン対数 (Coulomb logarithm) と呼ぶ。対数の部分を取り出し以下の式で定義される量をガウントファクター (Gaunt factor) と呼ぶ。

$$g_{ff}(v, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) \quad (5.4)$$

ガウントファクターはオーダー 1 の量であり、詳細はその道のプロの計算結果を用いるのが常である。ガウントファクターを用いて制動放射のスペクトルを書くと以下のようなになる。

$$\frac{dW(v, \omega)}{d\omega dV dt} = \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3 m_e v} n_e n_p g_{ff}(v, \omega) \quad (5.5)$$

### 5.1.3 熱制動放射

ここまでは電子の速度はある一つの値を持つとしてきた。しかし、実際にはプラズマ中の電子の速度は分布を持っている。したがって、プラズマからの制動放射のスペクトルを求めるには、前節で得られた結果を電子の速度で平均しなければならない。ここでは熱平衡速度分布を持つ電子プラズマからの制動放射を扱う。これを熱制動放射 (thermal bremsstrahlung) と呼ぶ。以下では熱制動放射のスペクトルについて考察する。熱平衡状態の電子の速度分布は以下のマックスウェル・ボルツマン (Maxwell-Boltzmann) 分布で与えられる。

$$P(\vec{v}) = \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T}} \quad (5.6)$$

この速度分布で重みを付けて電子の速度について平均するのだが、速度の取りうる範囲について量子力学的効果により制限がつく。制動放射では電子の運動エネルギーが電磁波のエネルギーとして放射される。量子力学によれば振動数  $\nu$  の電磁波はエネルギー  $h\nu$  の光子の集まりである。振動数  $\nu$  の電磁波を放射するにはエネルギー  $h\nu$  の光子を少なくとも一個放出しなければならない。放射後の電子が自由状態であるためには、放射前の電子の運動エネルギーが  $h\nu$  を超えていなければならない以下の条件を満たさねばならぬ。

$$h\nu \leq \frac{1}{2} m_e v^2$$

放出される電磁波の周波数を固定するとその周波数の電磁波を出しうる電子の速度の下限が以下の様に与えられる。

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2h\nu}{m_e}}$$

スペクトルの速度平均を行う前に、ガウントファクターを速度について平均した量  $\tilde{g}_{ff}(\omega)$  で置き換える。速度依存性が小さいのでこのような近似が使える。これらのことに注意して制動放射のスペクトルを電子の速度分布

## 5.1 制動放射

について平均を取ると以下ようになる。

$$\frac{dW(T, \nu)}{d\nu dV dt} = 2\pi \frac{\int_{v_{min}}^{\infty} v^2 dv e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T}} \frac{dW(v, \omega)}{d\omega dV dt}}{\int_0^{\infty} v^2 dv e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T}}} \quad (5.7)$$

$$= \frac{2^5 \pi e^6}{3mc^3} \left( \frac{2\pi}{3k_B m} \right)^{1/2} T^{-1/2} n_e^2 e^{-h\nu/k_B T} \tilde{g}_{ff} \quad (5.8)$$

上の式では  $\omega = 2\pi\nu$  の関係を用いて右辺を単位周波数あたりの式に変形した。ここでも異なる電子からの放射が非可干渉な重ね合わせで良いことを使った。この結果から分かる熱制動放射のスペクトルの特徴をまとめる。1.  $e^{-h\nu/k_B T}$  の因子のため  $h\nu > k_B T$  の高周波で強度が急激に減少する。これはエネルギーが  $k_B T$  を超える光子を放射するには電子の運動エネルギーが  $k_B T$  を超えている必要があり、熱平衡分布ではそのような電子の数が指数関数的に減少することに起因している。2.  $h\nu \ll k_B T$  の低周波では、強度は周波数によらず一定である。3. 強度は電子の密度の二乗に比例する。制動放射は電子のイオン（この場合陽子）との衝突の過程で放射される。衝突の確率が電子とイオンの密度の積に比例するためである。4. 強度の温度に対する依存性は弱く、温度のルートに逆比例する。上記の特徴からスペクトルの周波数分布を測定し、指数関数的に減少する所を測定することでプラズマの温度が測定でき、絶対値から電子の密度が測定できる事がわかる。

式 (5.8) で与えられる単位周波数・単位体積・単位時間あたりの放射強度を制動放射の放射率 (emissivity)、 $\varepsilon_{\nu}^{ff}$ 、と定義する。制動放射の放射率は以下の様に与えられる。

$$\varepsilon_{\nu}^{ff} = 6.3 \times 10^{-48} \left( \frac{n_e}{10^{-3} \text{cm}^{-3}} \right)^2 \left( \frac{k_B T}{10 \text{keV}} \right)^{-1/2} e^{-h\nu/k_B T} \times \tilde{g}_{ff} \text{erg s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{cm}^{-3} \quad (5.9)$$

全周波数、全放射領域で積分した量、 $L$ 、は以下のように与えられる。

$$L \equiv \frac{dW}{dt} = \int dV \int d\nu \frac{dW}{d\nu dV dt} \\ = 1.7 \times 10^{45} \left( \frac{n_e}{10^{-3} \text{cm}^{-3}} \right)^2 \left( \frac{k_B T}{10 \text{keV}} \right)^{1/2} \left( \frac{4\pi}{3} V (1 \text{Mpc})^3 \right) \times \tilde{g}_{ff} \text{erg s}^{-1} \quad (5.10)$$

ここで代入した体積、電子密度、電子温度は銀河団中を満たすプラズマの典型的な値であり、簡単の为一様球対称分布を仮定した。これを制動放射の全輝度 (bolometric limunosity) と呼ぶ。電子密度の二乗、電子温度のルートに比例することは是非覚えておいて欲しい特徴である。

## 5.2 シンクロトロン放射

磁場の周りを回転運動する非相対論的電子からは、サイクロトロン (cyclotron) 放射が発生される。発生する電磁波の周波数はサイクロトロン周波数で、多くの天体ではこの周波数は非常に小さく観測対象にはならない。しかしながら、電子の運動が光速に近づき相対論的運動になると話は一変する。相対論的ビーミング効果の帰結として発生する周波数が電波から X 線まで観測対象域に上げられる。基本過程は、サイクロトロン放射と同じであるが、運動が相対論的であるか否かによって観測される電磁波の様子は本質的にサイクロトロン放射とは異なるものとなる。このような事情から磁場の周り運動する相対論的電子からの放射をシンクロトロン (synchrotron) 放射とよびサイクロトロン放射と区別する。

この節では、このシンクロトロン放射の基礎について学ぶ。

### 5.2.1 サイクロトロン放射

まず、一様磁場の中を運動する非相対論的電子からの放射について考察する。これをサイクロトロン放射 (cyclotron radiation) 或いはジャイロ放射 (gyro radiation) と呼ぶ。 $z$  軸正の方向に貫く一様磁場  $B$  が存在するとする。電子は  $z = 0$  の平面内に存在し、 $z$  方向の初速度をゼロとし、 $t = 0$  で  $v_x = 0$ 、 $v_y = v_0$  とする。電子の運動方程式は以下ようになる。

$$m_e \frac{dv_x}{dt} = -ev_y \frac{B}{c}, m_e \frac{dv_y}{dt} = ev_x \frac{B}{c}$$

これらの方程式は、 $Z = v_x + iv_y$  という複素変数に置き換えて解くのが常套手段である。初期条件を満たす解は  $Z = iv_0 e^{i\omega_{ce}t}$  となる。ここで

## 5.2 シンクロトロン放射

$$\omega_{ce} \equiv \frac{eB}{m_e c} = 18 \left( \frac{B}{1\mu\text{G}} \right) \text{Hz} \quad (5.11)$$

はジャイロ周波数 (gyro frequency) 或いはサイクロトロン周波数 (cyclotron frequency) と呼ばれる。この結果を運動方程式に代入すると以下の式を得る。

$$m_e \frac{dv_x}{dt} = -ev_0 \frac{B}{c} \cos\omega_{ce}t, m_e \frac{dv_y}{dt} = -ev_0 \frac{B}{c} \sin\omega_{ce}t \quad (5.12)$$

式 (5.12) と式 (3.4) を比較すると  $eE_0 \rightarrow ev_0 B/c$  の置き換えをすれば、磁場中の電子の運動方程式は左回りの円偏光による電子の運動方程式と同じであることがわかる。したがって、左回りの円偏光の電子による散乱の問題を扱った節の結果がそのまま使える。輻射電場、放射強度分布、放射強度は以下のようなになる。

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{e^2 v_0 B}{R m_e c^3} (\hat{a}_1 \cos\omega t + \hat{a}_2 \cos\theta \cos(\omega t - \pi/2)) \quad (5.13)$$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{r_0^2 v_0^2 B^2}{8\pi c} (\cos^2\theta + 1) \quad (5.14)$$

$$\langle P \rangle = \frac{2}{3c} r_0^2 v_0^2 B^2 = \frac{2}{3} r_0^2 c \beta_{\perp}^2 B^2 \quad (5.15)$$

ここで  $\beta_{\perp} \equiv v_{\perp}/c$  で磁場に垂直な電子の速度を光速で割ったものである。

サイクロトロン放射は  $\omega = \omega_{ce}$  の単色の電磁波を放射する。星間磁場等宇宙の希薄プラズマ中の磁場は大体  $1\mu\text{G}$  程度であり、サイクロトロン周波数は非常に低い。したがって、観測にかかることはない。偏光状態については、節 3.3 を参考にされたい。

### 5.2.2 相対論的ビーミング効果

輻射場の電場は式 (2.29) で与えられた。ここでは相対論的極限、すなわち  $\beta \rightarrow 1$ 、ローレンツ因子  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \gg 1$  のときを考える。このとき  $\beta$  は、 $\gamma$  を用いて近似的に  $\beta = \sqrt{1-1/\gamma^2} \sim 1 - 1/2\gamma^2$  と書ける。視線方向と粒子の速度のなす角を  $\theta$  とすると  $\vec{n} \cdot \vec{\beta} = \beta \cos\theta$  と書ける。 $\theta \ll 1$  の範囲では、 $\cos\theta \sim 1 - \frac{1}{2}\theta^2$  と近似できる。この範囲で  $\kappa$  は以下のように

近似できる。

$$\kappa \sim \frac{1}{2\gamma^2}(\gamma^2\theta^2 + 1)$$

この式から  $\kappa$  は、 $\theta < 1/\gamma$  の範囲内ではほぼ一定値  $\sim 1/\gamma^2$  を取るが、 $\theta > 1/\gamma$  では  $\theta$  の増加と共に急激に増加する関数であることが分かる。輻射場の電場、磁場の強度は  $\kappa$  に反比例する。したがって、相対論的速度で運動する電子からの輻射場の強度は進行方向を中心に狭い角度範囲  $\theta < 1/\gamma$  内にいる観測者にとって非常に強くなる。強度の増加率を実感するため  $\theta = 0$  での電場強度  $E_0$  と  $\theta = \pi$  での電場強度  $E_\pi$  の比を調べる。

$$\frac{E_0}{E_\pi} \sim \frac{(1 + \beta)^2}{(1 - \beta)^2} \sim 16\gamma^4$$

$\gamma \gg 1$  の相対論的な電子の場合、運動方向前方への放射の集中は非常に強いものであることが分かる。以上示した、相対論的電子から放射される電磁波強度が運動方向前方で非常に強くなる現象を相対論的ビーミング効果 (relativistic beaming effect) と呼ぶ。放射の集中が観測されるのは、運動方向を中心に角度  $\theta < 1/\gamma$  のコーン内である。

時空図を用いて相対論的ビーミングが何故起こるかを物理的に説明する。図 5.1 の太い実線は、原点  $x = 0$  に静止した観測者に光速に近い速度で向かってくる光源の世界線である。一方点線は光速の  $1/4$  の速度で観測者に向かって運動している光源の世界線である。二本の破線は事象 A、B、C からそれぞれ発して観測者へ向かう電磁波の世界線である。同じ時間間隔  $t \sim t + dt$  の間に観測者に二つの光源から届く情報を比べる。点線で示した光源からは事象 A から C の間に発せられた電磁波が届くのに対して、実線で示した光源からは事象 A から B の間の非常に長い期間に放出された電磁波が届く。これが相対論的ビーミング効果の本質である。厳密には電磁波を放出するような粒子は加速度運動をしているため世界線は直線にならないが、加速度運動している粒子であっても相対論的ビーミング効果の本質はこの例が示す通りである。

## 5.2 シンクロトロン放射

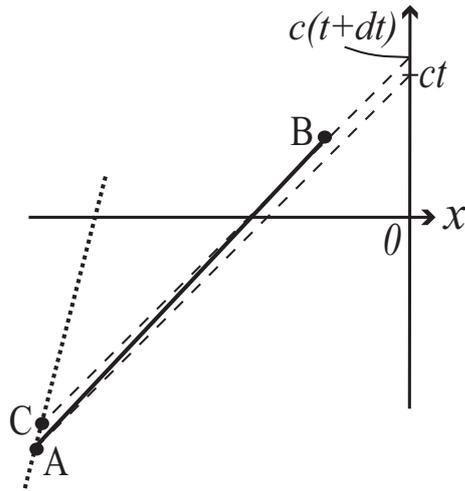


図 5.1 相対論的ビーミング効果

### 5.2.3 シンクロトロン放射

#### 電磁場中の相対論的電子の運動方程式

一様磁場  $\vec{B}$  の中で運動する相対論的電子の運動方程式を導出する。4元ポテンシャルを  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$  で定義すると電磁場は以下の2階の反対称テンソルで表現できる。

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

ここではメトリックとして  $\text{diag}\eta^{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$  を採用する。電磁場中を運動をする相対論的電子のローレンツ力を以下の二つの指導原理の元で導く。1. 全ての慣性系で同じ力が働く、2. 非相対論的極限でのローレンツ力を再現。要請1を満たすには力がローレンツ変換に対して共変であればよい。要請2を満たすには粒子の速度と電場、磁場の掛け算の形で力が

書けている必要がある。このような可能性として最も簡単な場合は以下のものである。

$$F^\mu = -\frac{e}{c} F_\nu^\mu U^\nu \quad (5.17)$$

ここで  $U^\nu \equiv dx^\nu/d\tau$  は電子の4元速度、 $x^\nu$ 、 $\tau$  はそれぞれ電子の4元位置ベクトル、固有時間である。これが相対論的に共変であることは自明であろう。要請2を満たすことを以下示す。上記の式でローレンツ力を定義すると電子の運動方程式は以下のようなになる。

$$m_e \frac{dU^\mu}{d\tau} = F^\mu \quad (5.18)$$

この方程式の時間成分、空間成分は以下のようなになる。

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_e c^2) = -e \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (5.19)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_e \vec{v}) = -e \vec{E} - \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (5.20)$$

非相対論的極限をとり  $\beta$  の二次まで上記の式を展開すると時間、空間成分はそれぞれ以下のようなになる。

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m_e v^2 = -e \vec{E} \cdot \vec{v}, \quad \frac{d}{dt} m_e \vec{v} = -e \vec{E} - e \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$$

時間成分は、電場による仕事率が電子の非相対論的極限での運動エネルギーの増加率に等しいという式である。空間成分は、非相対論的極限での電磁場中の電子の運動方程式である。確かに要請2を満たしていることが確認できた。以上のように式(5.17)で定義されたローレンツ力を用いた運動方程式(5.18)は、相対論的電子の電磁場中の運動方程式として適切であることが明らかになった。

一様磁場中を運動する相対論的電子の運動方程式の時間成分は以下のようなになる。

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_e c^2) = 0 \quad (5.21)$$

これより  $\gamma =$  一定となり電子のエネルギーが保存することが示される。この事実を用いて運動方程式の空間成分を書くと以下のようなになる。

5.2 シンクロトロン放射

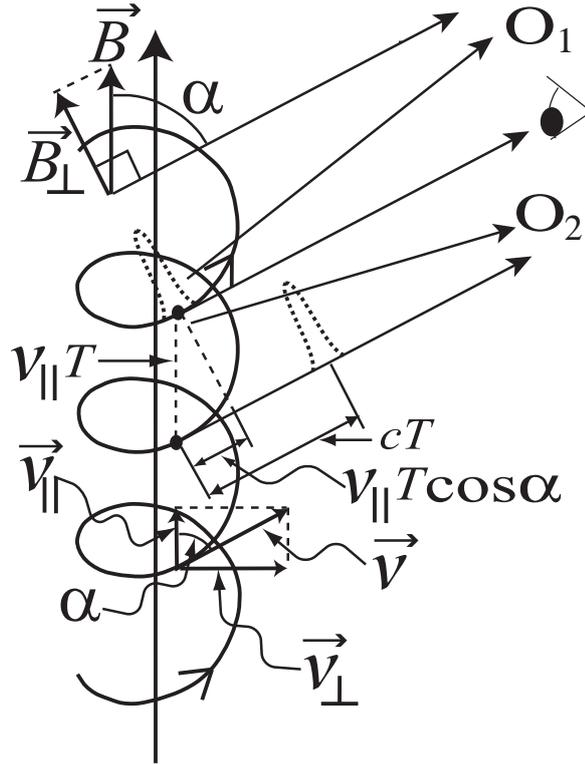


図 5.2 磁場中の相対論的電子の軌道とその電子からの放射

$$\frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = 0, \quad (5.22)$$

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = -\frac{e}{\gamma m_e c} \vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \quad (5.23)$$

ここで  $\vec{v}_{\parallel}$ 、 $\vec{v}_{\perp}$  は、それぞれ電子の速度の磁場に平行及び垂直な成分である。これらの式から  $|\vec{v}_{\parallel}|$ 、 $|\vec{v}_{\perp}|$  それぞれが保存することが分かる。速度の垂直成分の方程式から電子は角周波数

$$\omega_{se} = \frac{eB}{\gamma m_e c} = \frac{\omega_{ce}}{\gamma} = 18 \left( \frac{B}{1\mu\text{G}} \right) \left( \frac{\gamma}{1} \right)^{-1} \text{ Hz}$$

の回転運動をすることが分かる。回転半径は  $a_L \equiv v_{\perp}/\omega_{se}$  で与えられ、

ラーマー半径 (Larmor radius) と呼ばれる。磁場と平行方向は等速直線運動である。磁場と速度のなす角  $\alpha$  をピッチ角 (pitch angle) と定義する。 $\tan\alpha = v_{\perp}/v_{\parallel}$  の関係がある。電子の運動は図 5.2 に示したようなピッチ角  $\alpha$ 、角周波数  $\omega_{se}$  (周期  $T = 2\pi/\omega_{se}$ ) の螺旋運動 (helical motion) である。

### 全放射強度

一様磁場中を運動する相対論的電子から放射される電磁波の全放射強度 (total emitted power) は、前節の運動方程式から得られる  $\dot{v}_{\perp} = \omega_{se}v_{\perp}$ 、 $|\dot{\vec{v}} \times \vec{\beta}| = \beta v_{\perp} \omega_{se}$  をリエナーの公式に代入することで得られる。

$$P_{sync} = \frac{2}{3} r_0^2 c [\gamma^2 \beta^2 B^2 \sin^2 \alpha] \quad (5.24)$$

電子の速度分布が等方的である時、電子の進行方向について平均することで全放射強度は以下のようにになる。

$$P_{sync} = \frac{4}{3} \sigma_{TC} [\beta^2 \gamma^2 U_B] \quad (5.25)$$

ここで  $U_B = B^2/8\pi$  は磁場のエネルギー密度である。

### スペクトラム

シンクロトロン放射のスペクトルの特徴について議論する。電子の運動方程式から分かるように  $\dot{\vec{\beta}} \perp \vec{\beta}$  である。このため以下のような特徴的な相対論的ビーミング効果の様子を示す。輻射場の電場の形から  $\vec{n} - \vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$  のとき輻射場の電場がゼロになる。つまり  $\vec{n} - \vec{\beta}$ 、 $\vec{\beta}$ 、 $\vec{n}$  を各辺とする三角形が直角三角形になったときに輻射場がゼロになる。このことから強度がゼロになるときの、視線方向  $\vec{n}$  と粒子の進行方向  $\vec{\beta}$  のなす角  $\theta$  を決める方程式は  $n \cos\theta = \beta$  である。 $n = 1$  を使って変形すると  $\sin\theta = 1/\gamma$  となる。 $\gamma \gg 1$  の相対論的な極限では  $\theta \sim 1/\gamma$  で電場強度がゼロになることになる。磁場の回りを回転する相対論的電子からの電磁波の電場振幅分布を図 5.3 に示した。原点から曲線上の各点までの距離が、その方向に放射される電磁波の電場の大きさに比例するよう描いた図である。図 5.3 の左の図は、

## 5.2 シンクロトロン放射

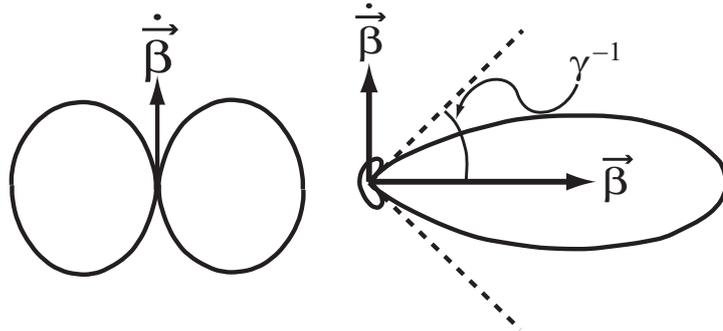


図 5.3 左：電子静止系から観測した電磁波の放射強度分布。右：実験室系から観測した電磁波の放射強度分布

ある時刻に電子が静止して見える観測者が観測した振幅分布である。加速度ベクトルを軸とした双極分布である。一方図 5.3 の右の図は、光速に近い速度で運動している電子からの放射を実験室系で観測したときの振幅分布である。ここでは  $\beta = 0.7$  の場合を図示した。電子の進行方向を中心に  $|\theta| < 1/\gamma \text{ rad} \sim 45$  度の範囲に放射強度が集中し、 $|\theta| = 1/\gamma$  の所で一旦強度がゼロになり  $|\theta| > 1/\gamma$  の方向に弱い放射を放つ様子が見て取れる。これらの図から電子静止系で  $-\pi/2 < \theta' < \pi/2$  の範囲に放射された電磁波が、実験室系では角度  $-1/\gamma < \theta < 1/\gamma$  の狭い範囲に全て集中していることが分かる。これを以下では放射コーンと呼ぶ。

これまでの結果を用いて磁場中を運動する一個の相対論的電子からの放射のパターンについて考察する。図 5.2 に示したように観測者の視線方向が磁場となす角とピッチ角  $\alpha$  が一致する電子を考える。図 5.4 には、この電子の軌道の一部を示した。放射コーンを速度ベクトルを中心とした円錐で示した。軌道上の位置 1 は放射コーンが始めに観測者の視線に入るときの電子の位置である。位置 2 は放射コーンが観測者の視線からは外れる位置である。観測者は電子が 1 ～ 2 の範囲を運動している間に放射した電磁波を観測することになる。この区間に電子が滞在している期間  $\Delta t'$  をまず評価する。図では分かりやすくするため放射コーンの広がり角を大きく描いたが実際は非常に小さな角である。したがって、この区間を通過する間の

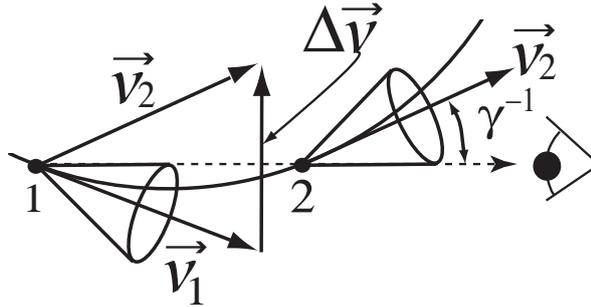


図 5.4 電子の軌道と放射コーン

速度変化量  $\Delta v$  は微小で位置 1 での速度に直行していると考えてよい。さらに軌道の曲率を無視して直線運動をしていると近似してよい。この近似の範囲で運動方程式 (5.23) から  $\Delta v = v \sin \alpha \omega_{se} \Delta t'$  を得る。図から明らかな様に  $\Delta v/v = \tan(2/\gamma) \sim 2/\gamma$  である。これらの関係から以下の結果を得る。

$$\Delta t' = \frac{2}{\gamma \omega_{se} \sin \alpha}$$

この間に放射された電磁波が観測者に届く時間間隔を  $\Delta t_o$  とする。電子が図の 1 にいた時刻  $t'_1$  に放射された電磁波が観測者に届くまでに走る光路長を  $L$  とするとこの電磁波は観測者に時刻  $t_1 = t'_1 + L/c$  に届く。一方電子が図の 2 にいた時刻  $t'_2$  に放射された電磁波は観測者に時刻  $t_2 = t'_2 + (L - v\Delta t')/c$  に届く。定義から  $t'_2 - t'_1 = \Delta t'$  であることを用いると観測者が電子からの電磁波を観測する時間間隔は以下の様与えられる。

$$\Delta t_o = \Delta t'(1 - \beta) \sim \frac{1}{\sin \alpha \gamma^2 \omega_{ce}} \quad (5.26)$$

電子が観測者に近づいてくる分ドップラー効果で時間間隔が短くなっている。観測者は継続時間が  $\Delta t_o$  という短いパルス状の電磁波を観測する。次に電子の周回運動によりこのパルスが観測される周期を考察する。電子の回転の一周期は  $T = 2\pi/\omega_{se} = 2\pi\gamma/\omega_{ce}$  で与えられる。図 5.2 に示した

## 5.2 シンクロトロン放射

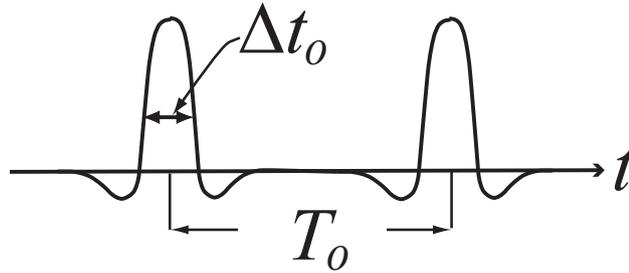


図 5.5 実験室系で観測される磁場中の相対論的電子から放射される電磁波の電場振幅の時間変化

ケースでは  $v_{\parallel} \neq 0$  のとき、電子は観測者に近づいてくる。この図よりパルスが観測される周期は  $T_o = (1 - \cos^2\alpha)2\pi\gamma/\omega_{ce}$  であることが分かる。以上まとめると観測される電子からの放射は、式 (5.26) で与えられる短い時間に集中したパルスでありそれが周期  $T_o$  で繰り返す。図 5.5 に観測される電場の時間変動を示した。正負の入れ替えは放射分布の図からも理解できる。電子が非相対論的なときは単色のコサイン型であったのが、相対論的ビーミング効果でコサインの正の部分が短い時間間隔に押し込められた結果と解釈することもできる。

上記の考察から観測されるシンクロトロン放射のスペクトルの特徴を導くことができる。

1. 観測の不確定性原理より周波数分布は  $\Delta\nu \sim 1/\Delta t^o = \gamma^2\omega_{ce}\sin\alpha$  程度広がったものになる。
2. 周期性から周波数が  $\omega_{ce}/(\gamma\sin^2\alpha)$  の整数倍の所のみ有限の振幅を持つ無数の  $\delta$  関数的スペクトルからなる。

シンクロトロン放射のときは電子の円運動の振動数と等しい単色の電磁波のみ放射された。違いは、シンクロトロンでは  $\beta$  が 1 に近いため、 $\beta\dot{\beta}$ 、 $\beta^2\ddot{\beta}$  等四重極、八重極等高次の多重極の寄与が大きいことである。そのため大きな振幅の高調波が現れるのである。

節 5.2.3 に示した詳細な解析を行うと図 5.6 に示したようなスペクトル

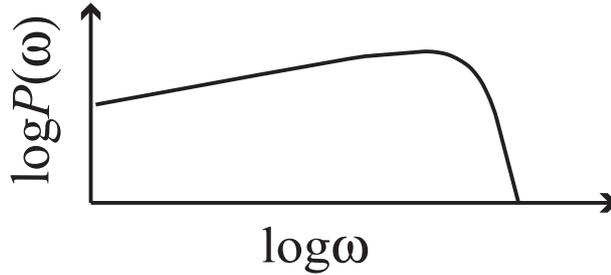


図 5.6 単一の電子からのシンクロトロン放射のスペクトル分布

分布になり、 $\omega \sim 0.29\omega_c$  の辺りで放射される電磁波のエネルギーが最大になる。ここで  $\omega_c$  は臨界周波数 (critical frequency) と呼ばれる周波数で  $\omega_c \equiv \frac{3}{2}\gamma^2\omega_{ce}\sin\alpha$  で与えられる。前段落で述べたように実際には  $2\pi/T_o$  の整数倍の飛び飛びの振動数のところのみ値を持つスペクトルであるが、ここではピークの抱絡線のみ示した。シンクロトロン放射強度が最大になる周波数は以下の様になる。

$$\nu_c = 0.13 \left( \frac{\gamma}{10^4} \right)^2 \left( \frac{B}{1\mu\text{G}} \right) \left( \frac{\sin\alpha}{1} \right) \text{GHz} \quad (5.27)$$

放射スペクトルの最大値は、放射に関与している電子のエネルギーに応じて電波から X 線まで広い周波数レンジに及ぶ。

ここまでは電子が単一の速度 (エネルギー) を持つ場合に話を限ってきた。しかし、実際の天体からのシンクロトロン放射は速度分布、言い換えるとエネルギー分布を持つ電子系から放射される。シンクロトロン放射を放射する相対論的電子の単位エネルギーあたりの個数密度分布 (以下、電子のスペクトルと呼ぶ) は以下の様なべき乗型 (power law) をしている。

$$N(\gamma)d\gamma = N_0 \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{-p} \frac{d\gamma}{\gamma_0}, \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2 \quad (5.28)$$

ここで  $E = \gamma m_e c^2$  を用いて電子のエネルギーを  $\gamma$  で表した。ここで  $N(\gamma)d\gamma$  はエネルギーが  $\gamma m_e c^2 \sim (\gamma + d\gamma)m_e c^2$  の電子の単位体積あたりの個数を表している。べき指数  $p$  は正でありエネルギーが高い電子ほど数

## 5.2 シンクロトロン放射

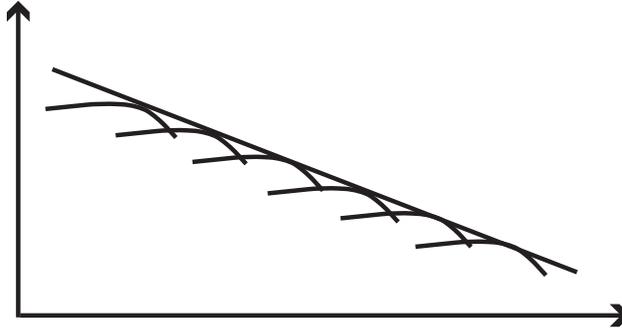


図 5.7 相対論的電子系からのシンクロトロン放射スペクトル

が少ないが、熱平衡分布のガウス型と比べて非常に高いエネルギーまで有限の値を持つことが特徴である。簡単のためにエネルギー  $\gamma m_e c^2$  の電子は周波数  $\nu = 3\gamma^2 \nu_c / 2$  の電磁波を出すとする。すると  $d\omega \propto \gamma d\gamma \omega_{ce} \sin\alpha$ 、 $\gamma \propto \omega^{1/2} \omega_{ce}^{-1/2} \sin^{-1/2}\alpha$  となる。 $\gamma$  の電子一個からの放射強度は  $\gamma^2 B^2 \sin^2\alpha$  に比例する。これらを用いてべき乗型エネルギー分布をした電子系からのシンクロトロン放射のスペクトルが以下のように求まる。

$$P_{tot}(\nu) d\nu \propto N B_{\perp} (\nu/\nu_{ce,\perp})^{-(p-1)/2} d\nu$$

ここで  $B_{\perp} = B \sin\alpha$  は磁場の視線方向に垂直な成分である。 $\nu_{ce,\perp} = (eB_{\perp}/m_e c)/2\pi$  は視線に垂直方向の磁場で定義されるサイクロトロン周波数である。電子のエネルギースペクトルについての足し合わせの結果、 $\omega_{ce} \sin\alpha/\gamma$  の整数倍の所に飛び飛びで現れていた放射スペクトルが全ての周波数について連続的に分布したスペクトルになった。この結果はシンクロトロン放射の強度の測定からは磁場の視線に垂直な成分の強度が測定されることを示している。図 5.7 にはべき乗型の電子スペクトルのとき、それぞれの  $\gamma$  の電子からの放射の重ね合わせの結果シンクロトロン放射のスペクトルもべき乗型になる事を定性的に示した。図は両対数プロットである。 $\gamma$  の異なる電子からのスペクトルのピークの抱絡線を重ね合わせた結果、べき乗型スペクトルになることがその理由である。

## シンクロトロン放射スペクトルの厳密な導出

ここでは、シンクロトロン放射のスペクトル分布の詳細な解析を行う。式(2.53)から計算を進める。長時間平均を取り右辺第一項を落とす。電子は $z$ 軸方向を向いた一様磁場中を $xy$ 平面内で円運動しているとす。一般性を失うことなく視線方向 $\vec{n}$ を $yz$ 面内に設定できる。視線方向と $z$ 軸のなす角を $\theta$ とすると $\vec{n} = (0, \sin\theta, \cos\theta)$ と書ける。放射電場の各成分のスペクトルが以下のように得られる。

$$\begin{aligned}\hat{E}_x(\omega) &= \frac{e\omega\beta}{2\pi cR} e^{i\varphi_0} \sum_n J'_n(\lambda) T' \text{sinc}(\omega - n\omega_{se}) \frac{T'}{2} \\ \hat{E}_y(\omega) &= -\frac{e\omega}{2\pi cR} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} e^{i\varphi_0} \sum_n J_n(\lambda) T' \text{sinc}(\omega - n\omega_{se}) \frac{T'}{2} \\ \hat{E}_z(\omega) &= \frac{e\omega}{2\pi cR} \cos\theta e^{i\varphi_0} \sum_n J_n(\lambda) T' \text{sinc}(\omega - n\omega_{se}) \frac{T'}{2}\end{aligned}\quad (5.29)$$

ここで $\lambda = (\omega\beta/\omega_{se})\sin\theta$ 、 $T'$ は観測時間 $T$ に対応する遅延時間で今の場合粒子の運動を周期につき平均すると観測者に対して静止しているため $T' = T$ である。 $\varphi_0$ は、粒子の初期位置及び時間原点の取り方による位相であるが、強度を求める為絶対値を取ると消えてしまう為その詳細に興味が無い。ここで $J'_n$ は $n$ 次ベッセル関数 $J_n(\lambda)$ の $\lambda$ による微分を表わす。 $n$ 次ベッセル関数 $J_n(z)$ は以下の式で定義される。

$$\begin{aligned}J_n(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - z\sin\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz\sin\varphi - in\varphi} d\varphi = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz\cos\varphi + in\varphi} d\varphi\end{aligned}\quad (5.30)$$

$T' \gg 1/\omega_{se}$ となるような長い観測時間を取れば、式(5.29)の $\text{sinc}$ 関数の部分は $\omega \sim n\omega_{se}$ でのみ値を持つデルタ関数として扱ってよい。すなわち放射スペクトルは、 $\omega_{se}$ の整数倍の角周波数でのみ値を持つ。

全放射強度を式(2.34)及び $dA = R^2 d\Omega$ を用いて計算すると以下の式が得られる。

## 5.2 シンクロトロン放射

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt'} &= \int d\Omega \int d\omega R^2 c \frac{|\hat{E}_x|^2 + |\hat{E}_y|^2 + |\hat{E}_z|^2}{T'} \\ &= \frac{2e^2 \omega_{se}^2}{c\beta} \sum_n \left[ n\beta^2 J'_{2n}(2n\beta) - n^2(1-\beta^2) \int_0^\beta J_{2n}(2n\xi) d\xi \right] \end{aligned} \quad (5.31)$$

ここでは以下の関係式を用いた。

$$\int_0^{\pi/2} J_n^2(z \sin \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_{2n}(t) dt \quad (5.32)$$

節 5.2.3 で示したようにシンクロトロン放射の周波数分布は  $\omega \sim \gamma^3 \omega_{se}$  まで有限の値を取る。そこで以下、 $n \sim \gamma^3 \gg 1$  の高次でのベッセル関数の漸近的振舞いを調べる。式 (5.30) は、 $n \gg 1$  の極限で以下のように書ける。

$$\begin{aligned} J_{2n}(2n\xi) &\sim \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \left[ 2n \left( \frac{1-\xi^2}{2} \varphi + \frac{\varphi^3}{6} \right) \right] d\varphi, \quad \text{for } \xi \sim 1 \\ &\sim 0, \quad \text{otherwise} \end{aligned}$$

ここで積分に主に寄与する  $\varphi$  の範囲では  $1 - \xi^2 \sim \varphi^2$  であることを考慮して  $\varphi^3$  まで残した。 $\xi \sim 1$  での漸近形は、以下の式で定義されるエアリー関数

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos \left( z\varphi + \frac{\varphi^3}{3} \right) d\varphi \quad (5.33)$$

を用いると次のように書ける。

$$J_{2n}(2n\xi) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n^{1/3}}} \text{Ai}[n^{2/3}(1-\xi^2)] \quad (5.34)$$

式 (5.31) の和は、 $n = \omega/\omega_{se}$  と  $d\omega$  の角周波数間隔に存在するモード数が  $d\omega/\omega_{se}$  であることを用いて、 $\omega$  の積分に直すことができる。この時の被積分関数が単位角周波数あたりの放射強度を与え、近似式 (5.34) を用い以下のように書ける。

$$\frac{dW}{d\omega dt'} \sim \frac{2e^3}{\sqrt{\pi}} \frac{B}{m_e c^2} \sqrt{u_0} \left[ -\text{Ai}'(u_0) - \frac{u_0}{2} \int_{u_0}^\infty \text{Ai}(u) du \right] \quad (5.35)$$

ここで  $u_0 = (\omega/\omega_{se})^{2/3}(1-\beta^2)$  である。この結果は、以下の式で定義される変形されたベッセル関数（或いはマクドナルド関数とも呼ばれる）

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh^\nu t dt \quad (5.36)$$

とエアリー関数の間の関係式

$$\text{Ai}(z) = \sqrt{\frac{z}{3\pi}} K_{1/3} \left( \frac{2}{3} z^{2/3} \right) \quad (5.37)$$

を用いて次のようにまとめられる。

$$\frac{dW}{d\omega dt'} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^3 B}{m_e c^2} F(\chi_0) \quad (5.38)$$

ここで  $F, \chi_0$  は以下の式で定義される。

$$F(\chi_0) = \chi_0 \int_{\chi_0}^\infty K_{5/3}(\chi) d\chi, \quad \chi_0 = \frac{\omega}{\omega_c}, \quad \omega_c = \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_{se} = \frac{3}{2} \gamma^2 \omega_{ce}$$

図 5.6 は、関数  $F(\chi_0)$  の  $\chi_0$  依存性を示したものであった。式 (5.37) は、両辺ともに方程式  $f''(z) = z f(z)$  の解であり、二つの境界  $z = 0, \infty$  で同じ境界値を持つことを示すことで証明できる。

最後に電子系からの放射スペクトルを導出する。以下電子の速度分布は等方的であるとする。興味ある量は、全ての電子からの放射の重ね合わせの結果ある特定の視線方向  $\vec{n}$  で観測される単位立体角あたりの放射強度である。この為には、様々なピッチ角  $\alpha$  の電子が  $\vec{n}$  の方向に放射する輻射場を重ね合わせる必要がある。電子の空間分布がランダムで密度が十分希薄であれば、各電子からの放射の重ね合わせは非可干渉な重ね合わせで与えられる。したがって、各電子が  $\vec{n}$  の方向に放射する放射強度を足し上げればよい。以下では簡単の為、視線方向が  $y$  軸方向と一致する場合、即ち  $\theta = \pi/2$  の場合を取り上げて議論を進める。節 5.2.3 の議論から、ピッチ角が  $\pi/2$  を中心に  $\pm 1/\gamma$  の狭い範囲の電子からの寄与のみ考慮すれば十分である。したがって、ピッチ角が  $\alpha_0$  の電子のこの方向への寄与を同じエネルギーを持つピッチ角が  $\pi/2$  の電子から  $\theta = \pi - \alpha_0$  の方向への放射強度で近似できる。視線方向が任意の  $\theta$  の時の結果は、これまで得られた結果の中の磁場  $B$  を  $B_\perp = B \sin \theta$  で置き換えることで得られる。以上から、相対論的電子のエネルギー分布がべき乗型で与えられるときの単位角周波数あ

## 5.2 シンクロトロン放射

たり単位立体角あたりの  $\vec{n} = (0, \sin\theta, \cos\theta)$  への放射強度は、式 (5.28) を式 (5.38) に掛けて  $\gamma$  で積分し  $4\pi$  で割り  $B$  を  $B_\perp$  で置き換えることで、以下の式のように与えられる。

$$P_e(\omega, \vec{n}) = \frac{\sqrt{3}e^3 N_0 \gamma_0^{p-1} B_\perp}{8\pi^2 m_e c^2 (p+1)} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{m_e c \omega}{3e B_\perp}\right)^{-(p-1)/2} \quad (5.39)$$

ここで、 $4\pi$  で割ったのは電子のエネルギー分布関数を単位立体角あたりに直すためであり、 $\Gamma$  はガンマ関数であり、 $\gamma_1^2 \omega_{ce} \ll \omega \ll \gamma_2^2 \omega_{ce}$  を仮定し計算には以下の関係式を用いた。

$$\int_0^\infty x^\mu F(x) dx = \frac{2^{\mu+1}}{\mu+2} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{7}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{3}\right)$$

### 偏光

放射の殆どは電子のピッチ角が観測者の視線方向と磁場のなす角と一致している電子からのものである。このとき、円運動を真横から見た形になるので磁場に垂直方向に直線偏光する。ピッチ角がこれより大きな電子は右廻りに回って見えるので右廻り楕円偏光する。逆にピッチ角がこれより小さな電子は左廻りに回って見えるので左廻り楕円偏光する。様々なピッチ角の電子からの放射の重ね合わせを観測することを考慮すると、楕円偏光の部分は打ち消しあってゼロになり無偏光を作る。結果として直線偏光と無偏光の重ね合わせとして観測される。直線偏光を作る部分は、ビーミングを受けている部分なので強度が強い。したがって偏光度が非常に強い。式 (??) の  $W_x + W_y + W_z$  を  $W_x - W_y - W_z$  で置き換えて節 5.2.3 で行った計算を一通り行うことで式 (5.39) に対応する量  $Q_e(\omega, \vec{n})$  を得る。

$$Q_e(\omega, \vec{n}) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi^2} \frac{e^3 B_\perp}{m_e c^2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} N_0 \gamma^{-p} \gamma_0^{p-1} \chi_0 K_{2/3}(\chi_0) d\gamma \quad (5.40)$$

したがって、 $\gamma_1^2 \omega_{ce} \ll \omega \ll \gamma_2^2 \omega_{ce}$  の角周波数に対して、偏光度は以下のように計算できる。

$$H = \frac{Q_e(\omega, \vec{n})}{P_e(\omega, \vec{n})} = \frac{p+1}{p+\frac{7}{3}} \quad (5.41)$$

通常天体では  $p \sim 3 - 5$  なので  $\Pi \sim 75\% - 82\%$  と非常に大きい。偏光方向は磁場に垂直な方向である。式 (5.40) の導出には、次のベッセル関数の関係式を用いた。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_n^2(z \sin \theta) \frac{d\theta}{\sin \theta} = \int_0^{2z} \frac{J_{2n}(t)}{t} dt$$

又、偏光度 (5.41) の導出には以下の関係式を用いた。

$$\int_0^{\infty} x^{\mu+1} K_{2/3}(x) dx = 2^{\mu} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{4}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{3}\right)$$

シンクロトロン放射が観測されている天体の多くでは偏光度があまり大きくない。この原因の一つは、以下のように考えられる。観測者から見て天体の奥で生成された放射は天体内を伝搬する間に強いファラデー回転を受ける。一方、手前側で生成された放射はさほどファラデー回転を受けない。結果として天体の奥で生成された放射の偏光方向と手前で生成された放射の偏光方向に大きな差が生じる。途中で生成された放射の偏光面はその間に分布する。これらを重ね合わせた結果お互い打ち消しあい偏光度が下がる。この現象をファラデー・デポーラリゼーション (Faraday depolarization) と呼ぶ。

### レーズン効果

プラズマは屈折率が1以下の媒質であり、位相速度が真空中の光の速度を上回る。荷電粒子は、真空中の光の速度を超えて走ることは出来ないので、屈折率が1から大きく小さくなると相対論的ビーミング効果が期待できなくなる。屈折率  $n$  のプラズマ中では  $\gamma \gg 1$ 、 $\theta \ll 1$  で  $\kappa = 1 - n\beta \cos \theta \sim 1 - n + n(1/2\gamma^2 + \theta^2/2)$  である。  $1 - n \ll n/2\gamma^2$  である限りプラズマの影響は無視できる。しかし、  $1 - n > n/2\gamma^2$  では、プラズマの存在によりビーミング効果が弱まることになる。これから  $\omega < \gamma\omega_{pe}$  になるとビーミング効果が効かなくなることが分かる。ビーミングが効かなくなればシンクロトロン放射が観測されなくなる。したがって、 $\sim \gamma\omega_{pe}$  がシンクロトロン放射が観測される周波数の下限を与えることが期待される。これをレーズン効果 (Razin effect) と呼ぶ。

## 5.2 シンクロトロン放射

---

### 5.2.4 具体例

後冷泉院・天喜二年四 [五] 月中旬 (1054 年 5 月 20 日 ~29 日 [6 月 19 日 ~28 日]) 以後の丑の時、客星觜・参の度に出づ。東方に見 (あら) わる。天関星に孛 (はい) す。大きき歳星の如し (藤原定家・明月記)。

これは藤原定家の明月記に記されている「かに星雲」の超新星爆発の記録である。かに星雲の中心にはパルサーが発見されている。このパルサーに付随したガスからの電波から X 線に渡る広い周波数領域での放射が観測されている。電波放射の発見は 1948 年になされており、これがシンクロトロン放射であることを指摘したのはロシアのシュクロフスキーである。

1955 年に強い偏光が観測され、シンクロトロン説が確立した。これが人類が初めて宇宙からのシンクロトロン放射を検出した瞬間である。その後様々な天体からのシンクロトロン放射が検出されている。図は、SN1006 (エス・エヌ・テンオーシックスと読む) と呼ばれる超新星残骸の X 線観測の結果である。これは、ASCA と呼ばれる日本の X 線天文衛星の観測結果である。超新星爆発で広がる衝撃波のところから強い X 線を検出している。超新星残骸は星間空間と同じ  $1\mu\text{G}$  程度の磁場があるとするとこの X 線は 100TeV 程度のエネルギーを持った高エネルギー電子からのシンクロトロン放射であると解釈できる。荷電粒子の加速が起き高エネルギー宇宙線が生成されている場所の有力候補として超新星残骸の衝撃波が理論的に挙げられていた。電子ではあるが、この観測はこの理論を直接裏付ける最初の観測的証拠として非常に注目されている。この話の続編は次節でも述べる。次の図は、銀河団の電波観測の結果である。スペクトルを見ると  $s \sim 1 - 2$  である。よって高エネルギー電子のエネルギースペクトル指数は  $p \sim 3 - 5$ 。Synchrotron 放射が検出された事で銀河団に磁場と高エネルギー電子が存在する事があきらかになった。最後の図は、我々の銀河系の電波のマップである。この電波放射の主成分の一つは偏光の存在の確認からシンクロトロン放射であることが示されている。この結果は銀河系の渦状腕に沿って磁場と高エネルギー電子が存在していることを示している。



図 5.8 カニ星雲（左）とゴルゴ 13

絵は、ゴルゴ 13 のある一巻の表紙である。この巻におさめられている第 392 話「シンクロトロン BESSY-1」は、ドイツによって大型放射光装置がイスラム圏の某国に渡る事への某国妨害工作をゴルゴが阻止するという内容である。大型放射光装置とは、シンクロトロン放射機構を利用して連続的な周波数分布をした X 線放射を生成する装置である。原子からの放射線を利用した蛍光 X 線発生装置では、単一の周波数にエネルギーの集中した線放射しか作れないのに対して連続スペクトルの X 線が生成できることが大きな特徴である。日本では西播磨にある Spring-8 がこの装置である。Spring-8 を一躍有名にした事件は和歌山砒素カレー事件である。カレーに含まれていた砒素の結晶と容疑者の自宅から押収された砒素の結晶構造が同じである事を同定するのに使用された。

### 5.3 コンプトン散乱

3 章では電磁波の電子による散乱を弾性散乱として扱った。トムソン散乱の取り扱いでは散乱前後で電磁波の運動量の保存が破れていた。古典的には電磁波の運動量の電子への受け渡しは、電磁波の磁場によるローレンツ力で起こる。したがって、電磁波によって加速される電子の速度が非相対論的である限り電磁波の磁場によるローレンツ力は無視しえるので運動量保

### 5.3 コンプトン散乱

存在を破った取り扱いでもよい近似で現象を記述できる。しかしながら、電子の速度が相対論的になると散乱過程での運動量の受け渡しを考慮した取り扱いが必要になる。実際の電磁波は光子の集まりであり、電子と電磁波の散乱の素過程は光子と電子の散乱である。光子はエネルギー  $h\nu$  を持つだけでなく運動量  $h\nu/c$  を持つ。光子と電子の散乱では、散乱の過程で運動量、エネルギーのやり取りが電子と必然的におきることになり、散乱はもはや弾性散乱ではありえなくなる。光子から電子へエネルギーが渡される場合をコンプトン散乱 (Compton scattering) と呼び、逆に電子から光子にエネルギーが渡される場合を逆コンプトン散乱 (inverse Compton scattering) と呼ぶ。

節 5.3.1 で示すように、入射光子のエネルギーが電子静止質量エネルギーを遥かに超えるような特殊な場合を除いて、逆コンプトン散乱による反跳 (recoil) で電子が失うエネルギーは散乱前の運動エネルギーに比べて非常に小さい。このとき散乱は本質的にトムソン散乱と同じである。逆コンプトン散乱による光子のエネルギー変化は、節 5.3.2 で示すように散乱前電子静止系と実験室系との間のローレンツ変換の結果である。このような場合逆コンプトン散乱過程は電磁波を波動的に取り扱うことでも記述できる。そのこと具体例として節 5.3.3 で有名な逆コンプトン散乱強度 (inverse Compton power) の公式をリエナーの公式 (2.43) 即ちマックスウェル方程式から演繹的に導出できることを示す。

#### 5.3.1 静止した電子と光子の散乱：コンプトン散乱

まず静止した電子と光子の衝突を考察する。図 5.9 に示したように散乱前の光子、電子の 4 元運動量をそれぞれ  $P_\gamma^\mu = (\varepsilon/c, \varepsilon/c, 0, 0)$ 、 $P_e^\mu = (m_e c, 0, 0, 0)$ 、散乱後の光子、電子の 4 元運動量をそれぞれ  $P_{\gamma,1}^\mu = (\varepsilon_1/c, \varepsilon_1 \cos\theta/c, \varepsilon_1 \sin\theta/c, 0)$ 、 $P_{e,1}^\mu = (\gamma m_e c, -\gamma m_e v \cos\theta_e, -\gamma m_e v \sin\theta_e, 0)$  とする。ここで  $\theta$ 、 $\theta_e$  はそれぞれ光子、電子の散乱角である。4 元運動量保存則は以下のように書ける。

$$P_\gamma^\mu + P_e^\mu = P_{\gamma,1}^\mu + P_{e,1}^\mu$$

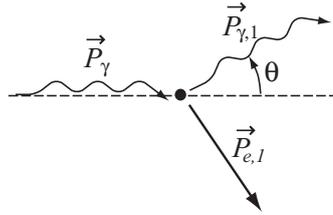


図 5.9 静止した電子による光子の散乱

これを  $P_{e,1}^\mu = P_\gamma^\mu + P_e^\mu - P_{\gamma,1}^\mu$  と変形して、両辺の二乗をとることで以下のように散乱前後の光子のエネルギーの変化の式を得る。

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{m_e c^2} (1 - \cos\theta)} \quad (5.42)$$

ここで  $P_\gamma^\mu P_{\mu,\gamma} = P_{\gamma,1}^\mu P_{\mu,\gamma,1} = 0$ 、 $P_e^\mu P_{\mu,e} = P_{e,1}^\mu P_{\mu,e,1} = -(m_e c)^2$  を使った。 $\varepsilon = h\nu = hc/\lambda$  を用いて散乱前後の光の波長の変化の式が以下のように求まる。

$$\lambda_1 = \lambda + \lambda_c (1 - \cos\theta), \quad (5.43)$$

ここで  $\lambda_c = h/m_e c = 0.02426 \text{ \AA}$  は電子コンプトン波長であり、散乱前後で波長が  $\lambda_c$  程度変化することを示している。この過程では、光子の波長は必ず散乱後長くなるので光子はエネルギーを失い、光子から電子へエネルギーが渡される。散乱前電子は静止していたのだから当然の結果である。

$\lambda \gg \lambda_c (h\nu \ll m_e c^2)$  のとき波長の変化が無視出来、散乱はほぼ弾性的である。したがって、このときは僅かに起こるエネルギー変化が問題でない限りトムソン散乱の扱いで十分である。逆に波長が  $\lambda_c$  と同程度かそれ以下のときは、散乱前後の光子のエネルギー変化が無視できなくなる。このときは、不確定性原理から電子の位置が光の波長程度で不確定であるから古典的には取り扱えず量子力学的取り扱いが必要になる。さらに光子のエネルギーが電子の静止質量エネルギー並みかそれ以上であるので、一回の散乱で散乱後電子が相対論的速度を持つ可能性がある。したがって、相対論的取り扱いも必要である。このように光子の波長が電子コンプトン波長程度かそ

### 5.3 コンプトン散乱

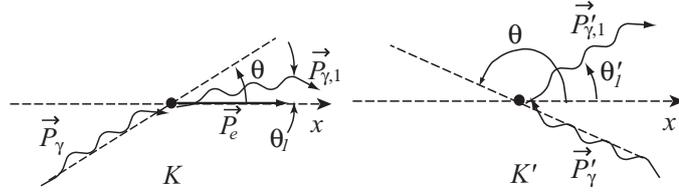


図 5.10 運動する電子による光子の散乱

れより短い場合の電子との散乱を取り扱うには、相対論的量子力学を用いなければならない。これを用いて散乱を扱い以下のコンプトン散乱の散乱断面積を始めて求めたのは、仁科芳雄 (Y.Nishina) とクライン (O.Klein) であった。今日では以下のコンプトン散乱の微分散乱断面積はクライン・仁科の公式と呼ばれている。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon^2} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} - \sin^2\theta \right) \quad (5.44)$$

$\lambda \gg \lambda_c$  の極限でこれはトムソン散乱と一致する。 $\lambda \ll \lambda_c$  の相対論的極限では、断面積はトムソン散乱の断面積より入射光子のエネルギーに反比例して小さくなる。

#### 5.3.2 運動する電子と光子の散乱：逆コンプトン散乱

この節では、運動している電子による光子の散乱について考察する。以下、電子が運動して見える系を K 系或いは実験室系 (laboratory frame) と呼び電子が静止して見える系を K' 系或いは電子静止系 (electron rest frame) と呼ぶ。K' 系の物理量には ' をつける。 $\varepsilon' \ll m_e c^2$  とする。K 系での散乱前の電子の速度を  $v$  とすると  $\beta = v/c$  を用いてドップラー効果の公式から次の関係式が得られる。

$$\varepsilon' = \varepsilon\gamma(1 - \beta\cos\theta), \varepsilon'_1 = \varepsilon_1\gamma(1 - \beta\cos\theta_1)$$

図 5.10 に示したように  $\theta, \theta_1$  はそれぞれ K 系での入射光子及び散乱後の光子がそれぞれ散乱前の K 系での電子の速度となす角である。前節の結果

から以下の関係式が得られる。

$$\varepsilon'_1 = \frac{\varepsilon'}{1 + \frac{\varepsilon'}{m_e c^2}(1 - \cos\Theta)}$$

ここで  $\cos\Theta \equiv \cos\theta'\cos\theta'_1 + \sin\theta'\sin\theta'_1(\cos\phi'\cos\phi'_1 + \sin\phi'\sin\phi'_1)$  は、 $K'$ 系で観測した入射光子と散乱光子のなす角の余弦である。 $\theta'$ 、 $\theta'_1$  は  $K'$ 系で観測した  $\theta$ 、 $\theta_1$  である。 $\phi'$ 、 $\phi'_1$  は、それぞれ  $K'$ 系での散乱前後の光子の方位角である。 $\varepsilon' \ll m_e c^2$  より

$$\varepsilon'_1 \sim \varepsilon'$$

$K'$ 系ではほぼ弾性散乱である。したがって、 $K$ 系の観測者にとっての散乱前後の光子のエネルギー変化は以下のように書き表せる。

$$\varepsilon_1 \sim \varepsilon \frac{1 - \beta \cos\theta}{1 - \beta \cos\theta_1} \quad (5.45)$$

散乱後光子は電子からエネルギーを受け取る。これを逆コンプトン散乱と呼ぶ。 $\theta = \pi$ 、 $\theta_1 = 0$  のとき、つまり正面衝突し入射電子から見て前方に跳ね返されるとき、光子のエネルギー変化量  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon$  が以下の最大値をとる。

$$\varepsilon_1 \sim \varepsilon \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \sim \gamma^2(1 + \beta)^2$$

散乱前後で  $\gamma^2$  倍になるならどんどんエネルギーが増加し得る。しかし、エネルギーは保存しなければならないので散乱後の光子のエネルギーは、散乱前の系の全エネルギーを越えられない。従って上限は

$$\varepsilon_1 < \gamma m_e c^2 + \varepsilon \sim \gamma m_e c^2 \quad (5.46)$$

で逆コンプトン散乱では、散乱後の光子のエネルギーの上限は、散乱前の電子のエネルギーである。

電子の速度が相対論的な場合  $\beta \sim 1$ 、 $\gamma \gg 1$  なので散乱後の光子のエネルギーは以下のような値を持つ。

$$\varepsilon_1 \sim \varepsilon 4\gamma^2 \sim 100 \left( \frac{\varepsilon}{3 \times 10^{-4} \text{eV}} \right) \left( \frac{\gamma}{10^4} \right)^2 \text{keV} \quad (5.47)$$

### 5.3 コンプトン散乱

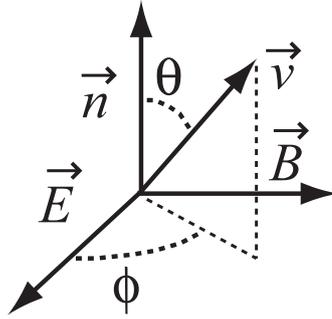


図 5.11 速度  $\vec{v}$  で運動する電子による電磁波の散乱

$\varepsilon \sim 3 \times 10^{-4} \text{eV}$  は宇宙マイクロ波背景放射（3 K 黒体）の光子の典型的なエネルギーである。

#### 5.3.3 逆コンプトン散乱の放射強度

リエナーの公式 (2.43) から逆コンプトン散乱の放射強度を求める。ここでは電磁波を波動として扱う。トムソン散乱のときと同様に系には特別な向きが存在しない。したがって、結果は電磁波の偏光状態に依存しない。簡単のため電磁波は直線偏光しているとする。図 5.11 に示したように電磁波の進行方向を  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  とする。電磁波の電場、磁場をそれぞれ  $\vec{E} = (E(t), 0, 0)$ 、 $\vec{B} = (0, B(t), 0)$  とする。ただし  $E(t) = B(t)$  である。散乱前の電子の速度を  $\vec{v} = (v \sin \theta \cos \phi, v \sin \theta \sin \phi, v \cos \theta)$  とする。ここで  $\theta$  は速度と電磁波の進行方向がなす角、 $\phi$  は  $x - y$  平面への速度ベクトルの射影の方位角である。相対論的電子の運動方程式 (5.19)、(5.20) にこれらを代入すると加速度が求まる。これをリエナーの公式に代入し、電子の速度が等方的であるとして入射電子の運動方向について平均すると以下の逆コンプトン散乱の放射強度を得る。

$$P_e = \sigma_T c [U_{ph} \gamma^2 \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2\right)] \quad (5.48)$$

ここで  $U_{ph} = E(t)^2/4\pi$  は入射光子のエネルギー密度である。電子により単位時間あたりに散乱された電磁波の散乱前のエネルギーは

$$P_{ini} = \sigma_T c [U_{ph}] \quad (5.49)$$

である。放射強度のうち逆コンプトン散乱による増加分を逆コンプトン強度と定義すると  $P_e$  から  $P_{ini}$  を引くことで以下のように求まる。

$$P_{Comp} = \frac{4}{3} [\gamma^2 \beta^2 \sigma_T c U_{ph}] \quad (5.50)$$

ここで  $\gamma^2 - 1 = \beta^2 \gamma^2$  を用いた。

式 (5.50) と式 (5.25) から同じローレンツ因子を持つ電子が起源の逆コンプトン強度とシンクロトロン放射強度の間には以下の関係式が常に成り立つことが分かる。

$$\frac{P_{sync}}{P_{Comp}} = \left[ \frac{U_B}{U_{ph}} \right] \quad (5.51)$$

電子の速度分布が温度  $T$  で  $k_B T \ll m_e c^2$  の非相対論的な熱平衡分布のときの逆コンプトン強度を求めると、式 (5.50) を電子の速度分布について平均する。  $\gamma \sim 1$ 、  $\beta^2$  の平均が  $3k_B T/m_e c^2$  であることを用いると以下のようになる。

$$P_{Comp} = \left[ \left( \frac{4k_B T}{m_e c^2} \right) \sigma_T c U_{ph} \right] \quad (5.52)$$

この式から非相対論的熱平衡分布をした電子系との散乱における光子のエネルギー変化率の平均値が以下の式で与えられることが分かる。

$$\left\langle \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \right\rangle = \left( \frac{4k_B T}{m_e c^2} \right) = 0.04 \left( \frac{k_B T}{5\text{keV}} \right) \quad (5.53)$$

式 (5.52) から式 (5.53) が導かれることを示す。簡単のため散乱前の光子のエネルギーが  $\varepsilon$  で全て揃っていたとする。このとき  $U_{ph}/\varepsilon$  は光子の数密度を表わす。したがって  $\sigma_T c U_{ph}/\varepsilon$  は一つの電子によって単位時間あたりに散乱される光子の数を表す。これに一回の散乱における光子のエネルギー変化量  $\Delta \varepsilon$  を掛ければ逆コンプトン強度になる。このようにして得られる式は、式 (5.52) を式 (5.53) を用いて  $\langle \Delta \varepsilon / \varepsilon \rangle$  で書き換えた式に正に一

### 5.3 コンプトン散乱

致する。

逆コンプトン散乱によるエネルギー変化量を定量的に表現する物理量として以下で定義されるコンプトン  $y$  パラメータ (Compton  $y$  parameter) と呼ばれる量がしばしば用いられる。

$$y \equiv \left\langle \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right\rangle \times \tau_{es} \quad (5.54)$$

$\tau_{es}$  は光子が電子により散乱を受ける平均回数である。式 (5.54) は、散乱平均回数が 1 より十分小さいときの定義である。コンプトン  $y$  パラメータは逆コンプトン散乱による光子系全体の平均のエネルギー変化率を表している。非相対論的電子による逆コンプトン散乱のコンプトン  $y$  パラメータを具体的に評価すると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \tau_{es} &= \sigma_T n_e L = 2 \times 10^{-3} \left( \frac{n_e}{10^{-3} \text{cm}^{-3}} \right) \left( \frac{L}{1 \text{Mpc}} \right) \\ y &= 8 \times 10^{-5} \left( \frac{k_B T}{5 \text{keV}} \right) \left( \frac{n_e}{10^{-3} \text{cm}^{-3}} \right) \left( \frac{L}{1 \text{Mpc}} \right) \end{aligned}$$

ここでは銀河団プラズマの典型的な値を代入した。銀河団中の高温プラズマの電子により宇宙マイクロ波背景放射光子が逆コンプトン散乱を受けて宇宙マイクロ波背景放射のスペクトルが歪む現象が、非相対論的電子による逆コンプトン散乱により引き起こされる天体現象の典型的例である。この現象は、始めて指摘した理論家の名前をつけてスニヤエフ・ゼルドビッチ効果 (Sunyaev-Zel'dovich Effect (SZE)) と呼ばれている。多くの SZE の研究論文ではコンプトン  $y$  パラメータの定義として  $k_B T$  の前の係数 4 を省いたものを用いているので注意が必要である。

#### 5.3.4 逆コンプトン散乱の放射強度スペクトル

電磁波が相対論的速度で運動する電子により逆コンプトン散乱を受けた結果の放射強度スペクトルを求める。入射電磁波の電磁場によって引き起こされる電子の運動を 2.16 節で求めた結果に代入することでスペクトルを求める。散乱前の電子の運動方向を  $z$  軸にとる。従って、散乱前の電

子の速度ベクトルは  $\vec{\beta}_0 = (0, 0, \beta_0)$  と書ける。また散乱前の電子の軌道は  $\vec{r}_0(t') = (0, 0, \beta_0 ct')$  と書ける。視線方向  $\vec{n}$  を  $y-z$  平面にとり  $\vec{n} = (0, \sin\theta, \cos\theta)$  と表す。入射電磁波の角振動数を  $\omega_0$ 、波数ベクトルを  $\vec{k}_0 = k_0(\sin\theta_k \cos\phi_k, \sin\theta_k \sin\phi_k, \cos\theta_k)$  と表す。真空中の電磁波の分散関係式より  $\omega_0 = k_0 c$  である。入射電磁波を偏光ベクトルが  $\vec{\beta} - \vec{k}$  平面内にある  $\vec{\varepsilon}_1 = (\cos\theta_k \cos\phi_k, \cos\theta_k \sin\phi_k, -\sin\theta_k)$  の成分とこの平面に直行する  $\vec{\varepsilon}_2 = (-\sin\phi_k, \cos\phi_k, 0)$  の成分の二つの成分に分解して以下解析する。電磁場中の荷電粒子の運動方程式 (5.19, 5.20) より電子に対する以下式を得る。

$$\frac{d\vec{\beta}}{dt} = -\frac{e}{\gamma m_e c} \vec{E} - \frac{e}{\gamma m_e c} \vec{\beta} \times \vec{B} + \frac{e}{\gamma m_e c} (\vec{E} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta}$$

まず入射電磁波が  $\vec{\varepsilon}_1$  の方向に偏光している場合を扱う。電磁波の電場・磁場は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E \sin(\omega_0 t' - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}(t')) \vec{\varepsilon}_1 \\ \vec{B} &= E \sin(\omega_0 t' - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}(t')) \vec{\varepsilon}_2 \end{aligned}$$

ここで電磁波の磁場振幅が電場振幅と等しいことを用いた。上記の電磁場の位相の中に現れる電子の軌道を  $\vec{r}(t') \sim \vec{r}_0(t')$  と近似する。これは  $\omega_{se}/\tilde{\omega}_0 \ll 1$  である限りよい精度の近似である。ここで  $\omega_{se} = eE/\gamma m_e c$ 、 $\tilde{\omega}_0 = \omega_0(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{k}/k) = \omega_0(1 - \beta \cos\theta_k)$  である。この近似を用いると入射電磁波の位相は  $\tilde{\omega}_0 t'$  と書ける。電磁波の電磁場により引き起こされる運動は、 $\omega_{se}/\tilde{\omega}_0$  の一次のオーダーまでで以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \beta_x &= \frac{\omega_{se}}{\tilde{\omega}_0} (\cos\theta_k - \beta_0) \cos\phi_k \cos\tilde{\omega}_0 t' \\ \beta_y &= \frac{\omega_{se}}{\tilde{\omega}_0} (\cos\theta_k - \beta_0) \sin\phi_k \cos\tilde{\omega}_0 t' \\ \beta_z &= -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\omega_{se}}{\tilde{\omega}_0} \sin\theta_k \cos\tilde{\omega}_0 t' + \beta_0 \\ \frac{x}{c} &= \frac{\omega_{se}}{\tilde{\omega}_0^2} (\cos\theta_k - \beta_0) \cos\phi_k \sin\tilde{\omega}_0 t' \\ \frac{y}{c} &= \frac{\omega_{se}}{\tilde{\omega}_0^2} (\cos\theta_k - \beta_0) \sin\phi_k \sin\tilde{\omega}_0 t' \end{aligned}$$

### 5.3 コンプトン散乱

$$\frac{z}{c} = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\omega_{se}}{\tilde{\omega}_0^2} \sin\theta_k \sin\tilde{\omega}_0 t' + \beta_0 t'$$

この結果を式 (2.53) に代入すれば、電磁波と相互作用する運動する電子から放射される二次波の電場のフーリエスペクトルが求まる。この結果を式 (2.34) に代入し両辺に天体までの距離の二乗を掛けることで単位周波数・単位時間・単位立体角あたりの放射強度  $dW/d\Omega d\omega dt'$  が求まる。ここで、式 (2.34) は  $\omega \geq 0$  のみを扱うことを仮定している。長時間平均を行うことで式 (2.53) の第一項を無視することができる。二次波の電場の各成分のフーリエスペクトルが以下のように求まる。

$$\begin{aligned} R\hat{E}_x(\omega, \theta_k, \phi_k, \vec{n}) &= -\frac{ie\omega}{4\pi c} e^{i\alpha} \frac{\omega_{se}}{\tilde{\omega}_0^2} (\cos\theta_k - \beta_0) \cos\phi_k \omega (1 - \beta_0 \cos\theta) \\ &\quad \times T' \text{sinc}(\omega(1 - \beta_0 \cos\theta) - \tilde{\omega}_0) \frac{T'}{2} \\ R\hat{E}_y(\omega, \theta_k, \phi_k, \vec{n}) &= \frac{ie\omega}{4\pi c} e^{i\alpha} \frac{\omega_{se}\omega}{\tilde{\omega}_0^2} \left[ -\cos\theta(\cos\theta - \beta_0)(\cos\theta_k - \beta_0) \sin\phi_k - \frac{1}{\gamma^2} \sin\theta \cos\theta \sin\theta_k \right] \\ &\quad \times T' \text{sinc}(\omega(1 - \beta_0 \cos\theta) - \tilde{\omega}_0) \frac{T'}{2} \\ R\hat{E}_z(\omega, \theta_k, \phi_k, \vec{n}) &= \frac{ie\omega}{4\pi c} e^{i\alpha} \frac{\omega_{se}\omega}{\tilde{\omega}_0^2} \left[ \sin\theta(\cos\theta - \beta_0)(\cos\theta_k - \beta_0) \sin\phi_k + \frac{1}{\gamma^2} \sin^2\theta \sin\theta_k \right] \\ &\quad \times T' \text{sinc}(\omega(1 - \beta_0 \cos\theta) - \tilde{\omega}_0) \frac{T'}{2} \end{aligned}$$

ここで  $\alpha$  は時間原点の取り方等に依存する位相であるが放射強度スペクトルには影響を与えないので具体的な形は示さなかった。この計算ではベッセル関数の公式

$$e^{iz\sin\phi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) e^{in\phi}$$

を用いて、 $|z| \ll 1$  としてベッセル関数をテイラー展開し最低次の項のみ残した。この展開で残る最低次の項は  $n = 0$  であるが、この時 Sinc 関数の性質から  $\omega = 0$  となり電場全ての成分のフーリエスペクトルが  $\omega^2$  に比例していることからゼロとなる。従って、有限の値を持つ最低次は  $n = 1$  であり、この項のみ残した。因みに  $n = -1$  も同じオーダーの結果を与えるが  $\omega > 0$  の範囲に限っているため無視した。この結果放射強度は以下で与

えられる周波数にデルタ関数的に集中することになる。

$$\omega = \omega_0 \frac{1 - \beta_0 \cos \theta_k}{1 - \beta_0 \cos \theta}$$

これは  $\theta = 0, \theta_k = \pi$  の時最大値をとり  $\gamma \gg 1$  の時  $\omega \sim 4\gamma^2 \omega_0$  である。またこの式は以下のように書き換えると物理的意味が理解できる。

$$\omega \gamma (1 - \beta_0 \cos \theta) = \omega_0 \gamma (1 - \beta_0 \cos \theta_k)$$

左辺は散乱波の周波数を電子静止系にローレンツ変換したものであり、右辺は入射波の周波数を電子静止系にローレンツ変換したものである。つまり、電子静止系では入射波と散乱波の周波数が変化しない、言い換えると散乱前後で光子のエネルギーが変化しない、ことを表わしている。これは即ち  $n = 1$  だけを残す近似がトムソン散乱極限に対応していることを意味する。ここで  $z$  は

$$z = \frac{\omega \omega_{se}}{\tilde{\omega}_0^2} \left[ \sin \theta (\cos \theta_k - \beta_0) \sin \phi_k - \frac{1}{\gamma^2} \cos \theta \sin \theta_k \right]$$

である。ここで前提として仮定してきた  $z \ll 1$  の正当性をチェックするには、鍵カッコ内の項は高々オーダー1の量であるから、係数のオーダーを調べれば十分である。先に示したように  $\omega \sim \gamma^2 \omega_0$  である。また  $\tilde{\omega} \sim \omega_0$  と近似してよい。これらを代入すると

$$\left( \frac{\omega \omega_{se}}{\tilde{\omega}_0^2} \right)^2 \sim \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\lambda_c}{\lambda_0 / \gamma^2} \frac{k_B T}{m_e c^2}$$

を得る。ここで  $e^2 / \hbar c = 1/137$  は微細構造定数であり、 $\lambda_c$  は電子コンプトン波長  $\lambda_0 / \gamma^2$  は散乱後の電磁波の波長を表わしている。また、 $cE^2$  はポインティングベクトルの振幅であり、入射電磁波の輻射強度  $I_\nu$  と  $cE^2 \sim I_\nu d\nu$  の関係がある。周波数巾を  $d\nu \sim \nu$  とし、 $I_\nu$  に対してレイリー・ジーンズ則を用いることで  $E^2 \sim k_B T / \lambda_0^3$  となる。ここで  $T$  は、入射電磁波の放射温度である。上記の式は、散乱後の波長が電子コンプトン波長より十分長く、入射電磁波の放射温度が電子静止質量より十分小さければ、トムソン散乱近似がよい近似で成り立つことを示している。また、 $\omega \omega_{se} / \tilde{\omega}_0^2 \sim \gamma^2 \omega_{se} / \tilde{\omega}_0$  であるから上記条件が満たされているとき  $\omega_{se} / \tilde{\omega}_0 \ll 1$  が必ず

### 5.3 コンプトン散乱

満たされ、運動方程式を  $\omega_{se}/\tilde{\omega}_0$  のオーダーで摂動展開して求めたことの正当性が保障される。

ここまでで求めた結果を用いると、二次波の放射強度のスペクトルは以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\hat{I}(\omega, \theta_k, \phi_k, \vec{n}) &= \frac{cR^2(|\hat{E}_x|^2 + |\hat{E}_y|^2 + |\hat{E}_z|^2)}{T'} \\ &= \frac{e^2\omega^4}{16\pi^2c^2} \frac{c\omega_{se}^2}{\tilde{\omega}^4} [(\mu - \beta_0)^2(\mu_k - \beta_0)^2\sin^2\phi_k \\ &\quad + (\mu_k - \beta_0)^2\cos^2\phi_k(1 - \beta_0\mu)^2 + \frac{1}{\gamma^4}\sin^2\theta\sin^2\theta_k \\ &\quad + \frac{2}{\gamma^2}\sin\theta(\mu - \beta_0)(\mu_k - \beta_0)\sin\theta_k\sin\phi_k] \\ &\quad \times T' \text{sinc}^2(\omega(1 - \beta\mu) - \tilde{\omega}_0) \frac{T'}{2}\end{aligned}$$

ここで  $\mu = \cos\theta$ ,  $\mu_k = \cos\theta_k$  である。これを入射電磁波の角度分布  $\theta_k, \phi_k$  について平均する。ここでは等方分布を仮定する。この時、散乱波の周波数は  $\omega$  で固定する。以上から以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}\hat{I}(\omega, \vec{n}) &= \frac{e^2\omega^2}{32\pi c^2} \frac{c\omega_{se}^2}{\omega_0} \frac{1}{\beta_0} \left[ \frac{1}{\beta_0^2} \left( 1 - \frac{2}{\gamma^2} \frac{1}{1 - \beta_0\mu} + \frac{1}{\gamma^4} \frac{1}{1 - \beta_0\mu} \right) \right. \\ &\quad \times \frac{1}{\omega_0^2} \left( 1 - \frac{2}{\gamma^2} \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{1 - \beta_0\mu} + \frac{1}{\gamma^4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{(1 - \beta_0\mu)^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\omega_0^2} \left( 1 - 2\gamma^2 \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{1 - \beta_0\mu} + \frac{1}{\gamma^4} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{(1 - \beta_0\mu)^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma^4} \frac{1}{\beta_0^2} \left( -1 + \frac{2}{1 - \beta_0\mu} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{(1 - \beta_0\mu)^2} \right) \\ &\quad \left. \times \frac{1}{\omega_0^2} \left( -1 + \frac{2\omega_0}{\omega} \frac{11}{1 - \beta_0\mu} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{(1 - \beta_0\mu)^2} \right) \right]\end{aligned}$$

ここで sinc 関数の積分から散乱波の周波数及び進行方向と入射波の周波数及び進行方向の間の以下の関係式を得る。

$$\omega(1 - \beta_0\cos\theta) = \omega_0(1 - \beta_0\cos\theta_k)$$

ここでは  $\gamma \gg 1$  の極限で  $\omega \gg \omega_0$  の場合を考えているので  $1 - \beta_0\mu \sim \frac{1}{2\gamma^2}$

である。このことを考慮して鍵カッコ内のオーダー1の項のみ残すと以下の結果を得る。

$$\hat{I}(\omega, \vec{n}) = \frac{e^2 \omega^2 c \omega_{se}^2}{32\pi c^2 \omega_0^3} \left( 2 - \frac{2}{\gamma^2} \frac{1}{x} + \frac{1}{\gamma^4} \frac{1}{x^2} \right)$$

ここで  $x \equiv 1 - \beta_0 \mu$  である。次に電子の速度の方向分布について平均する。ここでは等方分布を仮定する。その為には視線方向  $\vec{n}$  を  $z$  にとり  $\vec{\beta}$  の方向について平均すればよいが、ここまでの計算では  $\vec{\beta}$  を  $z$  にとり  $\vec{n}$  は  $y-z$  平面内にとっていた。しかし、入射波の方向分布について平均した結果は  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{n}$  以外特別な方向は存在せず、また  $\hat{I}(\omega, \vec{n})$  は  $\phi$  に依存しないため、 $\hat{I}(\omega, \vec{n})$  を  $\vec{n}$  を  $z$  軸とした時の結果とみなしても差支えない。したがって、電子の速度の方向分布についての平均は  $\theta, \phi$  についての平均を計算することで行える。以下では  $\theta$  の代わりに  $\mu$  を積分変数として扱う。散乱波と入射波の周波数の間の関係式から次の式をえる。

$$\mu = \frac{1}{\beta_0} \left( 1 - \frac{\omega_0}{\omega} (1 - \beta_0 \mu_k) \right)$$

この式から  $\omega = \omega_0$  の時  $\mu = \mu_k$  であり、 $-1 \geq \mu \geq 1$  の全ての範囲をとれる。一方、今扱っている  $\omega > \omega_0$  の範囲では、 $\mu$  の最大値は1であるが最小値は  $\mu_k = -1$  の時でありその値は  $\mu_m = 1/\beta_0(1 - \omega/\omega_0(1 + \beta_0)) \sim 1 - 2\omega/\omega_0$  である。ここで  $\beta_0 \sim 1$  を用いた。したがって、 $\mu$  の積分範囲は  $\mu_m$  から1である。ここまで議論を元に電子の方向分布に対する平均を実施すると以下の結果をえる。

$$\hat{I}(\omega) = 2r_0^2 \frac{\langle S(\omega_0) \rangle}{\omega_0} \hat{\omega} [1 + \hat{\omega} + 2\hat{\omega} \ln \hat{\omega} - 2\hat{\omega}^2]$$

ここで

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{4\gamma^2 \omega_0}$$

で電子のローレンツ因子が  $\gamma$  で入射波の周波数が  $\omega_0$  の時、散乱波がとりうる最大の周波数で規格化した散乱波の周波数である。また  $r_0$  は古典電子半径であり

### 5.3 コンプトン散乱

$$\langle S(\omega_0) \rangle = \frac{cE^2}{8\pi}$$

は入射電磁波のポインティングベクトルの時間平均である。この結果からローレンツ因子が  $\gamma$  で等方分布をした電子により同じく等方分布をした周波数  $\omega_0$  の電磁波が逆コンプトン散乱されたときの散乱波の周波数分布が以下の式で与えられることがわかる。

$$f(\hat{\omega}) = \hat{\omega} [1 + \hat{\omega} + 2\hat{\omega} + 2\hat{\omega}\ln\hat{\omega} - 2\hat{\omega}^2]$$

同様のことを入射電磁波が  $\vec{e}_2$  の方向に偏光している場合について求める。この時電磁波の磁場は  $-\vec{e}_1$  の方向に偏光している。途中の計算は省略するが、二次波の電場の各成分のフーリエスペクトルは以下のように求まる。

$$\begin{aligned} R\hat{E}_x(\omega) &= \frac{ie}{4\pi c} e^{i\Phi} \frac{\omega_{se}\omega^2}{\omega_0^2} \frac{1 - \beta_0\mu}{1 - \beta_0\mu_k} \sin\phi_k T' \operatorname{sinc} \frac{T'}{2} (\omega(1 - \beta_0\mu) - \tilde{\omega}) \\ R\hat{E}_y(\omega) &= \frac{ie}{4\pi c} e^{i\Phi} \frac{\omega_{se}\omega^2}{\omega_0^2} \frac{\mu - \beta_0}{1 - \beta_0\mu_k} (-\cos\theta) \cos\phi_k T' \operatorname{sinc} \frac{T'}{2} (\omega(1 - \beta_0\mu) - \tilde{\omega}) \\ R\hat{E}_z(\omega) &= \frac{ie}{4\pi c} e^{i\Phi} \frac{\omega_{se}\omega^2}{\omega_0^2} \frac{\mu - \beta_0}{1 - \beta_0\mu_k} (\sin\theta) \cos\phi_k T' \operatorname{sinc} \frac{T'}{2} (\omega(1 - \beta_0\mu) - \tilde{\omega}) \end{aligned}$$

これから長時間平均した二次波のスペクトルとして

$$\begin{aligned} \hat{I}(\omega, \theta_k, \phi_k, \vec{n}) &= \frac{e^2}{16\pi^2 c^2} \frac{\omega^4 c \omega_{se}^2}{\omega_0^4} \left[ \sin^2\phi_k \frac{(1 - \beta_0\mu)^2}{(1 - \beta_0\mu_k)^2} + \cos^2\phi_k \frac{(\mu - \beta_0)^2}{(1 - \beta_0\mu_k)^2} \right] \\ &\quad \times T' \operatorname{sinc}^2 \frac{T'}{2} (\omega(1 - \beta_0\mu) - \tilde{\omega}) \end{aligned}$$

を得る。これを入射電磁波の入射方向について平均した結果は以下のようになる。

$$\hat{I}(\omega, \vec{n}) = \frac{e^2}{32\pi c^2} \frac{\omega^2 c \omega_{se}^2}{\omega_0^3} \left[ 2 - \frac{2}{\gamma^2} \frac{1}{x} + \frac{1}{\gamma^4} \frac{1}{x^2} \right]$$

ここで  $x = 1 - \beta_0\mu$  である。これは先に求めたもうひとつの偏光に対して得られた結果と同じであり、二次波の放射強度スペクトルも同じ結果になることは自明である。

次に電子のエネルギー分布が式 (5.28) で与えられる時の逆コンプトン散乱

による放射スペクトルを計算する。このために  $\gamma$  による積分を  $\hat{\omega}$  に変換する。ここで  $\omega$  は固定しているため  $\gamma$  に下限値  $\gamma_m = (\omega/4\omega_0)^{1/2}$  が存在する。したがって、 $\gamma$  の下限値は  $\gamma_l = \max(\gamma_m, \gamma_1)$  で与えられる。また  $\gamma_l \ll \gamma_2$  とすることで  $\hat{\omega}$  の積分の下限を 0 と近似することができる。積分範囲の上限は  $\gamma_l$  の時で  $\hat{\omega} = 1$  である。以上から様々なエネルギーを持つ電子による逆コンプトン散乱の結果として得られるスペクトルは以下のように求まる。

$$\frac{dW(\nu, \nu_0)}{dt d\Omega d\nu} = \frac{1}{4} r_0^2 \langle S(\nu_0) \rangle N_0 \gamma_0^{p-1} \nu_0^{\frac{p-3}{2}} F(p) \nu^{-(p-1)/2}$$

$$F(p) = \frac{2^{p+3}(p^2 + 4p - 11)}{(p+3)^2(p+1)(p+5)}$$

ここで  $\frac{dW(\nu, \nu_0)}{dt d\Omega d\nu} d\nu = \frac{dW(\omega, \omega_0)}{dt d\Omega d\omega} d\omega$  を用いて変数を角周波数から周波数に変換した。最後に色々な周波数の入射波の逆コンプトン散乱の放射強度を重ね合わせれば、ゴールである逆コンプトン散乱の放射スペクトルが完成する。まず入射波として CMB のような温度  $T$  の黒体放射の場合を考える。この時

$$\langle S(\nu_0) \rangle = 4\pi \frac{2h\nu_0^3/c^2}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu_0$$

である。右辺の  $4\pi$  は、プランク関数が単位立体角あたりの放射強度であるのに対してポインティングベクトルが立体角で積分した結果であることからくる。散乱波の周波数が  $\nu$  となるためには入射波の周波数に下限が存在する。以下の条件を満たしていることが必要条件である。

$$\nu_0 > \frac{\nu}{4\gamma_1^2}$$

以下、 $\nu/4\gamma_1^2 \ll k_B T$  となる  $\nu$  の範囲を扱うとして  $\nu_0$  の積分範囲を 0 から無限大とする。以上から単位周波数・単位時間・単位立体角あたりの逆コンプトン散乱の放射強度スペクトルとして以下の結果を得る。

$$\frac{dW}{dt d\Omega d\nu} = 2\pi r_0^2 \frac{N_0 \gamma_0^{p-1}}{c^2} h^{-\frac{p+3}{2}} (k_B T)^{\frac{p+5}{2}} F(p) \zeta\left(\frac{p+5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+5}{2}\right) \nu^{-(p-1)/2}$$

ここでガンマ関数、ゼータ関数は以下のように定義される。

## 5.4 チェレンコフ放射

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

## 5.4 チェレンコフ放射

真空中を等速直線運動をする荷電粒子が作る電磁場は速度場のみであり、電磁波を放射しない。しかし、光の屈折率が1以上の媒質の場合には相対論的速度で等速直線運動する荷電粒子から電磁波の放射が起きる。このとき荷電粒子の速度が光の位相速度を超えることが放射が起きるポイントである。これがチェレンコフ放射 (Cherenkov radiation) である。チェレンコフ放射は、ニュートリノ観測装置や TeV ガンマ線観測装置のように直接捉えることが困難な物理量を観測する手法を我々に提供してくれている。

屈折率が  $n_r > 1$  の媒質中では電磁波の位相速度が  $c/n_r$  と真空中の値より遅くなる。式 (2.14)、(2.15) の真空中の4元ポテンシャルの満たす方程式中の  $c$  を  $c/n_r$  に置き換えた式が4元ポテンシャルを求める方程式となる。その結果速度場の電場成分は以下ようになる。

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = q \left[ \frac{(\vec{n} - n_r \vec{\beta})(1 - n_r^2 \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right] \quad (5.55)$$

$$\kappa = 1 - n_r \vec{n} \cdot \vec{\beta} \quad (5.56)$$

$n_r > 1$  の時、荷電粒子の速度が  $c$  に近づくと  $\kappa = 0$  となりうる。 $\vec{n}$  と  $\vec{\beta}$  のなす角を  $\theta$  とするとき、 $\kappa = 0$  となる角度は、

$$\cos\theta = \frac{1}{n_r \beta} \quad (5.57)$$

で求まる。これを臨界角と呼ぶ。これを満たす角度が存在するためには  $n_r \beta > 1$  でなければならない。屈折率の1からのズレを  $\Delta n_r$  とする。たとえば空気では、 $\Delta n_r \sim 0.0003$  で1より十分小さい。そこで  $\Delta n_r \ll 1$ 、 $\gamma \gg 1$  の極限で考えると、

$$\gamma > \frac{1}{\sqrt{2\Delta n_r}} \sim 40 \left( \frac{\Delta n_r}{0.0003} \right)^{-0.5} \quad (5.58)$$

が  $\kappa = 0$  となる角度が存在する条件である。このとき臨界角は

$$\theta \sim \sqrt{2\Delta n_r - \frac{1}{\gamma^2}} \quad (5.59)$$

であり、 $\gamma^2 \gg \Delta n_r$  の極限で  $\theta \sim \sqrt{2\Delta n_r} \sim 1(n_r/0.0003)^{0.5}$  度となる。

真空中の速度場は、距離の二乗に反比例して振幅が減少するので無限遠までエネルギーを運搬することが出来なかった。しかし、屈折率が1より大きい媒質中では、 $\kappa = 0$  となる点では速度場が非常に大きくなり、詳細は省くが無限遠へのエネルギー伝搬量が有限値をとりうる。また、この点では、 $\vec{n} \cdot (\vec{n} - n_r \vec{\beta}) = \kappa = 0$  であり、電場の方向  $\vec{n} - n_r \vec{\beta}$  が進行方向  $\vec{n}$  と直行している。したがって、 $\kappa = 0$  を満たす方向に伝わる速度場は、輻射と同じの横波である。これがチェレンコフ放射である。