

# 解析力学

服部 誠

2024 年 4 月 24 日



何故、解析力学を勉強する必要があるのだろうか？ 良く聞く回答は、量子力学や場の量子論を学ぶために必須の道具だからというものだと思う。乱暴な言い方であることを承知で言及すると、初等的な量子力学を学ぶだけであれば、系の力学的エネルギーをハミルトニアンと呼ぶということさえ承知すれば、これから半年かけてこの講義で教授される内容を理解することは量子力学を学上で必須ではない。逆に言うと仮にこの講義の内容について行けなくても初等量子力学の学習に支障は無いので不安を感じる必要はない。一方、場の量子論の学習には、解析力学の理解が欠かせない。では、解析力学は、将来場の量子論を学び研究のツールとして活用したいと考えている者が、将来のために我慢して学習しなければならない科目なのであろうか？そもそも何故、解析力学は量子論と密接な結びつきを持っているのだろうか？

冒頭に少々挑発的なことを書いたが、私自身初めて解析力学に出会った時、理論体系の美しさに魅了された。講義で学習するまで待ちきれず、私が学部2年生の時、まだ出版間もなかった高橋康氏の「量子力学を学ぶための解析力学入門」、「量子場を学ための解析理学入門」を読み漁った。読後は、浅はかにも新しいものの見方を身につけて賢くなったように思ったものだ。丁度、そのタイミングで解析力学が具体的に役にたったこともあった。宗教団体とは知らずにノコノコについて行った集会で”墮落して禁断の果実を口にしたアダムとイブの犯した原罪を償うために入信して一生捧げなければならぬ”と言う内容の動画を見せられた。そこで”最小作用の原理に従って、最もエネルギー消費が低い経路を選んで運動しようとする粒子の集合でできた生物である人間が墮落し楽な道を進もうとするのは自然の摂理であり、罪でも何でも無い”と反論して逃げ帰ってきた。勿論これが屁理屈であることは重々承知していた。

力学系の解析に解析力学が直接役に立つ場面も多数存在する。その例の一つが、断熱不変量である。熱力学でゆっくり膨張する箱に閉じ込められた気体の熱力学状態の変化を断熱変化として扱って良いと習うが、ゆっくり膨張するとはどのくらいゆっくりだったら良いのか？どうしてそれが保証されているのか？ の根拠が断熱不変量と絡めて節 4.5.3 で解説されてい

る。あるいは、銀河の密度分布の進化や磁場中のプラズマの運動など非線型性が強く現れている系の記述に断熱不変量は絶大な威力を発揮する。また、節 3.8 で紹介するビリアル定理は、20世紀初頭に人類が初めて暗黒物質の存在を突き止めた時に用いられた定理であり、現在も宇宙の物質構成の研究に広く用いられている。一方、副読本として指定した須藤氏の”解析力学・量子論”の6章やC.11にも記載があるように天体力学や力学系の高い精度での数値解法分野で解析力学が直接役に立っている。しかし、これらの分野には、これからこの講義を受ける殆どの学生にとって生涯関わらないと思われる。直接役に立つ分野もあるのだと言われても自分に直接関係がなければ興味を示すことは難しいであろう。

冒頭で述べた、解析力学と量子論との結びつきの考察に戻る。大学院入試の面接で面接官から「君は物理の中で何が一番好きか？」と聞かれ私は「解析力学」と即答すると、「では、座標とそれに共役な正準運動量のポアソン括弧式は1になるが、それは量子力学における位置と共役な運動量の交換関係式とプランク定数分の違いを除いて良く似ているが、それは偶然か？それも必然的理由があると思うか？」と聞かれた。私のその時の回答は「確かにそうですね。ただ、そこまで深く考えたことが無いので分からない。」でした。それ以来、今に至るまでおりある毎にこの質問を反芻して、回答を考え続けている。実は、このテキストの1章は、この質問への回答を見つける知的冒険という方針を柱に書いた。ここに書かれていることと同様の記述を他に見たことは無い。納得できない人も現れると思う。その時は、私の考えに従う必要は無く、他の教科書や自分の考えに従って考えを構築して行けば良い。私としては、直接私に反論をぶつけてもらうことが、自分の考えを深める、あるいは正す上で役に立つので大いに歓迎する。須藤氏の教科書を副読本として指定したのは、解析力学に対する自問自答の跡が要所所に吐露されているからである。学ぶことで一番大切なことは、既知の事柄を覚えて使えるようになることでは無く、自問自答を繰り返して自分の世界を構築しようとする学びの姿勢を身につけることだと信じている。

能書きは、ともかく第二段落目に書いたように解析力学は美しく味わい深い学問なので、これからの半期十分堪能して欲しいと思う。

# 目次

第 1 章	変分原理	1
1.1	Euler の微分方程式	1
1.1.1	適応例：直線	4
1.1.2	適応例：最速降下線	5
1.2	Lagrange の未乗数法	7
1.3	Fermat の原理	11
1.3.1	平面波・アイコナール	11
	アイコナールがスカラーであることの具体的座標 変換を用いた検証	13
1.3.2	Fermat の原理	14
1.3.3	Fermat の原理：重力レンズ効果	20
1.3.4	何故光は与えられたゴールに向かって自ら進むべき道をゴール到達前に知っているのか	22
1.4	Maupertuis の原理	22
1.4.1	Maupertuis の原理	23
1.4.2	自由粒子の運動への応用	24
1.4.3	保存力場中を運動する粒子への応用	25
1.5	Lagrange 関数	30
1.6	位相空間	35
1.7	Euler-Lagrange 方程式	38
1.7.1	Euler-Lagrange 方程式	38

1.7.2	Lagrange 形式の非慣性系への拡張 . . . . .	40
1.7.3	総括 . . . . .	47
1.8	拘束条件がある系の運動の扱い . . . . .	47
1.8.1	坂を転がり落ちる車輪 . . . . .	48
1.8.2	拘束条件がある系の運動の扱い . . . . .	50
<b>第 2 章</b>	<b>保存量</b>	<b>53</b>
2.1	系の対称性と保存量 . . . . .	53
2.1.1	時間推進対称性：エネルギー . . . . .	53
2.1.2	空間推進対称性：運動量 . . . . .	54
2.1.3	座標回転対称性：角運動量 . . . . .	56
2.2	循環座標 . . . . .	58
2.3	ネーターの定理 . . . . .	59
<b>第 3 章</b>	<b>正準形式</b>	<b>67</b>
3.1	Legendre 変換 . . . . .	67
3.2	正準形式 . . . . .	68
3.3	正準変換と母関数 . . . . .	71
3.3.1	Lagrangian の任意性 . . . . .	71
3.3.2	正準変換 . . . . .	75
3.3.3	変換の母関数 . . . . .	75
3.3.4	例 . . . . .	78
3.3.5	母関数の拡張 . . . . .	80
3.3.6	恒等変換 . . . . .	81
3.3.7	無限小変換 . . . . .	82
3.4	ポアッソン括弧式 . . . . .	83
3.5	ネーターの定理 . . . . .	83
3.6	非慣性系の正準形式 . . . . .	87
3.7	Liouville の定理 . . . . .	89
3.8	ビリアル定理 . . . . .	90

	3.8.1	自己重力平衡系 . . . . .	90
	3.8.2	調和振動子 . . . . .	93
	3.8.3	一般の保存力場 . . . . .	95
3.9		電磁場中の荷電粒子の運動を記述する正準形式 . . . . .	96
<b>第 4 章</b>		<b>Hamilton-Jacobi 理論</b>	<b>99</b>
4.1		アイコナル方程式 . . . . .	99
4.2		Hamilton-Jacobi 方程式 . . . . .	100
4.3		Hamilton の特性関数 . . . . .	102
4.4		作用変数と角変数 . . . . .	105
	4.4.1	ケプラー運動の作用変数と角変数 . . . . .	107
4.5		断熱不変量 . . . . .	113
	4.5.1	一般の周期運動 . . . . .	113
	4.5.2	調和振動子 . . . . .	113
	4.5.3	平行な壁の間を運動する自由粒子 . . . . .	116
	4.5.4	応用例：磁気ミラー効果 . . . . .	118
<b>付録 A</b>		<b>フーリエ変換</b>	<b>125</b>
A.1		デルタ関数 . . . . .	125
A.2		フーリエ変換 . . . . .	128
A.3		たたみ込み定理 . . . . .	129
A.4		ウイナー・ヒンチンの定理及びパーシバルの公式 . . . . .	130
A.5		観測の不確定性原理 . . . . .	132
A.6		Heisenberg の不確定原理と物質の二重性 . . . . .	135
<b>付録 B</b>		<b>光の回折</b>	<b>137</b>
<b>付録 C</b>		<b>An example of the Legendre transformation led paradigm shift</b>	<b>141</b>
C.1		Ferromagnetic phase transition . . . . .	141
<b>付録 D</b>		<b>Boltzmann Equation</b>	<b>147</b>

---

付録 E	非圧縮性流体	149
付録 F	電磁場ポテンシャルのゲージ変換自由度	155



## 第 1 章

# 変分原理

粒子の運動は、運動方程式の解として与えられることを 1 年生の力学で習った。ある時刻の粒子の位置と速度が与えられると次の瞬間の粒子の速度と位置が、運動方程式から求められる。一方、粒子の運動の軌跡（位置と速度の時間発展）をその始点と終点の粒子の位置と座標を指定することで大局的に求める方法が変分原理である。

### 1.1 Euler の微分方程式

力学の問題への変分原理の適応について解説する前に、変分法の典型的な問題への応用例を解説する。独立変数  $x$  とその関数を  $y$ 、 $y$  の  $x$  による導関数を  $y' = dy/dx$  とする。関数  $f(y, y')$  は、 $y(x), y'(x)$  を通じて独立変数  $x$  に依存し、 $x$  に陽に依存しない関数とする。この関数の始点  $a$  から終点  $b$  の間での積分

$$I = \int_a^b f(y, y') dx, \quad (1.1)$$

を定義する。始点と終点での  $y, y'$  の値を固定し、その間での  $y = y(x)$  の関数形を変化させると積分  $I$  の値も変化する。

積分  $I$  が停留値を取る関数系  $y(x)$  が満たす方程式を導出する。図 1.1 に示したように実線で示した経路から微小な変分  $\delta y(x)$ ,  $\delta y'(x)$  を与える。そ

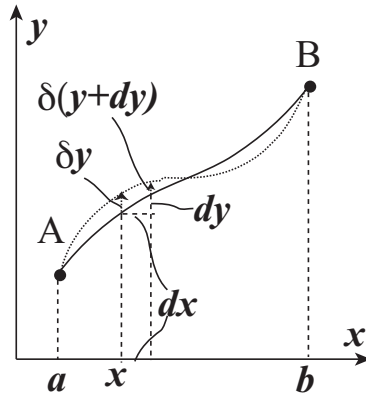


図 1.1 変分。

の結果、積分値の変分量は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_a^b f(y(x) + \delta y(x), y'(x) + \delta y'(x)) dx - \int_a^b f(y(x), y'(x)) dx \\ &= \int_a^b dx \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right).\end{aligned}\quad (1.2)$$

ここで

$$\delta \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta y).\quad (1.3)$$

が成り立ち導関数の変分と変分量の導関数が等しいことを示す。この関係式は導関数の定義を用いて以下のように証明できる。

$$\begin{aligned}\delta \left( \frac{dy}{dx} \right) &= \delta \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{y(x + \Delta x) + \delta y(x + \Delta x) - (y(x) + \delta y(x))}{\Delta x} - \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y(x + \Delta x) - \delta y(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{d}{dx} \delta y(x).\end{aligned}\quad (1.4)$$

関係式 (1.3) を用いると、式 (1.2) の右辺第二項を部分積分できる。

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx + \left[ \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \delta y dx.\end{aligned}\quad (1.5)$$

ここで始点、終点を固定していること即ち  $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$  を用いた。図 1.1 の実線が積分  $I$  の停留値を取る軌跡である時、任意の変分  $\delta y$  に対して変分  $\delta I$  がゼロになる。以下の方程式を満たす  $y(x)$  が積分  $I$  の停留値を与える。

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (1.6)$$

この方程式を Euler の微分方程式と呼ぶ。

上の導出過程で、任意の変分  $\delta y(x)$  に対して式  $\delta I = 0$  であるためには Euler の方程式 (1.6) が成り立たなければならない、という論法に今一納得がいかない人のためにもう少し解説を試みる。具体的なイメージがつきやすくするように式 (1.5) を以下のように離散積分で表す。

$$\delta I = \sum_{n=1}^N \left[ \frac{\partial f(y(x_n), y'(x_n))}{\partial y(x_n)} - \frac{d}{dx_n} \left( \frac{\partial f(y(x_n), y'(x_n))}{\partial y'(x_n)} \right) \right] \delta y(x_n) \Delta x \quad (1.7)$$

ここで

$$x_n = a + \left( n - \frac{1}{2} \right) \Delta x, \quad (1.8)$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}, \quad (1.9)$$

であり  $x_n$  は  $a + (n-1)\Delta x$  と  $a + n\Delta x$  の midpoint の  $x$  座標である。式 (1.7) は、各微小間隔での積分値を環数値を離散化した微小間隔の midpoint での関数値で一定として離散積分で近似した事に対応する。任意の変分  $\delta y(x)$  を選択できるということは、異なる  $n$  に対する  $\delta y(x_n)$  は独立でそれぞれ任意の値の微小量をとることができることを意味する。例えば、 $\delta y(x_n)$  が  $n = m$  の時のみ有限の値をとりその他はゼロであるような場合もありうる。即ち  $\delta y(x_m) \neq 0$  で  $n \neq m$  の時  $\delta y(x_n) = 0$  と選ぶということである。この時、式 (1.7) がゼロであるためには、

$$\frac{\partial f(y(x_m), y'(x_m))}{\partial y(x_m)} - \frac{d}{dx_m} \left( \frac{\partial f(y(x_m), y'(x_m))}{\partial y'(x_m)} \right) = 0, \quad (1.10)$$

が成り立たねなければならない。これを  $m = 1$  から  $m = N$  まで逐次繰り返すことで全ての  $x_n$  に対して

$$\frac{\partial f(y(x_n), y'(x_n))}{\partial y(x_n)} - \frac{d}{dx_n} \left( \frac{\partial f(y(x_n), y'(x_n))}{\partial y'(x_n)} \right) = 0, \quad (1.11)$$

が成り立たなければならぬことが納得できる。式 (1.6) の導出は、 $N \rightarrow \infty$  の極限をとり連続無限個に分割した場合に該当する。

### 1.1.1 適応例：直線

平面内の二点  $A(a, b)$ 、 $B(c, d)$  を結ぶ曲線の長さが最短になる経路を求めよう。 $x-y$  平面内の微小距離離れた二点間の距離は  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  である。したがって、二点間の距離を  $I$  とすると以下の式が二点  $A, B$  間の距離を求める式となる。

$$I = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^c \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (1.12)$$

この例では、Euler の微分方程式の関数  $f$  は、 $\sqrt{1 + y'^2}$  である。Euler の微分方程式に代入すると二点間の距離を最短にする  $y$  の満たす方程式が得られる。

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0. \quad (1.13)$$

積分すると積分定数  $C$  を用いて

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C, \quad (1.14)$$

を得る。これから  $C \neq \pm 1$  であれば

$$y' = \frac{\pm C}{\sqrt{1 - C^2}} = C', \quad (1.15)$$

であり右辺は定数  $C'$  である。したがって、

$$y = C'x + D, \quad (1.16)$$

が解となる。積分定数  $C', D$  は、二点 A, B を始点、終点とすることから決まる。例えば、点 A を  $(a, b)$ 、点 B を  $(c, d)$  とすると

$$C' = \frac{d-b}{c-a}, \quad (1.17)$$

$$D = \frac{bc-da}{c-a}, \quad (1.18)$$

となる。ここで  $a \rightarrow c$  の時、 $C'$  は発散する。これは、上で除外した  $C = \pm 1$  の場合に該当する。これは、 $y$  軸に平行な直線である。式 (1.16) は、直線の方程式であり、二点間を結ぶ最短経路が直線であることが示された。

### 1.1.2 適応例：最速降下線

重力加速度  $g$  の元で自由落下する質点が、初速度ゼロで与えられた二点間を最短で移動する経路を求める。重力の方向即ち鉛直下方を  $y$  にとり水平方向を  $x$  軸にとる。質点の運動は  $x-y$  平面内に限られるとし、点  $(0,0)$  から点  $(a,0)$  への移動を考える。摩擦などによるエネルギー散逸は無視できるとする。始点から高さ  $y$  落下した時の速度はエネルギー保存則から  $\sqrt{2gy}$  である。経路上の微小距離離れた二点間の距離は  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+y'^2}dx$  でありこの間を移動する時間は

$$\frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx,$$

である。二点間の移動にかかる時間は

$$I = \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx,$$

で計算される。この積分の被積分関数を Euler の微分方程式に代入して  $y$  が満たす方程式を求める。

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} \right) + \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}} = 0. \quad (1.19)$$

整理すると以下の方程式を得る。

$$2yy'' + 1 + y'^2 = 0. \quad (1.20)$$

ここで  $y' = p$  とおく。すると

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

となる。これらを用いて方程式 (1.20) を書き換えると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} 2yp \frac{dp}{dy} + 1 + p^2 &= 0, \\ \frac{2pdp}{1+p^2} + \frac{dy}{y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

これを積分すると積分定数  $C$  を用いて

$$y(1+y'^2) = C, \quad (1.22)$$

を得る。これから以下の方程式を得る。

$$\sqrt{\frac{y}{C-y}} dy = dx. \quad (1.23)$$

ここで

$$y = C \sin^2 \frac{\theta}{2} = C(1 - \cos \theta), \quad (1.24)$$

と置いて方程式 (1.23) に代入すると

$$dx = \frac{C}{2}(1 - \cos \theta) d\theta, \quad (1.25)$$

を得る。これは簡単に積分ができて

$$x = \frac{C}{2}(\theta - \sin \theta) + C', \quad (1.26)$$

が解である。始点では、 $x = 0$  かつ  $y = 0$  なので  $\theta = 0$  かつ  $C' = 0$  である。終点では、 $y = 0$  であるので  $\theta = 2\pi$  である。終点で  $x = a$  であることから

$$a = \frac{C}{2}2\pi,$$

となり積分定数  $C$  が求まる。以上から最速降下線は

$$x = \frac{a}{2\pi}(\theta - \sin \theta), \quad (1.27)$$

$$y = \frac{a}{2\pi}(1 - \cos \theta), \quad (1.28)$$

で与えられる曲線である。この曲線はサイクロイドと呼ばれている。図 1.2 にサイクロイド曲線を描いた。



図 1.2 最速降下線：サイクロイド。

問：球面上の二点を結ぶ最短経路を求めよ

## 1.2 Lagrange の未乗数法

積分 (1.1) が停留値をとる関数  $y(x)$  を求める問題で、関数に補助的な制約が課せられている場合について扱う。例えば、以下のような制約である。

$$\int_a^b g(y, y') dx = \ell. \quad (1.29)$$

ここで  $\ell$  は定数である。関数の変分  $\delta y$ ,  $\delta y'$  は、この制約の元でとる必要がある。つまり変分は

$$\delta \int_a^b g(y, y') dx = 0, \quad (1.30)$$

を満たすものでなければならない。制約条件が一つ掛かると自由度が一つ減少する。例えば、10個の好きな整数を自由に選択できる場合は、1回目から10回目まで毎回なんの制約もなく好きな整数を選択でき、自由度は10である。しかし、足して10になるようにしなさいという制約を課せられると、9回目までは自由に選択できるが、最後の10回目は1回目から9回目までに選択した整数の総和と10の差で自動的に決まってしまう、選択の余地が無い。自由度は、制約条件の数1減少して9になる。

イメージが付きやすくなるように制約 (1.30) を紐の全長が  $l$  であるという制約とする。紐の長さは減少させることができないので、始点から逐次  $y(x)$  を決定して途中で  $l$  を超えてしまうと、制約条件を満たすことができない。常にそこまでの長さの総和が  $l$  を超えなていないことを意識しながら  $y(x)$  を決定していく必要があり、上述した総和が  $l$  になるように  $l$  の整数を選択する例と比べて単純では無い。式 (1.1) で定義される量の変分をゼロにする  $y(x)$  を制約 (1.29) を満たすよう決定するのは困難な作業である。そこで以下のように定義される新たな関数  $h(y, y')$  を導入する。

$$h(y, y') = f(y, y') + \lambda g(y, y'). \quad (1.31)$$

ここで  $\lambda$  は、任意の定数で

$$\delta \int_a^b h(y, y') = 0, \quad (1.32)$$

から決定される。式 (1.31) に現れた方程式 (1.32) の解として決定されるまで未定である乗数  $\lambda$  を Lagrange multiplier と呼ぶ。式 (1.30) から式 (1.1) の変分をゼロにする  $y(x)$  は、式 (1.32) も自動的に満たす。Lagrange multiplier を制約条件に掛けた項を足し合わせた量の変分をとることで得られる方程式から  $\lambda$  を求めることで制約条件が自動的に満たされる。そこで  $h$  を Euler の微分方程式に代入して制約条件のことを気にせず方程式の解を求めれば良い。制約条件の存在は、未定乗数に押し付けてしまう方法である。

例として長さ  $l$  の糸の両端を  $(-x_0, 0)$ ,  $(x_0, 0)$  に固定し吊るした結果つり合いの状態にある時の糸の形を求める。要するにしめ縄をつるした時の形を求める問題である。重力加速度を  $g$  とし鉛直下方を  $y$  軸の正の向きとし、水平方向に  $x$  軸をとる。糸の単位長さ辺りの質量は  $\rho$  で一様であるとする。重力の位置エネルギーは

$$U = - \int_{(-x_0, 0)}^{(x_0, 0)} \rho ds gy, \quad (1.33)$$

である。ここで  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$  は糸に沿った微小線素の長さである。釣り合いの状態は、位置エネルギーが最小になる状態であるから、この  $U$  の変分をゼロにする  $y(x)$  が分かれば知りたい糸の形状が分かる



事になる。糸の形状決定にとって、 $g, \rho$  は本質的では無いので以後の計算では落とす。一方制約条件は以下のものである。

$$\int_{(-x_0,0)}^{(x_0,0)} ds = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1+y'^2} dx = \ell. \quad (1.34)$$

以上からこの問題の  $h$  は以下のように与えられる。

$$h(y, y') = y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2}. \quad (1.35)$$

これを Euler の微分方程式に代入すると以下の方程式を得る。

$$\frac{d}{dx} \frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \sqrt{1+y'^2} = 0. \quad (1.36)$$

ここで  $y' = p$  とおく。すると  $\frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} = p \frac{d}{dy}$  である。これらを用いると式 (1.36) は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{(y+\lambda)}{\sqrt{1+p^2}} p \frac{dp}{dy} - \frac{(y+\lambda)p^2}{(1+p^2)^{3/2}} p \frac{dp}{dy} - \sqrt{1+p^2} \\ 0 &= p^2(1+p^2) + (y+\lambda)(1+p^2)p \frac{dp}{dy} - (y+\lambda)p^3 \frac{dp}{dy} - (1+p^2)^2 \\ &= -1 - p^2 + (y+\lambda)p \frac{dp}{dy} \\ \frac{pdp}{1+p^2} &= \frac{dy}{y+\lambda}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

両辺を積分すると積分定数  $C, c_1$  を用いて解が

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln(1+p^2) &= \ln(y+\lambda) + C, \\ y+\lambda &= c_1 \sqrt{1+p^2}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

と表される。 $p$  を元に戻すと以下の微分方程式が得られる。

$$\pm dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{c_1}\right)^2 - 1}}. \quad (1.39)$$

$u = \frac{y+\lambda}{c_1}$  と置いて積分すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
c_1 \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) &= (x + c_2), \\
u &= \frac{1}{2} \left( \exp\left(\frac{x + c_2}{c_1}\right) + \exp\left(-\frac{x + c_2}{c_1}\right) \right), \quad (1.40) \\
c_1 \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) &= -(x + c_2), \\
u &= \frac{1}{2} \left( \exp\left(\frac{x + c_2}{c_1}\right) + \exp\left(-\frac{x + c_2}{c_1}\right) \right).
\end{aligned}$$

± 二つの解が同じ解を与える。よって

$$y = \frac{c_1}{2} \left( \exp\left(\frac{x + c_2}{c_1}\right) + \exp\left(-\frac{x + c_2}{c_1}\right) \right) - \lambda, \quad (1.41)$$

を得る。  $x = \pm x_0$  の二箇所で  $y = 0$  であるためには  $c_2 = 0$  でなければならない。よって

$$y = c_1 \cosh \frac{x}{c_1} - \lambda, \quad (1.42)$$

となる。糸の長さに対する制約条件 (1.34) にこの結果を代入すると

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{-x_0}^{x_0} \cosh \frac{x}{c_1} dx = c_1 \left( \sinh \frac{x_0}{c_1} - \sinh\left(-\frac{x_0}{c_1}\right) \right) \\
&= 2c_1 \sinh \frac{x_0}{c_1}, \quad (1.43)
\end{aligned}$$

を得る。この関係式から積分定数  $c_1$  が決定される。こうして決まった  $c_1$  を解 (1.42) に代入し、  $x = \pm x_0$  で  $y = 0$  を代入する事で未定乗数  $\lambda$  が以下のように決まる。

$$\lambda = c_1 \cosh \frac{x_0}{c_1}. \quad (1.44)$$



図 1.3 間隔 2 の二点で吊るされた長さ 2.35 の糸の平衡状態での形。

図 1.3 に間隔 2 の同じ高さの二点で吊るされた長さ 2.35 の糸の平衡状態での形を示した。

### 1.3 Fermat の原理

ここでは、変分原理の物理的背景の理解の手助けを目的として光に対する Fermat の原理の解説を行う。光が伝搬する空間は、重力場が存在しない慣性系であるとする。まず、真空中では光が何故真っ直ぐ進むのかを Fermat の原理を用いて説明する。光を波長  $\lambda$ 、角振動数  $\omega$  の単色平面波として扱う。光の進行方向は、波数ベクトル

$$\mathbf{k} \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}, \quad (1.45)$$

の方向である。ここで  $\mathbf{n}$  は光の進行方向を向く単位ベクトルである。

#### 1.3.1 平面波・アイコナール

波の波面とは、位相が一定の面のことである。時刻  $t$ 、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  での角振動数  $\omega$ 、波数ベクトル  $\mathbf{k}$  の波の位相は、

$$\psi(\mathbf{r}, t, \mathbf{k}, \omega) = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta_0, \quad (1.46)$$

と書ける。この関数  $\psi$  は、アイコナールと呼ばれる。ここで  $\delta_0$  は、 $t = 0$ 、 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  での波の位相を表す定数である。以下では、簡単のため  $\delta_0 = 0$  とする。時刻  $t$  を固定すると位相一定面は、次の方程式を満たす位置ベクトル  $\mathbf{r}$  の集合として与えられる。

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}. \quad (1.47)$$

波数ベクトルが波面上の任意の点で定ベクトル即ち大きさと向きを変えないとき右辺の定数を面上のある点  $\mathbf{O}$  の位置ベクトル  $\mathbf{r}_0$  を用いて  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0$  と表し、面の方程式 (1.47) は以下のように書き換えることができる。

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \quad (1.48)$$

方程式 (1.48) は、図 1.4 に示したように、点  $O$  を含み波数ベクトル  $\mathbf{k}$  を法線ベクトルとする平面の方程式である。すなわち波数ベクトルが波面内で定ベクトルの波は、平面波を表す。オイラーの公式を用いて指数関数で波を表現すると数学的取り扱いが便利なので平面波は、

$$e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

を用いて表現する。ただし、 $\mathbf{k}$  は空間の任意の点で同じ大きさと向きを持った定ベクトルである。

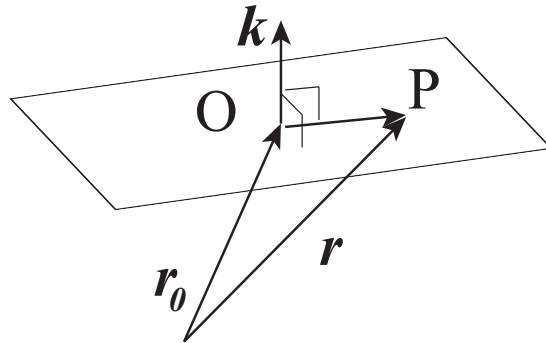


図 1.4 法線ベクトル  $\mathbf{k}$  の平面。点  $P$  は同一平面内の任意の点である。

波数ベクトルが定ベクトル即ち大きさと向きが一定のベクトルでは無い場合も含めた一般の光の波の位相を表す関数  $\psi(\mathbf{r}, t)$  をアイコナールと呼ぶ。単色の光であっても屈折率が 1 では無い媒質が存在すると波数ベクトルの大きさ、向きは伝搬中に変化し、アイコナールは式 (1.46) の左辺のような簡単な形で表すことができない。屈折率が 1 からズレた値  $n$  を持つ媒質中では、光の波長は  $\lambda/n$  となり真空中の波長  $\lambda$  とは異なる値を持つ。一方、光の振動数は媒質中でも変化しない。

### アイコナールがスカラーであることの具体的座標変換を用いた検証

角振動数  $\omega$ 、波数ベクトル  $\mathbf{k}$  の波のアイコナールがスカラー量であることを具体的な座標変換の例に対して検証する。簡単のため  $\delta_0 = 0$ 、 $t = 0$  とする。位置ベクトルが  $\mathbf{r}$  で与えられる点 A と  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  で与えられる点 B の間に波の位相変化量をアイコナールと定義し直すと、

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.49)$$

と書ける。点 A と B の間にある波の数は、座標系の取り方に依存しないので、スカラーであることは明らかである。これを具体的な変換を取り上げて解説する。

#### 座標回転

アイコナール (1.49) は、波数ベクトルと位置ベクトルの内積であるから、任意の座標回転に対して不変である。

#### 座標推進

以下のような変換により座標原点をズラす、座標推進変換を考える。

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.50)$$

この変換で波数ベクトルは変化せず不変である。二点 A, B 間を結ぶ位置ベクトルも  $d\mathbf{r}$  で不変である。したがって、アイコナールは座標推進変換に対して不変である。

#### スケール変換

以下で定義されるスケール変換を考える。

$$\mathbf{r}' = a\mathbf{r}. \quad (1.51)$$

ここで  $a \neq 0$  の定数である。単位を cm から m に変換する変換は、これにあたる。スケール変換に伴って波の波長が  $a$  倍になり、波数ベクトルの大きさは  $1/a$  倍になる。したがって、アイコナール (1.49) はスケール変換に対して不変である。

## 1.3.2 Fermat の原理

次に図 1.5 の始点 P から発して終点 Q に至る光の軌跡が何故図中の直線 0 になるのかを Fermat の原理を用いて解説する。以下では、角振動数は  $\omega$  で一定で、時間的に定常な状態を考える。即ち、無限の過去から無限の未来まで角振動数  $\omega$  の波が存在するとする。始点 P から終点 Q までの任意の軌

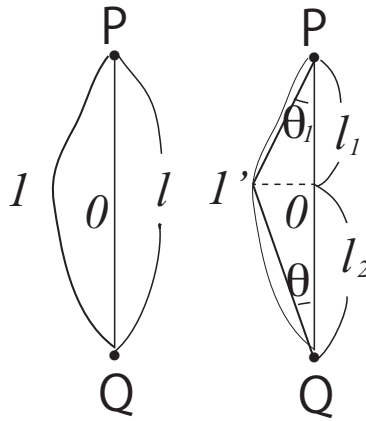


図 1.5 始点 P から発し終点 Q に至る光の軌跡。

跡に沿った積分を以下のように導入する。

$$\psi(\ell) = \int_P^Q \mathbf{k} \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (1.52)$$

左辺の関数の引数  $\ell$  は、積分実行時にどのような軌跡を選択したかを表す変数である。図中の 1 とアサインした軌跡を選択した場合を考える。光がこの軌跡に沿って伝搬したということは、波数ベクトル  $\mathbf{k}$  の向きが常に軌跡 1 の接線と平行であったということである。したがって、 $\psi(\ell)$  の積分は、軌跡の長さを求めて最後に波数ベクトルの大きさ  $k$  を掛けることで求められる。この軌跡を図 1.5 の右側の図で 1' とアサインしたような二つの直線で表した軌跡で近似する。そこで軌跡 1 を光が辿った場合の積分を軌跡 1' に置き換えることで行う。図から明らかなように

$$\tan \theta_1 = \frac{\ell_2}{\ell_1} \tan \theta$$

の関係式で  $\theta_1$  は  $\theta$  で表される。軌跡の長さは  $\theta$  のみの関数となるので  $\psi(\ell)$  を  $\psi(\theta)$  と表すことにする。すると以下のようなになる。

$$\psi(\theta) = k \left( \frac{\ell_1}{\cos \theta_1} + \frac{\ell_2}{\cos \theta} \right) = k \left( \ell_1 \sqrt{\frac{\ell_1^2 - \ell_2^2}{\ell_1^2} + \frac{\ell_2^2}{\ell_1^2} \frac{1}{\cos^2 \theta}} + \frac{\ell_2}{\cos \theta} \right) \quad (1.53)$$

計算が厄介になるだけで物理の本質に影響が無いので以下では、 $\ell_2 = \ell_1 = \ell/2$  とし、

$$\psi(\theta) = \frac{k\ell}{\cos \theta}, \quad (1.54)$$

と簡略化する。これが軌跡 1' を辿った時始点から終点まで光が伝搬した間の位相変化量である。この軌跡から微小角  $\delta\theta$  だけズレた軌跡を考える。テーラー展開を行い、元の位相からのズレを評価すると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \delta\psi(\theta) &\sim k\ell \left[ \frac{\partial\psi(\theta)}{\partial\theta} \delta\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi(\theta)}{\partial\theta^2} \delta\theta^2 \dots \right] \\ &= k\ell \left[ \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \delta\theta + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\cos\theta} + \frac{2\sin^2\theta}{\cos^3\theta} \right) \delta\theta^2 \dots \right]. \quad (1.55) \end{aligned}$$

ここまでの議論に登場した軌跡のズレを解析力学では軌跡の変分と呼ぶ。

ものには揺らぎというものが必ず付随する。光の軌跡が軌跡 1 を基本辿るとして、そこから多少ずれた軌跡が混在する。微小角  $\delta\theta$  ズレた軌跡を辿って来た光は、軌跡 1 を辿ってきた光と比べて位相が式 (1.55) で与えられる  $\delta\psi$  だけズレる。ズレの原因が揺らぎであると考え、角度  $\theta - \delta\theta$  から  $\theta + \delta\theta$  の間の軌跡がほぼ一様に混在していると想定しても良いであろう。位相のズレの最大値が  $2\pi$  以上である時、全ての軌跡を辿った光の重ね合わせは、位相のずれが 0 から  $2\pi$  をほぼ一様に分布した軌跡を辿った光の重ね合わせとなる。お互い打ち消しあい光の振幅がゼロとなる。しかし、 $\theta = 0$  の時は、式 (1.55) の  $\delta\theta$  の一次の項は消え、位相のズレは  $\delta\theta$  の二次からとなる。この時、角度が  $-\delta\theta$  から  $\delta\theta$  の間に分布する軌跡間の位相差が  $2\pi$  より十分小さく、重ね合わせの結果有限の振幅を持つことができる。

以上の結果をまとめると、始点と終点を結ぶ軌跡を辿る間の位相の変化

量の軌跡の変分に対する一次の変化量がゼロとなる軌跡を光が辿る、と表現することができる。この例のように軌跡の変分の一次の変化量を取るとを単純に位相の変分を取ると呼び  $\delta\psi$  と表現する。即ち、光は

$$\delta\psi = 0, \quad (1.56)$$

となる軌跡を通るということである。Fermat の原理は、**光は始点と終点を結ぶ軌跡の間の位相変化量が停留値を取る軌跡を通る**、という原理である。角度  $\theta = 0$  とは、始点と終点をまっすぐ結ぶ軌跡  $0$  のことである。以上が光がまっすぐ進むことの物理的説明である。光が式 (1.56) となる軌跡を通るという法則を Fermat の原理と呼ぶ。

位相  $\psi$  は、始点から終点までの間に含まれる波の山の数であり、それは座標系の取りかたに寄らず誰が数えても同じである。このように座標系の取り方に値が依存しない量、言い換えると座標変換に対して値が不変の量をスカラー量と呼ぶ。即ち、位相  $\psi$  はスカラー量である。光の軌跡は、スカラー量の変分が 0 になるものが選択されるので、Fermat の原理から選択される軌跡も座標系の取り方に寄らず同一のものが選択されるという当然期待される結果が得られる。

図 1.6 に屈折率が 1 以上の一様媒質でできた円錐状レンズを透過する平面波の伝搬の様子を示した。レンズ頂点と底面の中心点を結ぶ延長線上の十分遠方にある始点 P の点光源から放射状に球面波が放射されることによりこのような状態を実現することができる。破線は、波面を表し終点 Q 付近以外では、波長間隔で示している。P が始点で Q が終点である。太い破線は、終点 Q に到来する 3 つの波面である。始点 P の光源から同時刻に発した波面は、波面 1、2、3 の順番に終点 Q に矢印で示した方向から到来する。もし光源がある瞬間だけピカッと光った場合には、1、2、3 の順番に時間差で 3 回終点 Q に届くことになる。終点 Q に観測者を置くと発光現象が観測される方向は、1 回目は波面 1 に垂直な方向、即ちレンズを見込む方向から右手の方向にズレた方向に観測される。2 回目は、逆に左手方向にズレた方向に観測される。3 回目は、ほぼレンズの中心を見込む方向だが、少し左手方向にズレた方向に観測される。



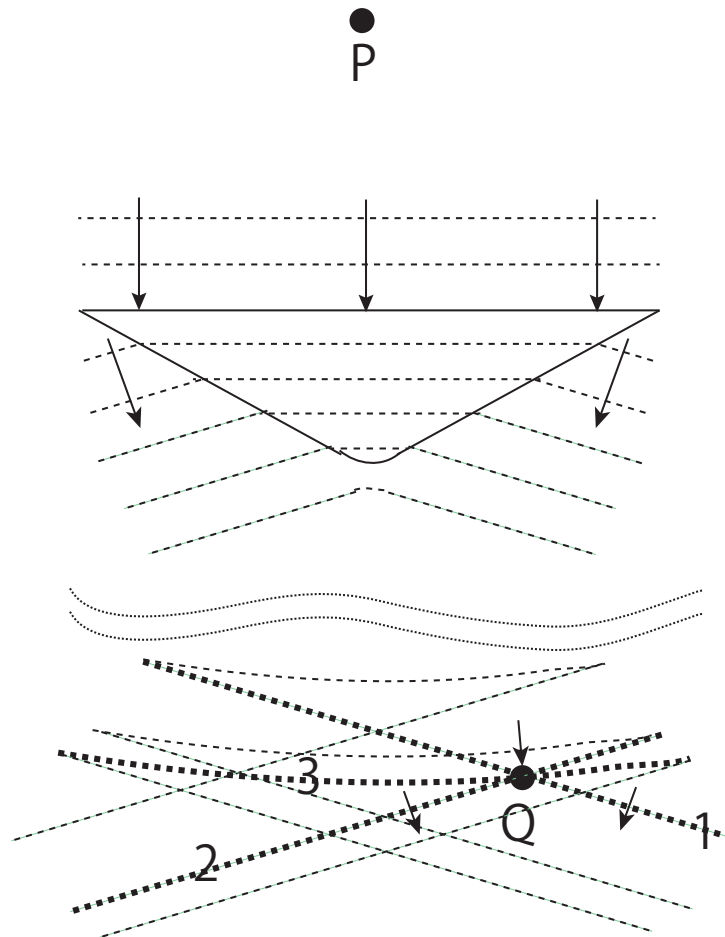


図 1.6 屈折率が 1 以上の一様媒質でできた円錐状レンズを透過する平面波の伝搬。破線は、波面を表し終点  $Q$  付近以外では、波長間隔で示している。 $P$  が始点で  $Q$  が終点である。太い破線は、終点  $Q$  に到来する 3 つの波面である。始点  $P$  の光源から同時刻に発した波面は、波面 1、2、3 の順番に終点  $Q$  に矢印で示した方向から到来する。

これら 3 つの光が辿る軌跡全てが Fermat の原理を満たし、それぞれの軌跡に対して位相変化量  $\psi$  の変分は 0 である。波面 1 が辿る軌跡は、位相変化量  $\psi$  を最小にする。波面 2 の終点  $Q$  への到達が波面 1 に対して遅れるのは、波面 2 が辿る軌跡が波面 1 のそれより光学的に長く、波面 2 の位相変化

量が波面 1 の位相変化量より大きいためである。そのため波面 2 の辿る軌跡は、位相変化量  $\psi$  の極小値を与えるが最小値では無い。波面 3 が辿る軌跡の位相変化量  $\psi$  は、波面到達までの時間が最も長いことから、他の二つより大きいことが分かる。これらのことを考慮すると、始点 P から終点 Q までの間の位相変化量  $\psi$  は、図 1.7 に示したような形になることが納得できる。したがって、波面 3 が辿る軌跡の位相変化量  $\psi$  は極大値を取る。この例は、光は始点と終点を結ぶ軌跡の間の位相変化量が停留値を取る軌跡を通る、のであって最小値を取る軌跡だけを通るわけでは無いことを示す具体的な例である。

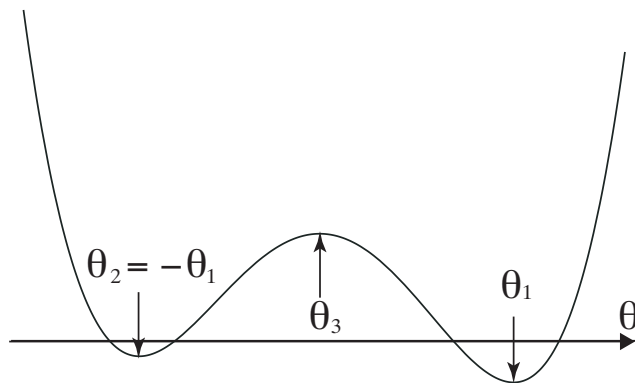


図 1.7 始点 P から終点 Q に到達するまでの間の位相変化量  $\psi$  の光の到来方向依存性。縦軸が位相変化量  $\psi$  である。角度  $\theta$  は、レンズの入射する光線方向から測った角度である。 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  はそれぞれ波面 1、2、3 が終点 Q に到達した時の波面の法線方向、即ち光の到来方向である。

ここまでの議論では、揺らぎの存在が本質であったが、光を波として扱う範囲では付録 A で述べたように波の重ね合わせの原理に起因する観測の不確定性原理が成り立つ。付録 B にスリットを通過する単色平面波の回折の様子を図を用いて解説を示した。この図から分かるように平面波が波面に垂直な幅  $D$  のスリットを通過すると入射波面に垂直な方向に進行する成分を持つようになる。図 B.2 は、入射波の進行方向に対し

$$\delta\theta_0 \sim \pm \frac{\lambda}{D}, \quad (1.57)$$

程度広がることを示している。図 1.6 に示した系に適応する。レンズの直径は、 $D \sim 2\text{cm}$  程度である。光源から観測者までの距離は、 $\ell \sim 30\text{cm}$  程度である。レンズ通過後、レンズに入射する平面波の進行方向から進行方向が  $-\delta\theta_0 < \delta\theta < \delta\theta_0$  の範囲内にズレた方向から進行する成分が発生する。進行方向が  $\delta\theta$  ズレた波の位相変化量の変分は式 (1.55) のように与えられる。これを簡単のため以下のように表現する。

$$\delta\psi \sim kl(C_1\delta\theta + C_2\delta\theta^2). \quad (1.58)$$

ここで  $C_1, C_2$  は、オーダー 1 の定数である。進行方向の揺らぎにより  $-\delta\theta_0 < \delta\theta < \delta\theta_0$  の範囲内から進行する波の重ね合わせが起きる。重ね合わせの結果は、 $\delta\theta$  の一次の変分による重ね合わせの結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-\delta\theta_0}^{\delta\theta_0} e^{iklC_1\delta\theta} d\delta\theta, \\ &= \frac{2}{klC_1} \sin(klC_1\delta\theta_0) = \frac{2}{klC_1} \sin\left(2\pi C_1 \frac{\ell}{D}\right). \end{aligned} \quad (1.59)$$

一方、 $\delta\theta$  の二次の変分は、

$$\begin{aligned} klC_2\delta\theta^2 &< klC_2 \left(\frac{\lambda}{D}\right)^2 = 2\pi C_2 \frac{\ell}{D} \frac{\lambda}{D}, \\ &\sim 2\pi \times 1 \times \frac{30\text{ cm}}{2\text{ cm}} \frac{0.000055\text{ cm}}{2\text{ cm}} = 0.0026\text{ radian} \ll 1, \end{aligned} \quad (1.60)$$

のように十分 1 radian より十分小さい。ここで光の波長を可視光の中心波長である緑色の光である  $\lambda = 0.000055\text{cm}$  とした。したがって、位相の  $\delta\theta$  の二次の微小量による変分は以下のように計算される。

$$A_2 = \int_{-\delta\theta_0}^{\delta\theta_0} e^{iklC_2\delta\theta^2} d\delta\theta \sim \int_{-\delta\theta_0}^{\delta\theta_0} e^0 d\delta\theta = 2\delta\theta_0, \quad (1.61)$$

となる。これらから  $\delta\theta$  の一次の変分がある場合の波の重ね合わせの結果得られる振幅  $A_1$  と  $\delta\theta$  の一次の変分がゼロの時の波の重ね合わせの結果得られる振幅  $A_2$  の比は以下のようになる。

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{k\ell C_1 \delta\theta_0} \sin(k\ell C_1 \delta\theta_0) = \frac{D}{2\pi C_1 \ell} \sin\left(2\pi C_1 \frac{\ell}{D}\right) \leq \frac{D}{2\pi C_1 \ell} \sim 0.01. \quad (1.62)$$

ここで  $C_1 = 1$  を代入した。この結果は、 $\delta\theta$  の一次の項が存在すると、様々な位相の波の重ね合わせにより打ち消しあうことを示している。一方、 $\delta\theta$  の一次の項がゼロになる軌跡では、このような干渉による打ち消しあい起きない。そのため位相変化量  $\psi$  の  $\delta\theta$  の一次の変分がゼロになる軌跡の方向に像が現れる。

### 1.3.3 Fermat の原理：重力レンズ効果

重力レンズ効果は、前の小節の図 1.6 で示したモデルで良く表現することができる現象である。ある天体の質量密度分布を  $\rho(\mathbf{r})$  とする。この天体を作る重力ポテンシャル  $\Phi(\mathbf{r})$  は、次のポアソン方程式で与えられる。

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r}). \quad (1.63)$$

ここで、 $\Delta$  は3次元のラプラシアン、 $G$  は重力定数（万有引力定数）で

$$G = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad (1.64)$$

である。重力ポテンシャルは、無限遠で0になるように基準を選ぶ。一般相対性理論によると重力場の存在は屈折率

$$n(\mathbf{r}) = 1 - \frac{2\Phi(\mathbf{r})}{c^2}, \quad (1.65)$$

の媒質と同じ役割を果たすことがわかっている。ここで  $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$  は真空中の光の速度である。重力ポテンシャルは、負の値を持ち、その絶対値は天体の中心に近づくほど大きくなる。したがって、天体の中心に近づくほど屈折率が大きくなる。図 1.8 に光源 Source から発せられた光が宇宙空間を伝搬して観測者に届くまでの光の波面の伝搬の様子をしめた。光源から発せられた直後は球面波として伝搬する。伝搬途中に星や銀河の集団のような質量な大きな天体が存在しているとする。天体の中心部程重力ポテンシャルが深いため屈折率が大きく位相速度が遅くなる。そ

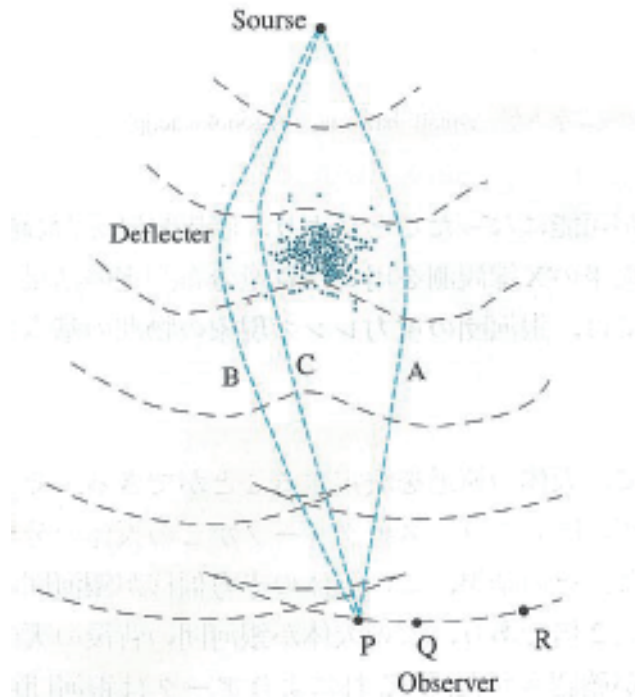


図 1.8 重力レンズによる光の屈折。

の結果波面に図のような変形が生じる。波面に垂直方向が光の伝搬方向である。分かりやすくするため光源 Source は、超新星爆発のような突発性天体であり、図はその第一波の伝搬を表しているとする。観測者 P には三つの波面が到達する。まず始めに到達する波面は光線 A の方向から届く。したがって、天球面上の A の方向に天体が観測される。しばらくすると次の波面が到達し同じ天体が B の方向に観測される。最後に三つ目の波面が到達し同じ天体が C の方向に観測される。つまり重力レンズ現象により同じ天体が複数観測されること、光が到達するまでに掛かる時間にそれぞれの像で差があることになる。

### 1.3.4 何故光は与えられたゴールに向かって自ら進むべき道をゴール到達前に知っているのか

Fermat の原理は、光は始点と終点が与えられた時、方程式 (1.56) を満たす軌跡を辿るという原理であった。始点と終点を結ぶ軌跡の内、どの軌跡が位相変化量  $\psi$  の停留値を与えるかは、色々な軌跡で始点と終点を結んでみないと判別しなように思われる。もしそうだとすると一発で、通るべき道、即ち位相変化量  $\psi$  が停留値を取る軌跡を光が言い当てて、それを選択して始点から終点に至ることは、“奇跡” に近いように思われる。答えは、光はある時々刻々波面に垂直な方向に進んでいるだけである。その積み重ねが  $\psi$  の停留値を与える軌跡となるのである。ただこの議論では、終点  $Q$  に届くかどうかは進み切って見ないとわからない。実際、図 1.7 や図 1.8 から分かるように光源からの光は様々な場所に到達している。Fermat の原理は、これら全てが各場所場所で  $\psi$  の停留値を与える方向に光が進行した結果の積み重ねで与えられる軌跡であることを主張している。終点  $Q$  に到達した光の軌跡は、これら多数の光の軌跡の内偶々  $Q$  に到達したものである。始点  $P$  を出発した時点で終点言い方を変えると観測者が点  $Q$  にいることを光が知っていてそこに向かって飛んできたわけではない。

Fermat の原理で光の軌跡を導くことができるのは、回折が無視できる場合に限った話である。幅が光の波長に近いスリットを通過するような場合は、回折現象が無視できず Fermat の原理にしたがって光の進行方向を導くことができない。回折が無視できる極限で光の進行方向を“光線”として扱う近似方法を幾何光学近似と呼ぶ。Fermat の原理は、幾何光学近似のもとで光の進行方向を導き出す原理である。

## 1.4 Maupertuis の原理

ここまでの議論を始点と終点を固定したとき、有限の質量  $m$  を持つ粒子が辿る軌跡を導出する問題に拡張する。元々は、量子論の登場前に古典力

学の範疇で行われた拡張であるが、自然な拡張を行うためここでは量子論の助けを借りた議論を展開する。

### 1.4.1 Maupertuis の原理

量子論によると角振動数  $\omega$ 、波数ベクトル  $\mathbf{k}$  の光波は、運動量  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ 、エネルギー  $E = \hbar\omega$  の光子の集まりである。ここで  $\hbar$  は、Planck 定数

$$h \equiv 6.62607015 \times 10^{-34}, \text{ m}^2 \text{ kg/s} \quad (1.66)$$

を用いて

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}, \quad (1.67)$$

で定義される定数で Dirac 定数と呼ばれる。アイコナール (1.46) を一つの光子に対して書き下すと

$$\psi_{ph}(\mathbf{r}, t, \mathbf{k}, \omega) = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et), \quad (1.68)$$

のようになる。Fermat の原理の導出時に仮定した角振動数が一定であるという仮定は、光子のエネルギーが伝搬中不変であると言い換えることができる。量子論によれば、有限の質量を持つ運動量  $\mathbf{p}$  の粒子は、ドブロイ波長

$$\lambda_D = \frac{h}{|\mathbf{p}|}, \quad (1.69)$$

を持つ波の性質を持つことが知られている。これから有限の質量を持つ運動量  $\mathbf{p}$  の粒子が沢山集まることで波数ベクトル

$$\mathbf{k}_D = \frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \quad (1.70)$$

を持つ波が形成されることが期待される。ドブロイ波の波数ベクトルを用いることで、有限の質量を持つ粒子が始点  $\mathbf{P}$  から終点  $\mathbf{Q}$  に至るまでの間の位相変化量を式 (1.52) と同様に定義することができる。ここで  $\hbar$  は量子論との対応から導入された定数なので省き、以下のように定義される位相変化量と等価な量を改めて導入する。

$$S_0 \equiv \int_P^Q \mathbf{p} \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (1.71)$$

ここで積分は始点 P から終点 Q までの間を粒子が辿る軌跡に沿って行う。これを作用積分と呼ぶ。移動中粒子のエネルギーが一定の時、 $S_0$  が停留値を取る軌跡を粒子が辿る、というのが Fermat の原理の有限な質量を持つ粒子への拡張であり、これを Maupertuis の原理と呼ぶ。原理と名前がついているので、盲目的に信じて使うというのが、正しい姿勢なのかもしれないが、ここでは Fermat の原理の類推から導かれた仮定に過ぎないという立場をとる。そこで、Maupertuis の原理からよく知られた粒子の運動が導かれるかどうかを検証し、裏付けを得ることにする。

#### 1.4.2 自由粒子の運動への応用

まず自由粒子について適応する。粒子の速度  $\mathbf{v}$  は、粒子の軌跡に沿った微小ベクトル線素  $d\boldsymbol{\ell}$  の時間微分として

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt}, \quad (1.72)$$

のような関係式で結ばれる。粒子の運動量  $\mathbf{p}$  は、速度と以下のように結ばれる。

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt}, \quad (1.73)$$

自由粒子のエネルギー  $E$  は、運動エネルギーのみが寄与するので

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left( \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} \right)^2, \quad (1.74)$$

のように軌跡に沿った線素  $d\boldsymbol{\ell}$  の時間微分で表される。これから以下の関係式を得る。

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2E}} d\boldsymbol{\ell}. \quad (1.75)$$

以上を用いると自由粒子の作用積分 (1.71) を以下のように表すことができる。



$$S_0 = \int_P^Q m\mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_P^Q m \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_P^Q m \sqrt{\frac{2E}{m}} d\ell = \int_P^Q \sqrt{2mE} d\ell. \quad (1.76)$$

自由粒子のエネルギーは、一定であるから自由粒子に対する Maupertuis の原理は以下のようなになる。

$$\delta S_0 = \sqrt{2mE} \delta \int_P^Q d\ell = \sqrt{2mE} \delta \int_P^Q \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = 0. \quad (1.77)$$

ここで  $dx, dy, dz$  は、微小線素ベクトルの成分であり  $d\boldsymbol{\ell} = (dx, dy, dz)$  である。この作用積分の変分がゼロとなるのは、P,Q 間を結ぶ線分の長さが最小となる P,Q 間が直線で結ばれる時である。したがって、Maupertuis の原理から導出される自由粒子の軌跡は直線であり、期待される通りの結果が得られた。

### 1.4.3 保存力場中を運動する粒子への応用

次に位置エネルギー  $U(\mathbf{r})$  の勾配で力が表される保存力場中を運動する粒子に Maupertuis の原理を適応する。粒子の働く力  $\mathbf{F}$  は、位置エネルギーの勾配により以下のように求まる。

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \left( -\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right). \quad (1.78)$$

粒子のエネルギーは、以下のように書ける。

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\mathbf{r}). \quad (1.79)$$

これから自由粒子の時と同様の式変形を経て以下の関係式を得る。

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2(E - U(\mathbf{r}))}} d\ell. \quad (1.80)$$

これを用いると保存力場中の粒子の作用積分は以下のようなになる。

$$S_0 = \int_P^Q \sqrt{2m(E - U(\mathbf{r}))} d\ell. \quad (1.81)$$

図 1.9 に、変分前後の粒子の軌跡を示した。始点から軌跡に沿って測ったそれぞれの軌跡の長さが  $l, l'$  である。微小ベクトル  $d\boldsymbol{\ell}$  は、位置ベクトル  $\boldsymbol{r}(l)$  の点における変分前の軌跡の接ベクトルで、微小ベクトル  $d\boldsymbol{\ell}'$  は、位置ベクトル  $\boldsymbol{r}(l) + d\boldsymbol{r}(l)$  の点における変分後の軌跡の接ベクトルである。位置ベクトル  $\boldsymbol{r}(l)$  の点における変分前の軌跡の単位接ベクトルを  $\boldsymbol{t}(l)$  とすると  $d\boldsymbol{\ell} = dl \boldsymbol{t}$  である。また  $dl \rightarrow 0$  の極限で

$$\boldsymbol{r}(l+dl) - \boldsymbol{r}(l) \rightarrow d\boldsymbol{\ell} = dl \boldsymbol{t}, \quad (1.82)$$

のように同じ軌跡上の微小距離離れた点の位置ベクトルの差が接ベクトルに漸近する。これから以下の関係式を得る。

$$\frac{d\boldsymbol{r}(l)}{dl} = \boldsymbol{t}, \quad (1.83)$$

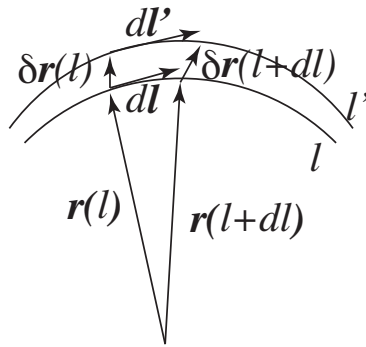


図 1.9 軌跡の変分前後の軌跡の接ベクトル。

図 1.9 に示したように軌跡の変分を与えた結果生じる作用積分の変分は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \delta S_0 &= \delta \int_P^Q \sqrt{2m(E - U(\boldsymbol{r}))} dl \\ &= \int_{P(l')}^Q \sqrt{2m(E - U(\boldsymbol{r}(l')))} dl' - \int_{P(l)}^Q \sqrt{2m(E - U(\boldsymbol{r}(l)))} dl \end{aligned} \quad (1.84)$$

二つ目の等号の第一項は、変分後の軌跡に沿った作用積分、第二項は変分前

の軌跡に沿った作用積分である。二つの積分の差を計算するために第一項の積分経路を第二項と揃える必要がある。積分変数を  $l'$  から  $l$  に変換するには、

$$\frac{dl'}{dl} = 1 + \frac{d\delta l}{dl}, \quad (1.85)$$

をまず求める必要がある。

$$dl' = dl + \frac{d\delta l}{dl} dl, \quad (1.86)$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}' &= \mathbf{r}(l+dl) - \mathbf{r}(l) + \delta\mathbf{r}(l+dl) - \delta\mathbf{r}(l) \\ &= d\mathbf{l} + \frac{d\delta\mathbf{r}(l)}{dl} dl. \end{aligned} \quad (1.87)$$

それぞれの右辺の第二項は第一項に比べ微小量  $\delta l$  あるいは  $\delta\mathbf{r}$  の一次の微小量である。ここで  $d\ell'^2 = d\mathbf{l}' \cdot d\mathbf{l}'$  の両辺にそれぞれ式 (1.86) と (1.87) を代入し、両辺の一次の微小量の比較から以下の式をえる。

$$\frac{d\delta l}{dl} dl^2 = d\mathbf{l} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}(l)}{dl} dl$$

これから

$$\frac{d\delta l}{dl} = \frac{d\mathbf{l}}{dl} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}(l)}{dl} = \mathbf{t} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}(l)}{dl}, \quad (1.88)$$

を得る。ここで式 (1.82) を用いた。以上の結果を用いて作用積分の変分を計算する。

$$\begin{aligned} \delta S_0 &= \int_P^Q dl \left\{ \left( 1 + \mathbf{t} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}(l)}{dl} \right) \sqrt{2m(E - U(\mathbf{r}(l) + \delta\mathbf{r}(l)))} - \sqrt{2m(E - U(\mathbf{r}(l)))} \right\} \\ &= \int_P^Q dl \left\{ \left( 1 + \mathbf{t} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}(l)}{dl} \right) \sqrt{2m(E - U(\mathbf{r}(l)))} \left( 1 - \frac{\nabla U(\mathbf{r}(l)) \cdot \delta\mathbf{r}(l)}{2(E - U(\mathbf{r}(l)))} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2m(E - U(\mathbf{r}(l)))} \right\} \\ &= \int_P^Q dl \left\{ \mathbf{t} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}(l)}{dl} \sqrt{2m(E - U(\mathbf{r}(l)))} - \frac{\sqrt{m} \nabla U(\mathbf{r}(l)) \cdot \delta\mathbf{r}(l)}{\sqrt{2(E - U(\mathbf{r}(l)))}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.89)$$

最後の等号の第一項の部分積分を行う。

$$\delta S_0 = \left[ \mathbf{t}(l) \cdot \delta\mathbf{r}(l) \sqrt{2m(E - U(\mathbf{r}(l)))} \right]_{l=0}^{l=l_Q}$$

$$-\int_P^Q dl \left\{ \frac{d}{dl} \left( \mathbf{t} \sqrt{2m(E-U(\mathbf{r}(l)))} \right) \cdot \delta \mathbf{r}(l) + \frac{\sqrt{m} \nabla U(\mathbf{r}(l)) \cdot \delta \mathbf{r}(l)}{\sqrt{2(E-U(\mathbf{r}(l)))}} \right\}. \quad (1.90)$$

軌跡の変分は、始点と終点は固定して取っているため始点、終点では  $\delta \mathbf{r} = 0$  であり、右辺第一項が消える。以上から作用積分の変分は以下のようになる。

$$\delta S_0 = -\int_P^Q dl \left\{ \frac{d}{dl} \left( \mathbf{t}(l) \sqrt{2m(E-U(\mathbf{r}(l)))} \right) + \frac{\sqrt{m} \nabla U(\mathbf{r}(l))}{\sqrt{2(E-U(\mathbf{r}(l)))}} \right\} \cdot \delta \mathbf{r}(l). \quad (1.91)$$

Maupertuis の原理より、粒子は、任意の変分  $\delta \mathbf{r}(l)$  に対して、変分 (1.91) がゼロになる軌跡を辿ることになるので、以下の方程式を満たす軌跡が粒子の軌跡である。

$$2\sqrt{(E-U(\mathbf{r}(l)))} \frac{d}{dl} \left( \mathbf{t}(l) \sqrt{(E-U(\mathbf{r}(l)))} \right) = -\nabla U(\mathbf{r}(l)). \quad (1.92)$$

左辺の微分の計算のため、軌跡上の点 A における単位接線ベクトル  $\mathbf{t}(l)$  の軌跡に沿った微分を計算する。図 1.10 に示したように、微小距離  $dl$  離れた点 B での単位接線ベクトル  $\mathbf{t}(l+dl)$  の始点を点 A に合わせるように平行移動する。微小距離離れた二点間の軌跡は、必ずある半径の円で近似できる。

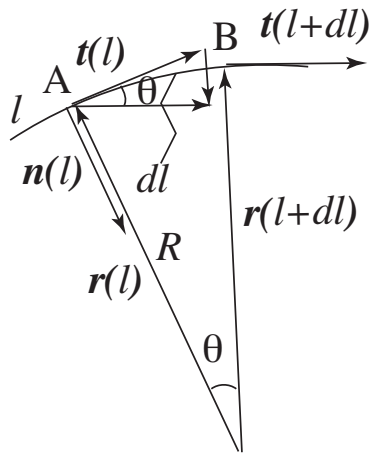


図 1.10 単位接ベクトルの軌跡に沿った微分。

この図では、点 A までの位置ベクトルの起点を AB 間を円軌道で近似した時の円の中心に取った。図では、理解を助けるため二つの単位接ベクトルの違いを強調して書いているが、これらの差は非常に小さく図中の角度  $\theta$  は非常に小さい角度である。この円の半径が  $R$  の時、以下の関係が成り立つ。

$$d\ell = R\theta. \quad (1.93)$$

これを用いと点 A と B の単位接ベクトルの差が、点 A における軌跡の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}(\ell)$  を用いて以下のように求まる。

$$\mathbf{t}(\ell + d\ell) - \mathbf{t}(\ell) = \theta \mathbf{n}(\ell) = \frac{d\ell}{R} \mathbf{n}(\ell). \quad (1.94)$$

したがって、単位接ベクトルの軌跡に沿った微分は以下ようになる。

$$\frac{d\mathbf{t}(\ell)}{d\ell} = \frac{1}{R} \mathbf{n}(\ell). \quad (1.95)$$

これを用いる方程式 (1.92) は、以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} -\nabla U(\mathbf{r}(\ell)) &= 2(E - U(\mathbf{r}(\ell))) \frac{\mathbf{n}(\ell)}{R} - \mathbf{t}(\ell) \frac{dU(\mathbf{r}(\ell))}{d\ell} \\ &= 2(E - U(\mathbf{r}(\ell))) \frac{\mathbf{n}(\ell)}{R} - \mathbf{t}(\ell) \left( \nabla U(\mathbf{r}(\ell)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(\ell)}{d\ell} \right) \\ &= 2(E - U(\mathbf{r}(\ell))) \frac{\mathbf{n}(\ell)}{R} - \mathbf{t}(\ell) (\nabla U(\mathbf{r}(\ell)) \cdot \mathbf{t}(\ell)). \end{aligned} \quad (1.96)$$

力と位置エネルギーの関係式 (1.78) および  $E - U = m/2v^2$  を用いてこの式を整理すると以下のような式を得る。

$$\mathbf{n} \frac{mv^2}{R} = \mathbf{F} - \mathbf{t}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) = \mathbf{n}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}). \quad (1.97)$$

この結果は、粒子が曲率半径  $R$  の曲線軌道を運動する時、遠心力と粒子に働く外力の軌道の法線成分が釣り合うことを示している。言い換えると速度  $v$ 、質量  $m$  の粒子に軌道に垂直方向に外力  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  が働く時、粒子は

$$R = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}}{mv^2}, \quad (1.98)$$

で決まる曲率半径の円軌道で近似できる曲線を運動することが Maupertuis の原理から導かれた。

## 1.5 Lagrange 関数

Fermat の原理の導出では、定常を仮定した。定常状態の仮定のもと、始点と終点を固定した時、光がどのような軌跡を辿るか導出することが出来た。Maupertuis の原理からは、有限な質量を持った粒子が始点と終点を結ぶどのような軌跡を辿るかが導かれるが、運動方程式は導出できなかった。Fermat の原理の導出過程を振り返ると光の波の位相に対応するアイコナールの空間依存性の部分だけを取り出して変分を行った。このことからアイコナールの時間依存性の部分も扱えば、粒子の軌跡の時間発展を追えることが期待される。言い換えると変分原理から粒子の運動方程式の導出が期待される。そこでまず、以下の量が座標の取り方に依存しないスカラー量であることを解説する。座標系  $K'$  系の原点に静止している観測者を考える。角振動数  $\omega'$  で波数ベクトル  $\mathbf{k}'$  の光をこの観測者  $dt'$  秒間観測した時、その位相の変化量は、

$$\Delta\psi = \omega' dt', \quad (1.99)$$

である。位相の変化量、即ち  $dt'$  秒間にこの観測者を通過した光の波の数は、誰から見ても不変であるので、この量は任意の座標変換に対して不変、即ちスカラー量である。ここで通過した光の波の数とは、通過した光の山の数と理解して差し支えない。次に座標系  $K$  系を考える。座標系  $K$  系の原点に静止している観測者に対して、座標系  $K'$  系の原点に静止する観測者が相対速度  $\mathbf{v}$  で運動しているとする。観測者二人の時計を合わせる。即ち

$$t = t', \quad (1.100)$$

である。また  $t = 0$  の時、二つの座標系の原点が一致するようにする。座標系  $K$  系の原点にいる観測者から観測すると  $K$  系原点の観測者を  $dt = dt'$  秒に通過した光の位相変化量は

$$\omega dt,$$

である。 $t = 0$  から  $dt$  秒の間に  $K$  系原点の観測者を  $K'$  系原点の観測者から観測すると

$$d\mathbf{x} = \mathbf{v}dt,$$

移動したと観測される。式 (1.99) で与えられた  $K'$  系原点の観測者を  $dt'$  秒間に通過する波の数を  $K$  系の物理量を用いて表すと  $K$  系原点の観測者を通過する波の位相から  $K$  系原点と  $K'$  系原点の間にある波の位相を差し引くことで以下のように結ばれる。

$$\omega' dt' = \omega dt - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x} = (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) dt. \quad (1.101)$$

波数ベクトルと速度  $\mathbf{v}$  のなす角を  $\theta$  とすると式 (1.101) から相対速度  $\mathbf{v}$  で運動する観測者が観測する角振動数の間の関係式

$$\omega' = \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) \omega, \quad (1.102)$$

を得る。これはドップラー効果の公式である。以上から、 $K$  系の物理量を用いて式 (1.99) は以下のように書ける。

$$d\psi = \omega dt - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.103)$$

ここまでの議論は、式 (1.103) で定義される位相変化量は、ガリレイ変換に対して不変、即ちガリレイ変換に対してスカラー量であることを示している。

式 (1.103) がガリレイ変換に対して不変すなわちスカラー量であることを図を使って説明する。図 1.11 に示したように時刻  $t = 0$  の時原点が一致し、

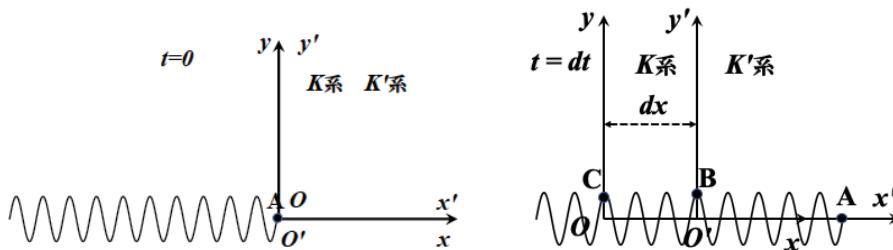


図 1.11

$K$  系に対して  $x$  軸正の方向に移動している座標系  $K'$  系を考える。左の図のように  $x$  軸正の方向に進行する波が、時刻  $t = 0$  の時、座標系原点に到達し

た。波の先端を点 A とした。時刻  $dt$  後には、 $K'$  系の原点  $O'$  は  $x = dx$  に移動している。この間に波の先端 A は、図 1.11 の右図に示した位置まで進む。この間に原点  $O'$  にいる観測者を通過した波は点 A から点 B の間にある波であり、その数は  $dt/T'$  である。ここで  $T'$  は、 $K'$  系で観測したときの波の周期である。したがって、原点  $O'$  にいる観測者を通過する波の位相の変化量は  $2\pi \times dt/T' = \omega' dt$  である。一方、この間に  $K$  系の原点  $O$  にいる観測者を通過する波は点 C と点 A の間にある波でありその数は  $dt/T$  である。ここで  $T$  は  $K$  系で測定した波の周期である。したがって、 $K$  系の原点  $O$  にいる観測者を通過する波の位相変化量は  $2\pi \times dt/T = \omega dt$  である。観測者  $O'$  には、観測者  $O$  を通過する波の内、点 B と点 C の間にある波が届かない。点 B と点 C の間にある波の数は、 $dx/\lambda$  である。ここで  $\lambda$  は、 $K$  系で測定した波の波長である。これに該当する位相は、 $2\pi \times dx/\lambda = kdx$  である。ここで、 $k$  は  $K$  系の観測者にとっての波の波数ベクトルの振幅である。以上の考察から  $O'$  を通過した波の位相変化量と  $O$  を通過した波の位相変化量を結ぶ以下の関係式を得る。

$$\omega' dt = \omega dt - kdx. \quad (1.104)$$

ここまでは簡単のため座標系の移動方向が波の進行方向  $\vec{k}$  と一致しているとしたが、 $d\vec{x}$  と  $\vec{k}$  が平行ではない一般の場合に拡張すると式 (1.104) は以下のように書ける。

$$\omega' dt = \omega dt - \vec{k} \cdot d\vec{x}. \quad (1.105)$$

式 (1.105) の左辺は、特定の観測者  $O'$  を通過する波の位相の変化量であり、これは世界で一つだけ、即ち座標系に依存せず不変な量である。これから

$$d\psi = \omega dt - \vec{k} \cdot d\vec{x}, \quad (1.106)$$

で定義される量は、ガリレイ変換に対して不変すなわちスカラー量である。座標回転、座標推進、時間推進などの任意の座標変換に対してもスカラー量である事は自明であるが、各自考えてみて欲しい。

以上を踏まえて、光が始点から終点まで移動する間の位相変化量 (1.52) を拡張して次の量を定義する。



$$\bar{\psi}(\ell) = \int_P^Q (\mathbf{k} \cdot d\boldsymbol{\ell} - \omega dt). \quad (1.107)$$

ここで積分変数の  $\boldsymbol{\ell}(t)$  は、時刻  $t$  の時の光のある波面の位置であり、 $d\boldsymbol{\ell}(t)$  は微小時間  $dt$  の間の波面の移動方向と距離を表している。上の段落の議論では、 $d\mathbf{x}$  は任意であったが、ここでは光が  $dt$  秒間に進んだ変位と指定した。したがって、

$$d\boldsymbol{\ell}(t) = c dt \mathbf{n}(t), \quad (1.108)$$

である。ここで  $\mathbf{n}(t)$  は式 (1.45) で定義された光の進行方向を向く単位ベクトルである。これを用いると式 (1.107) は、以下のようにゼロになってしまう。

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\ell) &= \int_P^Q \left( \mathbf{k} \cdot \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} - \omega \right) dt \\ &= \int_P^Q (kc - \omega) dt = 0. \end{aligned} \quad (1.109)$$

ここで真空中の光の分散関係式  $\omega = kc$  を用いた。ここでめげずに、有限の質量を持つ粒子の作用積分 (1.71) を時間依存性を含めた形に拡張を試みる。光子のエネルギーと角振動数の間の関係式  $\omega = E/\hbar$  を意識して次の量を導入する。

$$S = \int_P^Q (\mathbf{p} \cdot d\boldsymbol{\ell} - E dt). \quad (1.110)$$

粒子の速度を  $\mathbf{v}(t)$  とすると

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt}, \quad (1.111)$$

である。したがって、式 (1.110) は以下ようになる。

$$S = \int_P^Q dt (\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{v}(t) - E(t)). \quad (1.112)$$

被積分関数はゼロにならず有限の値を持つので、有限質量を持つ粒子に対しては、この式で定義される  $S$  を用いて先に進むことができることが分かった。被積分関数は Lagrangian と呼び  $L$  と書く。これから扱う多くの例は、保存力場なので粒子のエネルギー  $E$  が位置エネルギー  $U$  と運動エネルギー

$K$  を用いて  $E = K + U$  と書ける場合を扱うとする。慣性系を運動する粒子の場合、運動エネルギーは  $K = mv^2/2$  と書ける。すると慣性系における Lagrangian は以下のように書ける。

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - E = \frac{1}{2}mv^2 - U = K - U, \quad (1.113)$$

Lagrangian は、粒子の位置の座標とその時間微分（速度の各成分）の関数であることを明示した。ここまでは、一つの粒子の 3 次元空間内の運動を扱ってきたが、最後の表式のように Lagrangian を運動エネルギーから位置エネルギーを引いたものと定義すれば、多数の粒子を持つ多粒子系や剛体など一般の物理系に拡張できる。

前の段落で光が時間間隔  $dt$  の間に進む距離を式 (1.108) を用いて表した。即ち光の進行速度が  $c$  であるとした。この仮定の導入には、暗黙の内に光速不変の原理、即ち全ての慣性系において光の速度は変わらず  $c$  であるというマイケルソン・モーレーの実験事実から導かれた原理を用いた。この時  $K'$  系は光に乗った座標系となりそのような座標系では時間間隔が  $dt' = 0$  となることを主張している。光速不変の原理に基づいた理論の構築の詳細は、特殊相対論の範疇でありここではこれ以上の深追いは避ける。詳細が知りたい人は例えば、

<https://www.astr.tohoku.ac.jp/~hattori/Relativity.pdf>

を参照してください。

作用積分を改めて以下のように定義する。

$$S = \int_{t_p}^{t_Q} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t)). \quad (1.114)$$

ここで  $t_p$  は始点を出発した時刻、 $t_Q$  は終点に到達した時刻である。

ここで重要な事は、式 (1.114) で定義される作用積分がガリレイ変換を含む慣性系間の座標変換に対してスカラー量である事である。本稿では  $t' = t$  となる変換に限るので、式 (1.113) で定義される Lagrangian もスカラーである。スカラー量により物理系の運動が記述されるという事実が、物理は座標系の取り方に依存しないという所謂相対性原理の要請を自動的に保証する。

## 1.6 位相空間

粒子の運動が決まる、あるいは力学的状態が決まるとは、ある時刻以降の系の位置が予言できることである。ある時刻の粒子の座標と速度が決まれば、それ以降の系の運動が原理的に予言できる。扱う物理系の運動を指定できる全ての座標の数を系の自由度と呼ぶ。例えば、3次元空間中の一つの粒子が存在する物理系の自由度は3である。粒子の数が、 $N$  個の場合、自由度は  $3N$  個である。自由度の数の座標軸と速度軸で張られる空間を位相空間と呼ぶ。粒子の運動は、位相空間内の軌跡の時間依存性すなわち各時刻の座標と速度が分かれば決定できる。解析力学の習わしに従って、座標を  $q_i$ 、速度をその時間微分  $\dot{q}_i$  で表し、それぞれを一般化座標、一般化速度と呼ぶ。位相空間内で  $q_i(t), \dot{q}_i(t)$  は互いに一次独立である。ここで  $i = 1, \dots, n$  で、 $n$  は扱う物理系の自由度である。例えば、一つの点状粒子の場合、3つの座標  $(q_1, q_2, q_3) = (x(t), y(t), z(t))$  と3つの速度成分  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$  を軸とする6次元空間内の軌跡を特定することが粒子の運動を調べる最終目標である。この例では、座標と速度で張られる6次元空間が位相空間である。多粒子系の場合は、粒子の数の分独立な座標と速度の成分が増える。例えば、2粒子系では、粒子1、2の座標と速度をそれぞれ  $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t)$  とすると一般化座標は  $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t), x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ 、一般化速度は  $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6) = (v_{1x}(t), v_{1y}(t), v_{1z}(t), v_{2x}(t), v_{2y}(t), v_{2z}(t))$  である。剛体の場合、系の運動状態を指定するのに必要な一般化座標は重心の3つの座標と3つのオイラー角の6つ、一般化速度はそれらの時間微分（重心の速度の3つの成分と3つの軸の周りの回転の角速度）の6つである。以後 Lagrangian を  $L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$  のように一般化座標、一般化速度の関数であるとして扱う。

物理系の運動は、自由度の数の一般化座標と一般化速度の時間発展で指定できるので、物理系の運動を指定する関数である Lagrangian は一般化座標と一般化速度の関数であり、一般化座標の時間二階微分以上を含まず

$L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$  である。

位相空間を用いた単振り子の運動の解析を紹介する。図 1.12 のように鉛直下方に  $y$  軸をとり、振り子の支点を原点として水平方向に  $x$  軸を取る。質

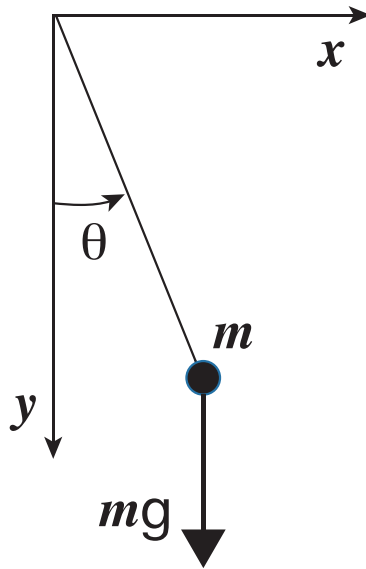


図 1.12 単振り子。

量  $m$  の質点が、長さ  $l$  の重さが無視できる紐に吊るされている。紐は常に真っ直ぐに伸びているとすると質点の座標は以下のように与えられる。

$$x = l \sin \theta, \quad (1.115)$$

$$y = l \cos \theta. \quad (1.116)$$

振り子が最下点に達した時、即ち  $y = l$  を重力の位置エネルギーの基準点とすると質点の力学的エネルギーは以下のように書ける。

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgl(1 - \cos \theta), \\ &= \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta). \end{aligned} \quad (1.117)$$

振り子が最下点に達した時の角速度を  $\omega_0$ 、振り子の基準振動数を

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad (1.118)$$

とすると振り子の角振動数と角度の関係式

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\omega^2(1 - \cos \theta)}, \quad (1.119)$$

を得る。図 1.13 に  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  で張られる位相空間内の単振り子の運動の様子を

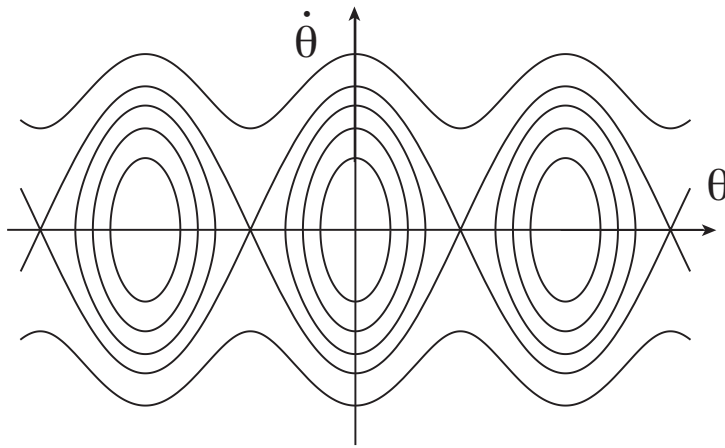


図 1.13 位相空間中の単振り子の運動。

示した。最下点での質点の運動エネルギー

$$\frac{1}{2}m\ell^2\omega_0^2$$

が、質点が最高点に達した時の重力の位置エネルギーと最下点での重力の位置エネルギーの差

$$2mgl$$

より大きい時、質点は初期の回転方向に半径  $\ell$  の円周上を回転運動をし続ける。位相空間中の曲線の内一番上の軌跡が反時計回りに回転する運動を一番下の軌跡が時計回りに回転する運動にそれぞれ対応する。一方、最下点での質点の運動エネルギーが  $2mgl$  以下の時、質点は重力を振り切って回転することができず、ある角度まで回転したところで質点は止まり逆方向回転を始める。このような場合の軌跡を、位相空間中の閉じた軌跡で示した。

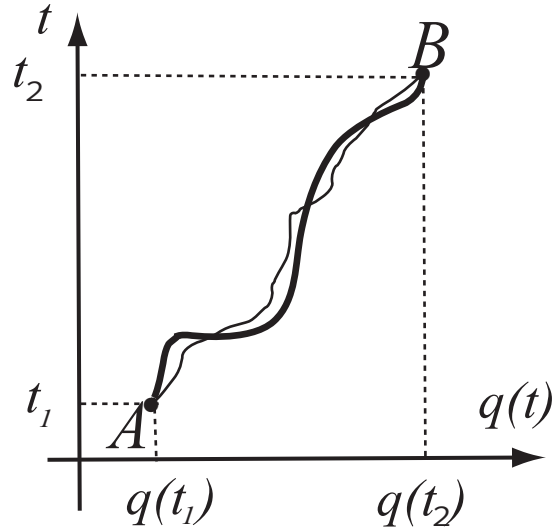


図 1.14 始点 A を時刻  $t_1$  に出発し終点 B に時刻  $t_2$  に到着する質点の位相空間中の軌跡. 太い実線で物理法則に従って運動する質点の真の軌跡を示した. 細かい実線は始点と終点を固定して真の軌跡から任意の微量ズラした軌跡を示す.

## 1.7 Euler-Lagrange 方程式

### 1.7.1 Euler-Lagrange 方程式

図 1.14 に示したような、時刻  $t_1$  で位相空間中の点 A を出発し、時刻  $t_2$  で点 B に到達する物理系の作用積分 (action) は、

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t)), \quad (1.120)$$

で求められる。物理法則に従って運動する場合を表す真の粒子の軌跡を  $(q_i(t), \dot{q}_i(t))$  とする。粒子の軌跡に以下のような変分を与える。

$$q'_i(t) = q_i(t) + \delta q_i(t), \quad (1.121)$$

$$\dot{q}'_i(t) = \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t). \quad (1.122)$$

ここで変分前後の系で共通の時計を用いる。すなわち、時間の変分は無い。ただし始点と終点は固定し、変分量はゼロとする。

$$\begin{aligned}\delta q_i(t_1) &= 0, & \delta \dot{q}_i(t_1) &= 0, \\ \delta q_i(t_2) &= 0, & \delta \dot{q}_i(t_2) &= 0,\end{aligned}\tag{1.123}$$

これらの条件のもとで作用積分の変分は以下のようにになる。

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t) + \delta q_i(t), \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t)) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta \dot{q}_i(t) \right) \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i(t) \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial q_i} \delta q_i(t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i(t) \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) \delta q_i(t)\end{aligned}\tag{1.124}$$

途中部分積分を行い、始点と終点を固定していること即ち  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$  を用いた。変分原理は物理的に実現される粒子の軌跡では、 $\delta S = 0$  であること、即ちこの式が任意の変分  $\delta q_i(t)$  に対してゼロであることを主張する。任意の変分  $\delta q_i(t)$  に対して式 (1.124) が恒等的に成り立つためには

$$\frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)} = 0\tag{1.125}$$

が各座標自由度  $i$  に対して成り立たなければならない。この  $n$  個の方程式が Euler-Lagrange 方程式である。作用積分 (1.120) が停留値を取る軌跡が、運動方程式に従う物理的な粒子の軌跡である、という指導原理で粒子の運動方程式を導出する原理を Hamilton の原理あるいは最小作用の原理と呼ぶ。作用は、物理的に実現される軌跡では、最小値をとる必要は無く、停留値をとれば十分である。しかし、質量を持った粒子の波動性を無視できる状況にある粒子の場合、最小値以外の停留値をとる軌跡が現れることはない。解析力学で扱う問題の多くは、このような状況にある粒子を扱うため最小作用の原理と呼んで差し支えない。

例として保存力場  $U$  の中を運動する質量  $m$  の一つの質点の運動を扱う。

慣性系におけるラグランジアン (Lagrangian) は以下ようになる。

$$L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m \dot{q}_i^2 - U(q_1, q_2, q_3). \quad (1.126)$$

これを Euler-Lagrange 方程式 (1.125) に代入すると以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial q_i} - m \frac{d^2 q_i}{dt^2} &= 0, \\ m \frac{d^2 q_i}{dt^2} &= -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (1.127)$$

右辺は粒子に働く力の  $i$  成分であり、期待通り保存力場中の粒子の運動方程式が得られた。

Lagrangian を構成して、Euler-Lagrange 方程式に代入して運動方程式を導出方法を以下では Lagrange 形式と呼ぶことにする。

式 (1.126) の定義から分かるように Lagrangian は、時間反転  $t \rightarrow -t$  に対して不変である。即ち、一つの運動が可能であれば、その運動の逆の運動も可能である。摩擦などによるエネルギーの散逸がない古典力学系の運動は、可逆的であることを示している。

### 1.7.2 Lagrange 形式の非慣性系への拡張

$z$  軸の正の方向を回転軸として角速度  $\Omega$  で回転する座標系における粒子の運動を扱う。粒子は質量  $m$  の質点で、保存力場中を運動しているとする。座標系は回転角速度ベクトル

$$\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega), \quad (1.128)$$

で回転していることになる。図 1.15 から回転系  $K'$  系と慣性系  $K$  系の座標は、以下の関係で結ばれることが分かる。

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t, \\ y &= x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (1.129)$$

これらの時間微分は以下のようにまとめられる。

$$\dot{x} = (\dot{x}' - y' \Omega) \cos \Omega t - (\dot{y}' + x' \Omega) \sin \Omega t,$$



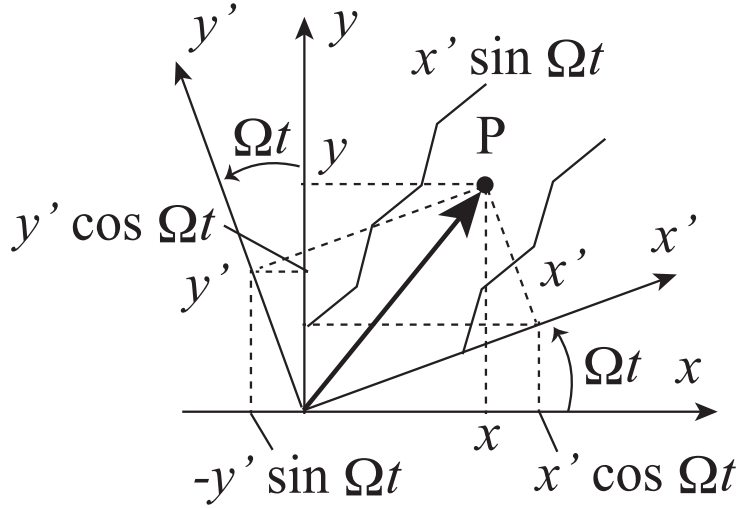


図 1.15 回転座標系 K' と慣性系 K 系の座標の関係。

$$y = (x' - y'\Omega) \sin \Omega t + (y' + x'\Omega) \cos \Omega t. \quad (1.130)$$

慣性系 K 系での Lagrangian は以下のように書ける。

$$L(x_i(t), \dot{x}_i(t)) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z). \quad (1.131)$$

Lagrangian は、スカラー量であるから座標変換によって値は不変である。そこで、K 系の Lagrangian (1.131) に座標変換式 (1.129), (1.130) を代入することで K' 系の Lagrangian を導く。

$$L(x'_i(t), \dot{x}'_i(t)) = \frac{1}{2}m((\dot{x}' - y'\Omega)^2 + (\dot{y}' + x'\Omega)^2 + \dot{z}^2) - U(x', y', z'). \quad (1.132)$$

Euler-Lagrange 方程式から以下の運動方程式を得る。x' 成分：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} \\ &= -\frac{\partial U}{\partial x'} + \Omega m(\dot{y}' + x'\Omega) - m \frac{d}{dt}(\dot{x}' - y'\Omega) \\ &= -\frac{\partial U}{\partial x'} + \Omega m(\dot{y}' + x'\Omega) - m\ddot{x}' + m\dot{y}'\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial U}{\partial x'} + 2\Omega m\dot{y}' + mx'\Omega^2 - m\ddot{x}' \\
m\ddot{x}' &= -\frac{\partial U}{\partial x'} + 2\Omega m\dot{y}' + m\Omega^2 x'. \tag{1.133}
\end{aligned}$$

同様の計算で  $y'$  成分、 $z'$  成分の運動方程式が以下のように求まる。

$$m\ddot{y}' = -\frac{\partial U}{\partial y'} - 2\Omega m\dot{x}' + m\Omega^2 y', \tag{1.134}$$

$$m\ddot{z}' = -\frac{\partial U}{\partial z'}. \tag{1.135}$$

回転系の運動方程式 (1.133)、(1.134) の右辺に現れる保存力以外の二項は、 $K'$  系が回転系であることに起因する慣性力であり、最後の項は遠心力、第二項はコリオリ力である。得られた運動方程式をベクトルを使ってまとめる。

$$m\dot{\mathbf{v}}' = -\nabla' U - 2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\Omega}. \tag{1.136}$$

ここで  $\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}}'$  は、 $K'$  系で測定した粒子の速度である。

方程式 (1.136) の両辺と速度  $\mathbf{v}'$  の内積をとる。左辺は

$$\mathbf{v}' \cdot m\dot{\mathbf{v}}' = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m v'^2, \tag{1.137}$$

のように  $K'$  系の粒子の運動エネルギーの時間全微分となる。右辺は、

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}' \cdot (-\nabla' U - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}') \times \boldsymbol{\Omega}) \\
&= -\frac{dU}{dt} - m((\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\Omega})(\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\Omega}) - (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{r}')\Omega^2) \\
&= -\frac{dU}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m((\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2 \Omega^2) \\
&= -\frac{dU}{dt} + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m r'^2 \Omega^2 (1 - \cos^2 \theta') \\
&= -\frac{dU}{dt} + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m (r' \sin \theta')^2 \Omega^2 \\
&= -\frac{dU}{dt} + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')^2. \tag{1.138}
\end{aligned}$$

ここで  $\theta'$  は、回転座標系の回転軸と粒子の位置ベクトルのなす角である。式 (1.137) と (1.138) から以下の保存則を得る。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')^2 + U \right) = 0. \quad (1.139)$$

式 (1.139) は、K' 系の粒子の力学的エネルギーが

$$E' = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')^2 + U, \quad (1.140)$$

であり、保存することを示している。上記のように運動方程式と速度の内積を取る操作をエネルギー積分と呼ぶ。速度は、単位時間あたりの移動距離なので、エネルギー積分は粒子に働く力の仕事率を求めていることになる。式 (1.138) の変形過程からコリオリ力が粒子のエネルギーに寄与を与えないことが分かる。コリオリ力は、粒子の速度と回転角速度の外積で与えられるため、速度に垂直である。したがって、コリオリ力は粒子に仕事をせず、粒子の力学的エネルギーへの寄与を与えない。力学的エネルギー (1.140) の右辺第二項は、遠心力ポテンシャルである。

次に回転系では運動量がどのようになるか調べる。力が働かない粒子即ち自由粒子の慣性系における運動量の各成分は保存量である。そこで、保存力場の位置エネルギーを  $U = 0$  として K' 系の運動方程式の  $x', y'$  成分について考察する。式 (1.133) と (1.134) は、以下のように整理できる。

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}' - m\Omega y') = \Omega(m\dot{y}' + m\Omega x'), \quad (1.141)$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}' + m\Omega x') = -\Omega(m\dot{x}' - m\Omega y'). \quad (1.142)$$

ナイーブに考えると K' 系の運動量の  $x', y'$  成分は

$$p'_x = m\dot{x}', \quad (1.143)$$

$$p'_y = m\dot{y}'. \quad (1.144)$$

である。一方、方程式 (1.141)、(1.142) は、 $p'_x, p'_y$  の発展方程式では無く、

$$P'_x \equiv m\dot{x}' - m\Omega y', \quad (1.145)$$

$$P'_y \equiv m\dot{y}' + m\Omega x', \quad (1.146)$$

で定義される  $P'_x, P'_y$  の発展方程式である。これらを用いると以下のようにスッキリ整理される。

$$\frac{d}{dt}P'_x = \Omega P'_y, \quad (1.147)$$

$$\frac{d}{dt}P'_y = -\Omega P'_x. \quad (1.148)$$

式 (1.145)、(1.146) で定義される  $P'_x, P'_y$  を成分とする 2次元ベクトルの K 系での成分  $P_x, P_y$  は、図 1.15 から以下のように表される。

$$P_x = P'_x \cos \Omega t - P'_y \sin \Omega t, \quad (1.149)$$

$$P_y = P'_x \sin \Omega t + P'_y \cos \Omega t. \quad (1.150)$$

方程式 (1.147) の両辺に  $\cos \Omega t$  を掛けたものから、方程式 (1.148) の両辺に  $\sin \Omega t$  を掛けた引くと以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dP'_x}{dt} \cos \Omega t - \frac{dP'_y}{dt} \sin \Omega t &= \Omega (P'_y \cos \Omega t + P'_x \sin \Omega t), \\ &= P'_y \frac{d \sin \Omega t}{dt} - P'_x \frac{d \cos \Omega t}{dt}. \end{aligned} \quad (1.151)$$

この式は以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(P'_x \cos \Omega t - P'_y \sin \Omega t) &= 0, \\ \frac{d}{dt}P_x &= 0. \end{aligned} \quad (1.152)$$

同様の操作をすることで

$$\frac{d}{dt}P_y = 0, \quad (1.153)$$

が導かれる。方程式 (1.152)、(1.153) は、自由粒子の場合  $P_x, P_y$  が保存量であることを示しており、これらが K 系における粒子の運動量の  $x, y$  成分であることが証明された。以上のことは、ある時刻  $t$  における回転系は慣性系に対して角度  $\Omega t$  回転させた系であるとして慣性系で定義される運動量から座標変換で結ばれる運動量は  $P'_x, P'_y$  であって  $p'_x, p'_y$  ではないことを示している。例えば、回転系で粒子が静止して見える即ち  $v'_x = v'_y = v'_z = 0$  であったとしても  $P'_x, P'_y$  は

$$P'_x = -m\Omega y', \quad (1.154)$$

$$P'_y = m\Omega x', \quad (1.155)$$

のような有限の値を持つ。回転系で静止して見える粒子とは、回転系と一緒に回転している粒子である。式 (1.154), (1.155) は、慣性系で観測した回転系と一緒に回転する粒子の運動量である。運動量  $P'_x, P'_y$  は、回転で観測される運動量  $p'_x, p'_y$  に系の回転に伴う運動量を足したものである。系の回転に伴う運動量を回転系で観測される粒子の運動量に加えることで、初めて慣性系の運動量と座標変換で結ばれるようになるのは、当然の結果と言える。運動方程式の形から自明だが回転系の運動量の  $z'$  成分は慣性系の運動量の  $z$  成分と何も変わらず、 $P'_z$  と  $p'_z$  に違いは生じない。

運動量  $P'_x, P'_y$  の各成分 (1.145)、(1.146) は、Lagrangian (1.131) から以下の式で結ばれる。

$$P'_x = \frac{\partial L}{\partial x'}, \quad (1.156)$$

$$P'_y = \frac{\partial L}{\partial y'}. \quad (1.157)$$

慣性系における運動量と Lagrangian もこの関係式結ばれる。

以上の結果を Lagrangian の定義式

$$L(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}') = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{v}' - E', \quad (1.158)$$

に代入してみる。ただし、運動量には  $\mathbf{p}' = m\mathbf{v}'$  では無く式 (1.156), (1.157) で定義される  $\mathbf{P}'$  を用いる。

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}') &= (mv'_x - m\Omega y')v'_x + (mv'_y + m\Omega x')v'_y + mv'_z v'_z \\ &\quad - \left( \frac{1}{2}m(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2) - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')^2 + U(\mathbf{r}') \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( m(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2) - 2m\Omega y'v'_x + 2m\Omega x'v'_y + m\Omega^2(x'^2 + y'^2) \right) - U(\mathbf{r}') \\ &= \frac{m}{2} \left( (v'_x - \Omega y')^2 + (v'_y + \Omega x')^2 + v_z'^2 \right) - U(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (1.159)$$

となり確かに式 (1.131) と一致する。この事実は、慣性系から回転系への座標変換に対して Lagrangian が確かに不変即ちスカラー量であることを示している。回転系での粒子の運動エネルギーは

$$K' = \frac{1}{2}mv'^2, \quad (1.160)$$

であり、ポテンシャルエネルギーは遠心力がポテンシャルが加わり

$$U' = U - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')^2, \quad (1.161)$$

である。これらの差  $K' - U'$  は回転系の Lagrangian (1.159) と一致しない。即ち、非慣性系の Lagrangian は  $L = K - U$  から求めることができない。

この節の最後に慣性系で測った粒子の力学的エネルギー  $E_0$  と回転系で測った粒子の力学的エネルギー  $E$  の差を調べる。回転系で観測される粒子の角運動量  $\mathbf{m}'$  は以下のように定義される。

$$m'_z = m(x'v'_y - y'v'_x). \quad (1.162)$$

一方、運動量同様回転系の角運動量  $\mathbf{M}$  を式 (1.156), (1.157) で定義される運動量を用いて以下のように定義することもできる。

$$M'_z = x'P'_y - y'P'_x = m(x'v'_y - y'v'_x + (x'^2 + y'^2)\Omega) = m'_z + mr^2\Omega. \quad (1.163)$$

最後の变形では、原点から質点までの距離が回転系と慣性系同じであること、言い換えると回転変換に対してスカラーであることを用いた。慣性系で定義される質点の角運動量  $\mathbf{M}_0$  は、

$$\begin{aligned} M_{0z} &= m(xv_y - yv_x) \\ &= m(x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t)((v'_x - y'\Omega) \sin \Omega t + (v'_y + x'\Omega) \cos \Omega t) \\ &\quad - m(x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t)((v'_x - y'\Omega) \cos \Omega t - (v'_y + x'\Omega) \sin \Omega t) \\ &= m(x'(v'_y + x'\Omega) - y'(v'_x - y'\Omega)) \\ &= M'_z. \end{aligned} \quad (1.164)$$

であり式 (1.163) で定義される角運動量と一致する。式 (1.163) の最後の項は、系の回転に伴う角運動量である。回転系に静止している質点は、回転系での角運動量  $\mathbf{m}'$  はゼロである。しかし、慣性系で観測すると角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  で回転しており、それに伴う角運動量を持つように観測される。慣性系における質点の力学エネルギーは

$$E_0 = \frac{m}{2}v^2 + U, \quad (1.165)$$

である。変換式 (1.130) をこの式に代入すると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
E_0 &= \frac{m}{2} ((v'_x - y'\Omega)^2 + (v'_y + x'\Omega)^2 + v'^2_z) + U \\
&= \frac{m}{2} v'^2 + mx'v'_y\Omega - my'v'_x\Omega + \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2)\Omega^2 + U \\
&= \frac{m}{2} v'^2 + M_{0z}\Omega - \frac{m}{2}(x^2 + y^2)\Omega^2 + U \\
&= E + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Omega}.
\end{aligned} \tag{1.166}$$

例えば回転系で静止して見える質点の  $\mathbf{M}$  と  $\boldsymbol{\Omega}$  は平行であり、それらの内積は正になるため、回転系での力学的エネルギーは、系の回転に伴う運動エネルギー分だけ小さいことになる。この例から分かるようにエネルギーは、系の取り方によって値を変え、スカラー量では無い。

### 1.7.3 総括

以上の結果から学んだことを一般の場合に拡張して重要事項をまとめる。Lagrangian は、エネルギーと運動量を用いて

$$L = \sum_{i=1}^n P_i \dot{q}_i - E, \tag{1.167}$$

のように定義される。ここで運動量  $P_i$  は、自由粒子を慣性系で記述した時保存する運動量であり、

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{1.168}$$

で定義される。慣性系では、保存力場中の粒子の Lagrangian は  $L = K - U$  で求まる。非慣性系の Lagrangian は、慣性系の Lagrangian に座標変換の関係式を代入することで得られる。これは、Lagrangian がスカラー量であることから保証される。式 (1.168) で定義される運動量が、自由粒子を慣性系で記述した時に保存する運動量であることの一般的証明は次章で行う。

## 1.8 拘束条件がある系の運動の扱い

単振り子は、視点を中心とした半径  $l$  の円周上を運動するという拘束条件がある系であった。支点を原点とした平面極座標を用いることでこの束

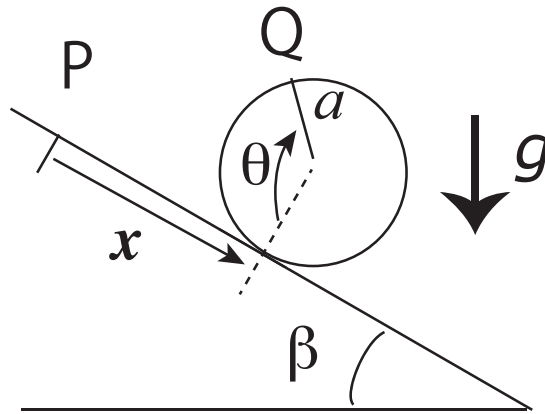


図 1.16 坂を転がり落ちる車輪。

縛条件を取り込むことができた。単振り子の運動を記述するには、方位角  $\theta$  の時間変化を追えば十分であった。二次元面内の運動なので、自由度は 2 であるが、拘束条件が一つ存在することにより自由度が一つ減り、自由度が方位角の一つだけとなった。このように拘束条件が存在するとその数だけ自由度が減る。また、適切な座標系を選択することで拘束条件を取り込むこともできる。ここでは、Lagrange の未定定数法を用いて拘束条件を取り込む方法を紹介する。

### 1.8.1 坂を転がり落ちる車輪

滑ることなく坂を転がり落ちる車輪の運動を例に拘束条件がある系の運動の扱いを解説する。図 1.16 に示したように初期に点 P から半径  $a$ 、質量  $m$  の車輪が坂を滑ることなく転がり落ち出したとする。点 P に車輪があった時、車輪の点 Q が坂と接していたとする。坂を  $x$  まで下った時、車輪は角度  $\theta$  回転した。鉛直下方にかかる重力の加速度は  $g$  とする。点 P を重力の位置エネルギーの基準点とすると  $x$  下った時の車輪の重力の位置エネルギーは

$$U = -mgx \sin \beta, \quad (1.169)$$



である。車輪の太さを無視できるとすると車輪の運動エネルギーは、重心が坂を落下する速度  $\dot{x}$  に伴う運動エネルギーと車輪の回転に伴う運動エネルギーの和として以下のように与えられる。

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2. \quad (1.170)$$

したがって、この系の Lagrangian が以下のように与えられる。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mgx \sin \beta. \quad (1.171)$$

車輪が坂を滑らないという条件は以下の拘束条件で表される。

$$C(x, \theta) = x - a\theta = 0. \quad (1.172)$$

Lagrange の未定定数  $\lambda$  を導入して新たな Lagrangian

$$L' = L + \lambda C, \quad (1.173)$$

を定義する。これを Euler-Lagrange 方程式に代入すると以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \lambda \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right) \\ &= mg \sin \beta - m\ddot{x} + \lambda, \end{aligned} \quad (1.174)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \left( \frac{\partial C}{\partial \theta} \right) \\ &= -ma^2\ddot{\theta} - \lambda a. \end{aligned} \quad (1.175)$$

求めるべき物理量は、 $x(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\lambda$  の三つで、解くべき方程式も運動方程式 (1.174)、(1.175) と拘束条件 (1.172) の三つである。拘束条件 (1.172) の時間二階微分から以下の関係を得る。

$$\ddot{x} = a\ddot{\theta}. \quad (1.176)$$

運動方程式 (1.174)、(1.175) から  $\lambda$  を消去し、関係式 (1.176) を用いて整理すると以下の方程式を得る。

$$2ma\ddot{\theta} = mg \sin \beta. \quad (1.177)$$

初期条件  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  の元で解くと解は以下のようなになる。

$$x = \frac{1}{4} g \sin \beta t^2, \quad (1.178)$$

$$\theta = \frac{g}{4a} \sin \beta t^2. \quad (1.179)$$

未定定数は

$$\lambda = -\frac{1}{2} mg \sin \beta, \quad (1.180)$$

のように求まる。運動方程式から分かるように  $-\lambda$  は坂と車輪の間の摩擦力である。車輪が滑らないのはこの摩擦が原因である。

### 1.8.2 拘束条件がある系の運動の扱い

一般の場合に拡張する為、この例を Euler-Lagrange 方程式の導出から振り返ってみる。作用積分の変分は以下のようになる。

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x + \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) \delta \theta \right] = 0. \quad (1.181)$$

拘束条件が存在するので  $\delta x$  と  $\delta \theta$  は独立ではなく、ここから Euler-Lagrange 方程式を導くことができない。一方、変分は拘束条件の元に行われるので

$$\delta C = \frac{\partial C}{\partial x} \delta x + \frac{\partial C}{\partial \theta} \delta \theta = 0, \quad (1.182)$$

を満さなければならない。この式から

$$\delta \theta = -\frac{(\partial C / \partial x)}{(\partial C / \partial \theta)} \delta x, \quad (1.183)$$

を得る。ここで

$$\lambda(t) \equiv -\left( \frac{\partial C}{\partial \theta} \right)^{-1} \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right), \quad (1.184)$$

で定義される未定乗数を導入すると作用積分の変分 (1.181) を以下のように書き換えることができる。

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \lambda(t) \frac{\partial C}{\partial x} \right) \delta x. \quad (1.185)$$

ここに現れる  $\delta x$  は、任意の変分を取ることができる。したがって、任意の変分  $\delta x$  に対して、式 (1.185) が恒等的にゼロになれという条件から以下の方程式が満たされなければならないことが導かれる。

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \lambda(t) \frac{\partial C}{\partial x} = 0. \quad (1.186)$$

未定乗数の定義式 (1.184) は以下のように整理される。

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda(t) \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0. \quad (1.187)$$

この結果は未定乗数を用いて形式的に式 (1.173) のように導入した Lagrangian を Euler-Lagrange 方程式に代入して得られる結果と一致している。



## 第2章

# 保存量

### 2.1 系の対称性と保存量

#### 2.1.1 時間推進対称性：エネルギー

物理系の時間的一様性から導かれる保存則を調べる。時間的一様性から Lagrangian  $L$  が時間を陽に含まない。したがって、 $L$  の時間全微分は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

二つ目の等号では、粒子の軌跡は Euler-Lagrange 方程式を満たすことを用いた。この式から以下の結果を得る。

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0. \quad (2.2)$$

これから物理系が時間的に一様であれば

$$E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L, \quad (2.3)$$

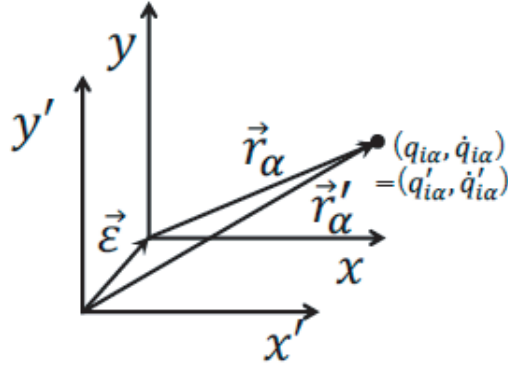


図 2.1 空間推進変換。

で定義される物理量  $E$  が保存することが示された。この量がエネルギーである。

### 2.1.2 空間推進対称性：運動量

物理系の空間的一様性から導かれる保存則を調べる。空間的一様性を持つ時、物理系の空間内の任意の平行移動に対して Lagrangian が不変である。空間座標を無限小ベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}$  だけ平行移動する。粒子の一般化座標を  $q_{i\alpha}$  とし、 $i = x, y, z$  で  $\alpha$  が粒子の識別番号とする。 $\alpha = 1, \dots, N, n = 3N$  である。また  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  である。即ち、図 2.1 に示したような、以下の座標変換を

$$q'_{i\alpha} = q_{i\alpha} + \varepsilon_i, \quad (2.4)$$

$$\dot{q}'_{i\alpha} = \dot{q}_{i\alpha}, \quad (2.5)$$

に対して Lagrangian が不変であることに付随して保存する物理量を調べる。この座標変換による  $L$  の変化量は、以下のように計算される。

$$\delta L = L(q_{i\alpha} - \varepsilon_i, \dot{q}_{i\alpha}) + L(q_{i\alpha}, \dot{q}_{i\alpha}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_{i\alpha}} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_{i\alpha}}. \quad (2.6)$$

空間的一様性を持つ時、空間座標の平行移動に対して  $L$  が不変なので、Lagrangian の変化量が任意の空間推進  $\varepsilon_i$  に対してゼロである。式 (2.6) より以下の式をえる。

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_{i\alpha}} = 0. \quad (2.7)$$

Euler-Lagrange 方程式を代入すると以下の保存則を得る。

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i\alpha}} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i\alpha}} = 0. \quad (2.8)$$

ここで

$$P_{i\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i\alpha}}, \quad (2.9)$$

を粒子  $\alpha$  の一般化座標  $q_{i\alpha}$  に正準共役な運動量の  $i$  成分であると定義する。したがって、式 (2.8) は、Lagrangian が空間平行移動に対して不変であるとき、粒子系の全正準運動量が保存することを示している。系によっては、ある一つの方向に対する空間推進に対しては対称だが、他の直交する二つの方向に対する空間推進に対する対称性が無い系がありうる。この場合は、対称性が保たれる方向の運動量成分のみ保存し、他は保存しない。

物理系が空間的に一様な場合とはどのような時であろうか。力が存在しない自由粒子を慣性系で記述する Lagrangian は、 $\dot{q}_{i\alpha}$  だけに依存し、明らかに空間的に一様である。したがって、慣性系における自由粒子の正準運動量は、保存する。一方、非慣性系では、慣性力の存在のため、保存力が存在しない場合でも正準運動量は保存しない。このことは、節 1.7.2 で解説した回転系の例で具体的にみた通りである。実際回転系の自由粒子（慣性力以外働かないという意味で）の Lagrangian は、座標を陽に含み、空間推進に対して不変では無い。自由粒子系以外で空間的に一様な物理系は、内力のみが働く粒子系である。例えば、バネの両端に重りがついた系は、バネの弾性エネルギーは二つの粒子の相対距離にのみ依存する。そのため、座標原点を移動させても Lagrangian は変わらない。このことから二つの重りの運動量の総和が保存する。内力のみが働く粒子系では、互いの粒子に働く力が作用反作用の法則に従い、系の全運動量が保存することに対応している。

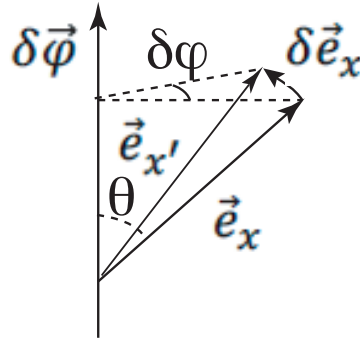


図 2.2 無限小座標回転。

### 2.1.3 座標回転対称性：角運動量

物理系が空間的等方性を持っている場合の保存則を導く。図 2.2 に示したように軸  $\delta\boldsymbol{\varphi}$  の周りの無限小角  $\delta\varphi$  の回転を行う。この座標回転変換による基底ベクトル  $\mathbf{e}_x$  の変化量を  $\delta\mathbf{e}_x$  とすると

$$\delta\mathbf{e}_x = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_x, \quad (2.10)$$

のように与えられる。これは次のように考えれば納得できる。回転変換に伴う基底ベクトルの変化量の方法は、 $\boldsymbol{\varphi}$  と  $\mathbf{e}_x$  が張る平面に垂直でベクトル  $\boldsymbol{\varphi}$  から  $\mathbf{e}_x$  へ右ネジを回した時、ネジが進む方向を向く。基底ベクトル  $\mathbf{e}_x$  の大きさは、1 である。回転軸と基底ベクトル  $\mathbf{e}_x$  の終点の距離は、 $\sin\theta$  である。したがって、回転変換に伴う規定ベクトルの変化量  $\delta\mathbf{e}_x$  の大きさは  $\delta\varphi \sin\theta$  である。これらは、式 (2.10) で表現できている。ここで扱った  $\mathbf{e}_x$  は、座標の  $x$  軸方向の基底ベクトルである。同様に座標の回転変換に伴う  $y, z$  軸方向の規定ベクトル  $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  の変化量も以下のように書ける。

$$\delta\mathbf{e}_y = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_y, \quad (2.11)$$

$$\delta\mathbf{e}_z = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z. \quad (2.12)$$

これらを用いて座標変換後の基底ベクトルは以下のように書ける。

$$\mathbf{e}_{x'} = \mathbf{e}_x + \delta\mathbf{e}_x, \quad (2.13)$$



$$\mathbf{e}_{y'} = \mathbf{e}_y + \delta\mathbf{e}_y, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{e}_{z'} = \mathbf{e}_z + \delta\mathbf{e}_z. \quad (2.15)$$

これら変換後の基底ベクトルの大きさは、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{x'} \cdot \mathbf{e}_{x'} &= \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_x \cdot \delta\mathbf{e}_x + \delta\mathbf{e}_x \cdot \delta\mathbf{e}_x \\ &= 1 + \delta\varphi^2 \sin^2 \theta \sim 1, \end{aligned} \quad (2.16)$$

のように微小量  $\delta\varphi$  の一次までの精度で 1 である。途中の変形で  $\mathbf{e}_x$  と  $\delta\mathbf{e}_x$  が直交することをを用いた。

座標の回転変換に伴う、任意のベクトル  $\mathbf{A}$  の成分の変化量は以下のよう  
に求まる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_{x'}\mathbf{e}_{x'} + A_{y'}\mathbf{e}_{y'} + A_{z'}\mathbf{e}_{z'} \\ &= A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2.17)$$

回転変換前後のベクトルの成分の間関係式を求めるため式 (2.17) と変換後の基底ベクトル  $\mathbf{e}_{x'}$ ,  $\mathbf{e}_{y'}$ ,  $\mathbf{e}_{z'}$  との内積をとる。

$$\begin{aligned} A_{x'} &= (A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z) \cdot (\mathbf{e}_x + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_x) \\ &= A_x + \mathbf{A} \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_x) = A_x + \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{A} \times \delta\boldsymbol{\varphi}) \\ &= A_x - \mathbf{e}_x \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{A}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} A_{y'} &= (A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z) \cdot (\mathbf{e}_y + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_y) \\ &= A_y + \mathbf{A} \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_y) = A_y + \mathbf{e}_y \cdot (\mathbf{A} \times \delta\boldsymbol{\varphi}) \\ &= A_y - \mathbf{e}_y \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{A}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} A_{z'} &= (A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z) \cdot (\mathbf{e}_z + \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z) \\ &= A_z + \mathbf{A} \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z) = A_z + \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{A} \times \delta\boldsymbol{\varphi}) \\ &= A_z - \mathbf{e}_z \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{A}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

右辺は、座標回転変換前の成分である。これらの関係式が、座標回転前後のベクトルの成分を結びつける関係式である。したがって、ベクトルの成分の変化量は以下のようなになる。

$$\delta\mathbf{A} = -\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{A}. \quad (2.21)$$

以上の結果から粒子の位置ベクトル  $\mathbf{r}$  および粒子の速度ベクトル  $\mathbf{v}$  の座標

回転変換に伴う変化量は以下のように書き表される。

$$\delta \mathbf{r} = -\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}, \quad (2.22)$$

$$\delta \mathbf{v} = -\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}. \quad (2.23)$$

座標回転に伴う Lagrangian の変化量は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial L}{\partial q_{i\alpha}} \delta r_{i\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i\alpha}} \delta v_{i\alpha} \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^3 \left( \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i\alpha}} \right) \delta r_{i\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i\alpha}} \delta v_{i\alpha} \right) \\ &= - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^3 \left( \frac{dP_{i\alpha}}{dt} (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_\alpha)_i + P_{i\alpha} (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}_\alpha)_i \right) \\ &= - \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{d\mathbf{P}_\alpha}{dt} \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_\alpha) + \mathbf{P}_\alpha \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt}) \right) \\ &= - \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{P}_\alpha \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_\alpha) \\ &= -\delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{P}_\alpha). \end{aligned} \quad (2.24)$$

物理系が等方性を持つ時、Lagrangian は座標回転に対して不変、即ち式 (2.24) は任意の無限小回転  $\delta \boldsymbol{\varphi}$  に対してゼロでなければならない。したがって、

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{P}_\alpha) = 0, \quad (2.25)$$

であり、系の角運動量が保存する。系によっては、ある一定の軸の周りの回転対称性はあるが、他の直交する二つの軸の周りの回転対称性が保たれていない場合がある。この時は、対称性が保たれる軸の方向の角運動量成分のみが保存量となる。

## 2.2 循環座標

Lagrangian が、ある特定の座標を陽に含まない時、その座標に共役な正準運動量が保存する。これは Euler-Lagrange 方程式から自明である。即ち  $q_i$  が循環座標なら

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \\ \frac{d}{dt} P_i &= 0,\end{aligned}\tag{2.26}$$

である。この時、その座標を循環座標と呼ぶ。例として、中心力場中の粒子の Lagrangian を球面極座標を用いて書き表すと以下のようなになる。

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - U(r).\tag{2.27}$$

この Lagrangian は、方位角  $\phi$  を陽に含まず、 $\phi$  が循環座標である。方位角に正準共役は運動量  $P_\phi$  は

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi},\tag{2.28}$$

であり、これは  $z$  軸の周りの角運動量である。即ち  $z$  軸の周りの角運動量が保存する。ここで  $x, y, z$  軸の取り方は、任意であるので、適当に座標回転をする事で今  $x$  軸お設定した軸を  $z$  軸に今  $y$  軸と設定した軸を  $z$  軸一致させることができる。即ち中心力場中の粒子の任意の軸の周りの角運動量が保存する。ここで取り上げた Lagrangian は時間を陽に含まないため式 (2.3) で定義されるエネルギーが保存する。

$$\begin{aligned}E &= \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - L \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + U(r).\end{aligned}\tag{2.29}$$

この例から分かるようにエネルギーは、時間に共役な正準運動量では無い。そのため時間は循環座標とは呼ばない。

## 2.3 ネーターの定理

座標変換に対する系の対称性と保存量との関係を結ぶネーターの定理を導出する。以下のような一般の無限小座標変換を考える。

$$t' = t + \delta t(t, x_j),\tag{2.30}$$

$$x'_i = x_i + \delta x_i(t, x_j).\tag{2.31}$$

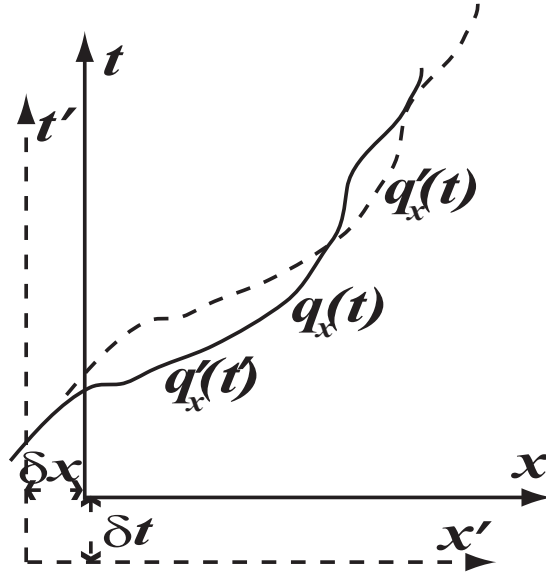


図 2.3 無限小座標変換  $t' = t + \delta t, x' = x + \delta x$  と質点の軌跡の  $x$  成分（実線）の様子を示す。座標変換後の質点の軌跡を表す関数を元の座標  $t-x$  座標系に持ってきたもの  $q'_x(t)$  を破線で表わす。ここでは簡単のため  $\delta t, \delta x$  は時間、空間座標によらず一定とした。

無限小量  $\delta t, \delta x_i$  は一般に時刻  $t$ 、および空間座標  $x_j$  の関数でよい。変換 (2.30) は、元の座標系の時計と比べて時間が  $\delta t$  だけ進んだ時計を持つ観測者への座標変換を行っているといえることができる。以下の式で定義される微少量をリー（Lie）微分と呼ぶ。

$$\delta^L q_i(t) \equiv q'_i(t) - q_i(t) \quad (2.32)$$

リー微分は、座標変換による関数形の変化量を表すものである。図 2.3 にリー微分で比較している関数の様子を示す。リー微分は以下のように変形すると以後便利であり且つ物理的理解を助ける。

$$\delta^L q_i(t) = q'_i(t) - q'_i(t') + q'_i(t') - q_i(t) \quad (2.33)$$

$$= -\dot{q}'_i \delta t(t, x_j) + \delta x_i(t, x_j) \quad (2.34)$$

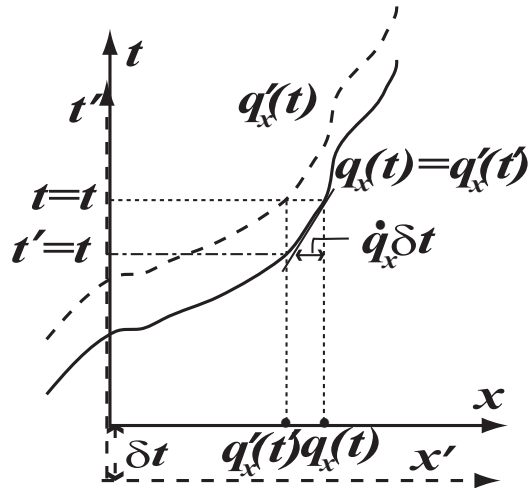


図 2.4 無限小座標変換  $t' = t + \delta t, \delta x_i = 0$  の場合のリー微分。簡単のため  $\delta t$  は、空間的に一様で時間に依存しないとした。

ここで  $t'$  は、 $t$  と式 (2.30) で結ばれる。一つ目の等号の右辺第二項は、物理的には同時刻の粒子の位置を座標変換前後の観測者で測定した結果の差を表している。それは、空間座標の変換によって生じたズレに等しいということを最後の等号の式変換で用いた。右辺第一項の物理的理解を助けるために時間原点のズレのみを行った場合、即ち  $\delta x_i = 0$  のケースについて図 2.4 に示した。図から分かるように  $q'_x(t)$  は、'系では時計が  $\delta t$  進んでいるため '系での時刻  $t$  は元の座標の時計では  $t - \delta t$  のことである。従って、'系で時計が  $t$  をさす時の質点の位置はこれから  $\delta t$  間に質点が進む距離  $\dot{q}_x \delta t$  だけ元の座標での時刻  $t$  での位置より手前である。この事から

$$\delta^L q_x = -\dot{q}_x \delta t$$

となることが理解できる。これが式 (2.34) の右辺第一項の物理的意味である。ここで  $q'_x(t)$  と  $q_x(t)$  の差が微小量の一次であることをから、微小量の一次までで  $q'_x(t)$  を  $q_x(t)$  で近似できることを用いた。

準備が整ったのでいよいよネーターの定理を導出する。座標変換に対する系の対称性という言葉の冒頭に述べた。数学的には、作用積分  $I$  がある座

標変換に対して不変である時その物理系はその座標変換に対して対称である、と言う。従って座標変換前後での作用積分の値を比較して差がゼロかどうかを調べればよいのである。作用積分の差は以下のように定義される。

$$\delta I = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L\left(q'_i(t'), \frac{dq'_i(t')}{dt'}\right) - \int_{t_1}^{t_2} dt L\left(q_i(t), \frac{dq_i(t)}{dt}\right)$$

この式に登場する ' 付きの変数を元の座標の変数で書き表す。

$$\begin{aligned} dt' &= \frac{dt'}{dt} dt = (1 + \delta t) dt \\ q'_i(t') &= q_i(t) + \delta x_i \\ \frac{dq'_i(t')}{dt'} &= \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} (q_i(t) + \delta x_i) \\ &= (1 - \delta t)(\dot{q}_i(t) + \delta \dot{x}_i) \\ &= \dot{q}_i(t) - \delta t \dot{q}_i(t) + \delta \dot{x}_i \end{aligned}$$

微小量の一次まで残した。一方リ-微分の時間微分は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta^L q_i(t) &= \frac{d}{dt} (q'_i(t) - q_i(t)) = -\frac{d}{dt} ((q'_i(t') - q'_i(t)) + q'_i(t') - q_i(t)) \\ &= -\dot{q}'_i \delta t - \dot{q}_i \delta t + \delta \dot{x}_i = -\dot{q}_i \delta t - \dot{q}_i \delta t + \delta \dot{x}_i. \end{aligned} \quad (2.35)$$

また、ラグランジアンは陽に時間に依存しないとするとラグランジアンの時間全微分が以下のように書ける。

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right)$$

以上を用いると作用積分の変分量が以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} dt (1 + \delta t) L(q_i(t) + \delta x_i(t), \dot{q}_i(t) - \delta t \dot{q}_i(t) + \delta \dot{x}_i(t)) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \delta t L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) + \sum_i \left( \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial q_i} \delta x_i(t) + \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i} (-\delta t \dot{q}_i(t) + \delta \dot{x}_i(t)) \right) \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d(\delta t L)}{dt} - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \delta t \right) \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (-\delta t \dot{q}_i + \delta \dot{x}_i) \right) \end{aligned}$$

ここで以下の変形を行う。

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (-\dot{q}_i \delta t + \delta x_i) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (-\dot{q}_i \delta t + \delta x_i) \right) + \delta t \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \delta x_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta x_i \right]$$

この式を代入して  $\delta I$  の式を更に変形する。

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \delta t L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta^L q_i \right) \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left( -\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \delta t - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta x_i + \delta t \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \delta x_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta x_i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \delta t L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta^L q_i \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta^L q_i \end{aligned}$$

ここで式 (2.34) を用いてリー微分で書き換えた。質点の軌跡はオイラー・ラグランジュ方程式を満たすため最後の項はゼロである。従って、考えている座標変換に対して系が対称の時、即ち  $\delta I = 0$  の時、以下の式で定義される  $N$  が保存量  $dN/dt = 0$  となる。

$$N \equiv \frac{1}{\varepsilon} \left( -\delta t L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta^L q_i \right) \quad (2.36)$$

この保存量をネーターカレント (Noether current) と呼びこれをネーターの定理と呼ぶ。ここで  $\varepsilon$  は、無限小変換の変化量であり、以下の具体例で具体的に示す。

例としてまず無限小時間推進に対して系が対称な場合のネーターカレントを求める。この時

$$\begin{aligned} \delta t &= \varepsilon \\ \delta x_i &= 0 \end{aligned}$$

である。但し  $\varepsilon$  は時間によらない定数とする。従って、

$$\delta^L q_i = -\varepsilon \dot{q}_i$$

である。これらを式 (2.36) に代入すると以下の式を得る。

$$N = -L + \sum_i P_i \dot{q}_i = H$$

ここで正準運動量とハミルトニアン の定義式を用いた。従って、時間推進に

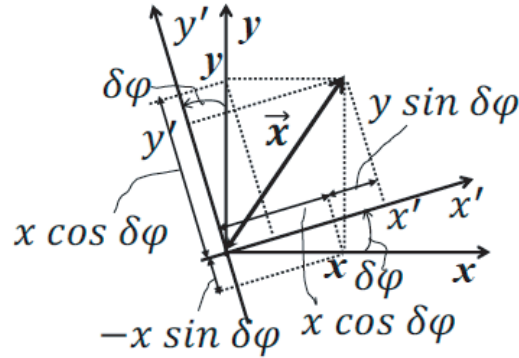


図 2.5 回転座標変換

対して系が対称な場合保存する量はハミルトニアン即ちエネルギーである。

次に無限小空間推進に対して系が対称な場合のネーターカレントを求める。簡単のため  $x$  軸方向のみの空間推進を考える。この時

$$\delta t = 0$$

$$\delta \vec{x} = (\varepsilon, 0, 0)$$

$$\delta^L \vec{q} = (\varepsilon, 0, 0)$$

である。これらを式 (2.36) に代入すると以下の式を得る。

$$N = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} = -P_x$$

ここで正準運動量の定義式を用いた。従って系が  $x$  方向の無限小座標推進に対して対称である時ネーターカレントは本質的に正準運動量の  $x$  成分にマイナスを掛けたものとなり、即ち正準運動量の  $x$  成分が保存する。

最後に無限小座標回転に対する系の対称性と関係するネーターカレントを求める。ここでは、簡単のため  $z$  軸を軸とした回転変換を扱う。図 2.5 に  $z$  軸を軸とした角度  $\delta\varphi$  の回転変換に伴う位置ベクトルの座標の変化の様子を示した。この図から座標変換前後の位置ベクトルの成分の関係が以下のように求まる。

$$x' = x \cos \delta\varphi + y \sin \varphi \sim x + y \delta\varphi, \quad (2.37)$$



$$y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \sim -x \delta \varphi + y, \quad (2.38)$$

$$z' = z. \quad (2.39)$$

ここで  $\delta \varphi$  が微小量であることを用いて、微小量の一次まで残した。質点の一般化座標を  $(q_x(t), q_y(t), q_z(t))$  とする。リー微分は以下のようなになる。

$$\delta^L q_x(t) = q_y \delta \varphi, \quad (2.40)$$

$$\delta^L q_y(t) = -q_x \delta \varphi. \quad (2.41)$$

今の場合、 $\delta \varphi = \varepsilon$  であることを用いるとネーターカレントは以下のようなになる。

$$N = -P_x q_y + P_y q_x = (\mathbf{q} \times \mathbf{P})_z \quad (2.42)$$

ここで  $\mathbf{P}$  は、 $\mathbf{q}$  に共役な正純運動量である。式 (2.42) の右辺は、角運動量の  $z$  成分、言い方を変えると角運動量の回転軸方向の成分である。即ち、系がある回転軸の周りの回転変換に対して対称であるとき、回転軸方向の角運動量が保存する。



## 第3章

# 正準形式

### 3.1 Legendre 変換

$x, y$  を独立変数とする関数  $\Phi(x, y)$  を考え、その偏導関数を以下のように変数  $(u, v)$  を用いて表す。

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (3.1)$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (3.2)$$

これを用いると関数  $\Phi$  の全微分が以下のように書ける。

$$d\Phi = udx + vdy. \quad (3.3)$$

独立変数を  $(x, y)$  から  $(u, y)$  に変換することを考える。以下では、独立変数の一つである  $x$  の関数  $\Phi$  の  $x$  による偏導関数  $u$  への変換を扱う。これは、関数  $\Phi$  から以下のように定義される新たな関数  $\Psi$  を導入することで実現される。

$$\Psi = ux - \Phi. \quad (3.4)$$

関数  $\Psi$  の全微分を計算する。

$$\begin{aligned} d\Psi &= xdu + udx - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \\ &= xdu + udx - udx - vdy = xdu - vdy. \end{aligned} \quad (3.5)$$

この結果は、 $\Psi$  が  $(u, y)$  の関数であることを示しており

$$x = \frac{\partial \Psi}{\partial u}, \quad (3.6)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (3.7)$$

の関係で  $(x, v)$  が  $\Psi$  の  $(u, y)$  による偏微分と結ばれる。

このようにある関数とその関数の独立変数の一部を独立変数による偏微分に入れ替えた新しい関数に変換する操作を Legendre 変換と呼ぶ。

与えられた問題を解くにあたって適切な座標系を選択することで、楽に問題が解けるようになる例を多数経験しているであろう。物理系の時間発展が分かるとは位相空間内の状態を指定することであった。このことから一般化座標とそれと正準共役な運動量を適切に選択することが問題を解く上で鍵となりうる事が予想できる。そのような目的で用いられるのが正準変換であり、そこでは Legendre 変換が用いられる。式 (3.74) の関係が正準変換で用いられる Legendre 変換の例である。

Legendre 変換は、単なる問題を解きやすくする為に施す位相空間中の座標変換に留まらず、新たな物理系の見方の提案、即ちパラダイムシフトを引き起こすこともある。そのような例を付録 C に紹介した。この例では、Legendre 変換により文字通り見方を 90 度回転させて、相転移現象の記述に自発的対称性の破れという新しい概念の導入に繋がるパラダイムシフトを引き起こした。私が大学院で実施する講義のノートからコピーしてきた為英文で書かれているが、平易な文章で書かれているので問題ないであろう。

## 3.2 正準形式

一般化座標  $q_i$  に正準共役な運動量を次の式でラグランジアンから定義する。

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.8)$$

以下、正準運動量と呼ぶことにする。以下では、一般化座標  $q_i$  と正準運動量  $p_i$  で張られる  $2N$  次元空間を位相空間と呼ぶ。ここで  $N$  は、系の自由度

である。また、 $q_i, p_i$  を正準変数と呼ぶ。

Hamiltonian  $H$  は、 $(q_i, \dot{q}_i)$  の関数である Lagrangian  $L(q_i, \dot{q}_i)$  の  $\dot{q}_i$  を  $L$  の  $\dot{q}_i$  による偏微分  $p_i$  に Legendre 変換して得られる関数であり、以下のように定義される。

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i) \quad (3.9)$$

以下、簡単のために一次元系を扱う。ハミルトニアンは以下のようになる。

$$H(q, p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}). \quad (3.10)$$

ハミルトニアンの全微分は、

$$\begin{aligned} dH &= \dot{q}dp + pd\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} \\ &= \dot{q}dp + pd\dot{q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}dq - pd\dot{q} \\ &= \dot{q}dp - \dot{p}dq, \end{aligned} \quad (3.11)$$

となり、確かにハミルトニアンは  $q, p$  の関数である。ハミルトニアンの全微分は以下のようにも書ける。

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp. \quad (3.12)$$

式 (3.11) と式 (3.12) が任意の  $dq, dp$  に対して成り立つためには、 $dq, dp$  それぞれの係数が等しくなければならない。このことから以下の方程式を得る。

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (3.13)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (3.14)$$

この二つの方程式の組みは、ハミルトンの運動方程式、あるいは正準運動方程式と呼ばれる、粒子の運動を記述する基本方程式である。

正準運動方程式を最小作用の原理から導いてみる。Hamiltonian を用いて作用積分 (1.114) あるは (1.112) は以下のように書ける。

$$S = \int_{t_p}^{t_Q} dt \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i) \right). \quad (3.15)$$

一般化座標と正準運動量に以下のように真の軌跡  $q_i, p_i$  から任意の変分を与える。

$$q_i \rightarrow q_i + \eta_i, \quad p_i \rightarrow p_i + \zeta_i. \quad (3.16)$$

最小作用の原理をハミルトニアンを用いて書き直すと以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_p}^{t_Q} dt (\delta(\sum_i p_i \dot{q}_i) - \delta H) = \int_{t_p}^{t_Q} dt \left( \sum_i (\zeta_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i) - \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \zeta_i \right) \right) \\ &= [p_i(t) \eta_i(t)]_{t_p}^{t_Q} + \int_{t_p}^{t_Q} dt \sum_i \left[ \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \zeta_i(t) - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \eta_i(t) \right] \\ &= \int_{t_p}^{t_Q} dt \sum_i \left[ \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \zeta_i(t) - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \eta_i(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

最後の等号では、始点と終点を固定して変分をとったこと即ち  $\eta_i(t_p) = \eta_i(t_Q) = 0$  を用いた。粒子は、作用を最小とする軌跡を通るという最小作用の原理を適用すると、任意の変分  $\eta_i(t)$ ,  $\zeta_i(t)$  に対して変分 (3.17) が 0 でなければならない。この要請からハミルトニアンが満たす以下の方程式が得られる。

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (3.18)$$

この方程式をハミルトンの正準運動方程式と呼ぶ。

ポテンシャル場中を非相対論的速度で運動する質量  $m$  の質点の場合を例として扱う。正準運動量は以下のようなよく見なれた形になる。

$$p_i = m\dot{q}_i$$

ハミルトニアンは

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(q_i)$$

となりこれは質点の力学的エネルギーである。正準運動方程式は

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{p_i}{m},$$

となり、初めの式はポテンシャル場中の質点の運動方程式を二番目の式は速度を用いた正準運動量の定義式を与える。

### 3.3 正準変換と母関数

#### 3.3.1 Lagrangian の任意性

一般化座標  $q$ 、一般化速度  $\dot{q}$  で記述される粒子の軌道を考える。この粒子の運動がラグランジアン  $L$  で記述されるとする。この粒子は以下のオイラー・ラグランジ方程式を満たす。

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (3.19)$$

オイラー・ラグランジ方程式から粒子の運動方程式を導き出すラグランジアンは一意には決まらない。例として質量  $m$  の一次元自由粒子の運動を考える。馴染みが深いラグランジアンは以下のものであろう。

$$L_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2. \quad (3.20)$$

これをオイラー・ラグランジ方程式に代入すると以下の方程式が得られる。

$$m \ddot{x} = 0. \quad (3.21)$$

次に  $\alpha \neq 0$  なる定数  $\alpha$  を用いて

$$L_2 = e^{\alpha x}, \quad (3.22)$$

で定義されるラグランジアンを考える。これをオイラー・ラグランジ方程式に代入すると以下の方程式を得る。

$$-\alpha^2 \ddot{x} e^{\alpha x} = 0. \quad (3.23)$$

$\alpha \neq 0$  より、この式から以下の運動方程式を得る。

$$\ddot{x} = 0. \quad (3.24)$$

確かに一次元自由粒子の運動方程式が得られる。

同じ粒子の運動を表す二つのラグランジアン  $L, L'$  が一般化座標  $x$  と時間

$t$  のみの関数  $W(x,t)$  を用いて

$$L' = L + \frac{dW}{dt}, \quad (3.25)$$

で結ばれる場合を考える。ここで  $W$  は  $x$  と  $t$  の関数であるから

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (3.26)$$

と書ける。これを用いて  $\frac{dW}{dt}$  をオイラー・ラグランジ方程式の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dW}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left( \frac{dW}{dt} \right) \right] \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \dot{x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial W}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \dot{x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \dot{x} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

となり恒等的にゼロとなる。したがって、 $L'$  は  $L$  と全く同じ運動方程式を与える。言い換えるとラグランジアンには変換式 (3.25) の不定性が伴う。自由粒子の例で取り上げた  $L_1, L_2$  の差は変換式 (3.25) の形では表せない。しかし、この例では最終的に得られる粒子の運動方程式は同じ (3.24) であるが、オイラー・ラグランジ方程式から得られる方程式は式 (3.21) と式 (3.23) のように異なる形をしていて互いに等しくない。一方、変換 (3.25) と恒等式 (3.27) より、二つのラグランジアンが変換 (3.25) で結ばれる場合は、オイラー・ラグランジ方程式から得られる方程式形が変換前後で全く等しくなる。

次にこれの逆も真であること、即ち二つのラグランジアンをオイラー・ラグランジ方程式に代入して得られる方程式の形が互いに等しい時、これらのラグランジアンが変換 (3.25) で結ばれることを示す。ラグランジアンは  $x, \dot{x}$  の関数であるから二つのラグランジアンの差も  $x, \dot{x}, t$  の関数  $G(x, \dot{x}, t)$  を用いて以下のように書けるはずである。

$$L' = L + G(x, \dot{x}, t). \quad (3.28)$$



これらの二つのラグランジアンが満たすオイラー・ラグランジ方程式が等しいという要請から

$$\begin{aligned}\frac{\partial L'}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}, \\ &= \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}},\end{aligned}\quad (3.29)$$

となり、これから  $G$  が

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} = 0, \quad (3.30)$$

を満たさなければならぬことがわかる。 $G$  に対する条件式 (3.30) をさらに変形すると  $G$  の満たすべき方程式が以下のように求まる。

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \dot{x}} \dot{x} - \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{x}^2} \ddot{x} - \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial \dot{x}} = 0, \quad (3.31)$$

$G$  は  $\ddot{x}$  を含まないので、その  $x, \dot{x}$  による微分係数から  $\ddot{x}$  を含むことは現れない。したがって、方程式 (3.30) が恒等的に成り立つためには、 $\ddot{x}$  の係数がゼロ即ち、

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{x}^2} = 0, \quad (3.32)$$

が恒等的に成り立つ必要がある。この方程式の一般解は、 $x, t$  のみの任意関数  $f(x, t), g(x, t)$  を用いて以下のように書ける。

$$G(x, \dot{x}, t) = f(x, t)\dot{x} + g(x, t). \quad (3.33)$$

この解 (3.33) を方程式 (3.31) に代入すると以下の結果を得る。

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (3.34)$$

この方程式は、 $x, t$  の関数  $W(x, t)$  を用いて  $f(x, t), g(x, t)$  が

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x} &\equiv f(x, t), \\ \frac{\partial W}{\partial t} &\equiv g(x, t),\end{aligned}\quad (3.35)$$

と表されることを示している。実際、式 (3.35) から

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} = 0,$$

となり関係式 (3.34) すなわち式 (3.30) が恒等的に成り立つことが確認できる。以上の結果は、二つのラグランジアンが与えるオイラー・ラグランジ方程式の形が互いに等しい時、二つのラグランジアンは  $x, t$  の関数  $W(x, t)$  を用いて

$$L' = L + \frac{\partial W}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial W}{\partial t} + \text{const.} = L + \frac{dW}{dt} + \text{const.}, \quad (3.36)$$

と書けることを示している。定数の不訂正をゼロとすれば、これが逆が真であることの証明である。二つのラグランジアンが与えるオイラー・ラグランジ方程式の形が互いに等しいことと、これらのラグランジアンが変換式 (3.25) で結ばれることが互いに必要十分条件であることがわかった。

ラグランジアンに式 (3.36) の不定性が存在することの物理的意味を考察する。変換後のラグランジアンで定義される作用積分は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} I' &= \int_{t_1}^{t_2} dt L' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( L + \frac{dW}{dt} + \text{const.} \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt L + W(x(t_2), t_2) - W(x(t_1), t_1) + \text{const.}(t_2 - t_1), \\ &= I + W(x(t_2), t_2) - W(x(t_1), t_1) + \text{const.}(t_2 - t_1). \end{aligned} \quad (3.37)$$

最小作用の原理では、始点と終点の時刻と座標は固定した上で、作用を最小とする軌跡を求める。つまり  $x(t_1), x(t_2), t_1, t_2$  は定数として扱う。したがって、変換前後の作用積分の差分は、定数であり、最小作用の原理から与えられる粒子の軌跡に全く影響を与えない。作用には、位相変化量という物理的意味が潜在していた。式 (3.37) の結果は、式 (3.36) によるラグランジアンの変換は、位相変化量に定数の下駄を履かせることに対応することが分かる。位相変化がゼロの時、ゼロになるように定義するのが自然ではあるが、その時ゼロにならないような定数の下駄を履かせても結果には影響を与えない。

### 3.3.2 正準変換

正準変数  $(q_i, p_i)$  で記述される自由度  $N$  の力学系を考える。これら正準変数の関数である別の  $2N$  個の正準変数  $(Q_i, P_i)$  への変換を考える。即ち

$$q_i, p_i \rightarrow Q_i(q_i(t), p_i(t), t), P_i(q_i(t), p_i(t), t) \quad (3.38)$$

なる変換により新たな位相空間に変換を行う。この時、新たな正準変数で定義されたハミルトニアン  $K(Q_i, P_i, t)$  が存在し、

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial P_i}, \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

のような正準運動方程式が成り立つ時、変換 (3.38) を正準変換と呼ぶ。

### 3.3.3 変換の母関数

正準変換は、それを生成する母関数を用いて表現することで、その応用範囲が飛躍的に広がる。この節では、変換の母関数についての一般論を解説する。

一般化座標  $q$ 、正準運動量  $p$ 、これらを変数とするハミルトニアン  $H = H(q, p, t)$  で表される一次元粒子系を例として扱う。粒子の運動は、以下の正準運動方程式で記述される。

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p}, \quad (3.40)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q}. \quad (3.41)$$

変数変換

$$q = q(Q, P, t), \quad (3.42)$$

$$p = p(Q, P, t), \quad (3.43)$$

により  $q, p$  が  $Q, P$  に変換されるとする。変換後の新しい変数が正準変数で

あるためには、 $Q, P$  で定義されるハミルトニアン  $K = K(Q, P, t)$  が存在し、以下の方程式が満たされなければならない。

$$\dot{Q} = \frac{\partial K(Q, P, t)}{\partial P}, \quad (3.44)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K(Q, P, t)}{\partial Q}. \quad (3.45)$$

上記した同一の粒子の運動を表す二つのラグランジアン  $L_1, L_2$  それぞれから得られるオイラー・ラグランジ方程式が必ずしも同じ形にならないことと同様に、一般にはハミルトンの運動方程式 (3.40), (3.41) の組みと (3.44), (3.45) の組みは同じ形とは限らない。無限に存在する正準変数間の変換の中で、母関数の時間偏微分の不定性を除いてハミルトニアンが等しくなる変換を正準変換と呼ぶ。以下のこのことについて詳しく解説する。

正準変換について具体的に論ずるためにハミルトンの運動方程式の変分原理からの導出を振り返る。作用積分をハミルトニアンを用いて以下のように定義する。

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{q}p - H(q, p, t)). \quad (3.46)$$

粒子の軌跡に以下のような変分を与える。

$$q \rightarrow q' = q + \eta, \quad (3.47)$$

$$p \rightarrow p' = p + \zeta. \quad (3.48)$$

但し、位相空間上の始点と終点は固定し、

$$\eta(t_1) = 0, \eta(t_2) = 0, \quad (3.49)$$

を満たす。粒子の軌道の変分による作用積分の変分は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \zeta \dot{q} + \dot{\eta} p - \frac{\partial H}{\partial q} \eta - \frac{\partial H}{\partial p} \zeta \right), \\ &= [\eta(t) p(t)]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \zeta \dot{q} - \dot{p} \eta - \frac{\partial H}{\partial q} \eta - \frac{\partial H}{\partial p} \zeta \right), \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \left[ \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right] \zeta - \left[ \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right] \eta \right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

最後の等号では、境界条件 (3.49) を用いた。粒子の軌道は、作用積分を最小にする軌道を選ぶという最小作用の原理から、 $q, p$  が粒子の運動の軌跡を表すのであれば作用積分が最小となる。したがって、粒子の真の軌道からの任意の変分  $\eta, \zeta$  に対してその一次までで  $\delta I = 0$  である。これから以下の二つの方程式を得る。

$$\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} = 0, \quad (3.51)$$

$$\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} = 0. \quad (3.52)$$

二つのラグランジアンが一般化座標  $q, t$  の関数  $W(q, t)$  を用いて変換 (3.25) で結ばれるとき、オイラー・ラグランジ方程式から同じ形の方程式が得られることを既に示した。一方、 $\dot{q}$  と  $q$  と  $t$  の関数であるラグランジアンと

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad (3.53)$$

で定義される正準運動量  $p$  と  $q$  の関数であるハミルトニアンは以下の関係で結ばれることを知っている。

$$H(q, p, t) = \dot{q}p - L(\dot{q}, q, t). \quad (3.54)$$

そこで以下のように定義される  $q, p$  の関数を導入する。

$$\bar{L}(q, p, t) = p\dot{q} - H(q, p, t). \quad (3.55)$$

この関数の右辺は、ラグランジアンの定義と同じであるが、導入された関数は、 $q$  と  $p$  の関数であり、ラグランジアンとは異なる。そこでこの関数をラグランジアンもどきと呼ぶことにする。変数変換 (3.60), (3.61) で結ばれる変数  $Q, P$  を用いて定義されるラグランジアンもどきは以下のように定義される。

$$\bar{L}'(Q, P, t) = P\dot{Q} - K(Q, P, t). \quad (3.56)$$

変換 (3.25) で結ばれる二つのラグランジアンから得られるオイラー・ラグランジ方程式の形が同じになるという教訓からハミルトンの運動方程式 (3.40)

と (3.41) の組みと (3.44) と (3.45) の組みから得られる方程式の形が同じになるためには、二つのラグランジアンもどきが  $q, Q$  の関数  $W(q, Q, t)$  を用いて以下の関係で結ばれていけばよいことが推測される。

$$\bar{L}(q, p, t) = \bar{L}'(Q, P, t) + \frac{dW(q, Q, t)}{dt}. \quad (3.57)$$

$W$  の全微分は以下のように書ける。

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial W}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (3.58)$$

式 (3.57) に式 (3.55), (3.56) を代入すると

$$\dot{q}p - H(q, p, t) = \dot{Q}P - K(Q, P, t) + \frac{\partial W}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial W}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (3.59)$$

となる。変数変換後の変数も正準方程式を満たすためには

$$p = \frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial q}, \quad (3.60)$$

$$P = -\frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial Q}, \quad (3.61)$$

$$H(q, p, t) = K(Q, P, t) - \frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial t}, \quad (3.62)$$

が満たされていけばよいことが分かる。変換式 (3.60) と (3.61) により  $q, p$  から  $Q, P$  の変換が与えられている場合、方程式 (3.60), (3.61) の解として  $W(q, Q, t)$  が求まる。逆に  $W(q, Q, t)$  が与えられている時、変換式 (3.60), (3.61) により  $q, p$  から  $Q, P$  への変換が与えられる。 $W(q, Q, t)$  を変換の母関数 (generator) と呼ぶ。変換前後のハミルトニアンは、母関数の時間偏微分の不定性を除いて等しい。変換後の正準変数もハミルトンの運動方程式を満たす。したがって、変換式 (3.60), (3.61) で与えられる変換は正準変換である。

### 3.3.4 例

正準変換の例として 1 次元調和振動子を扱う。質量 1 で角振動数 1 の一次元調和振動子のハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2). \quad (3.63)$$

これに以下の母関数で定義される正準変換を施す。

$$W(q, Q) = \frac{1}{2}q^2 \cot Q. \quad (3.64)$$

この母関数で表現される変数変換は以下のようになる。

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = q \cot Q, \quad (3.65)$$

$$P = -\frac{\partial W}{\partial Q} = \frac{1}{2}q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}, \quad (3.66)$$

$$H(q, p) = K(Q, P). \quad (3.67)$$

初めの二つの式を整理すると以下の関係式をえる。

$$q = \sqrt{2P} \sin Q, \quad (3.68)$$

$$p = \sqrt{2P} \cos Q. \quad (3.69)$$

新しい変数を用いてハミルトニアン (3.63) は以下のようにかける。

$$H = P = K. \quad (3.70)$$

ハミルトニアンが  $Q$  を含まないので  $Q$  は循環座標であり共役な運動量  $P$  が保存することがわかる。実際ハミルトンの運動方程式は、

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 1, \quad (3.71)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0, \quad (3.72)$$

となり確かに  $P$  が保存する。この例では  $P$  は系のハミルトニアンに等しく、これはエネルギー保存則を表している。方程式 (3.71) を解くと

$$Q = t + C, \quad (3.73)$$

となる。この問題は、質量 1・バネ定数 1 としているので固有振動数が  $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m} = 1$  であるので、 $t$  の係数が 1 となっている。一般の調和振動子の場合は  $Q = \omega_0 t + C$  となる。したがって、 $Q$  は本質的に時間である。ハミルトニアンが  $Q$  に依存しないと、ハミルトニアンが時間に陽に依存しない即

ち時間推進変換に対して系が対象であるということであり、エネルギーが保存するのはネーターの定理からの当然期待される結果である。図 3.1 に

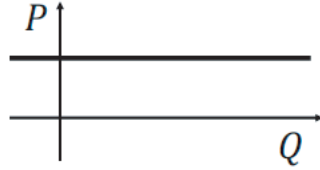


図 3.1 正準変数  $P, Q$  で張られる位相空間中の調和振動子の軌跡。

正準変数  $(Q, P)$  で張られる位相空間中での調和振動子の軌跡を太い実線で示した。

### 3.3.5 母関数の拡張

正準変換の母関数は、変換前後の一般化座標  $q, Q$  のみの関数である必要はない。たとえば、以下のルジャンドル変換で  $W(q, Q)$  と結ばれる新しい関数  $W'(q, P)$  を考える。

$$W'(q, P) = W(q, Q) + PQ. \quad (3.74)$$

正準変換の関係式 (3.60), (3.61) を用いると

$$\begin{aligned} dW' &= dW + PdQ + QdP = \frac{\partial W}{\partial q} dq + \frac{\partial W}{\partial Q} dQ + PdQ + QdP, \\ &= \frac{\partial W}{\partial q} dq + QdP, \end{aligned} \quad (3.75)$$

となり  $W'$  が  $q, P$  の関数であることがわかる。変数変換の式 (3.74) をこの変換に伴うラグランジアンもどきの変換式 (3.57) に代入すると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} p\dot{q} - H(q, p) &= P\dot{Q} - K(Q, P) - \dot{P}Q - P\dot{Q} + \frac{\partial W'}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial W'}{\partial P} \dot{P}, \\ &= -K(Q, P) - \dot{P}Q + \frac{\partial W'}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial W'}{\partial P} \dot{P}. \end{aligned} \quad (3.76)$$



したがって、 $W'$  が以下の関係式を満たせば、正準変換である。

$$p = \frac{\partial W'(q, P)}{\partial q}, \quad (3.77)$$

$$Q = \frac{\partial W'(q, P)}{\partial P}. \quad (3.78)$$

ここで  $H(q, p) = K(Q, P)$  は変わらず成立する。このように  $q, P$  の関数  $W'$  も正準変換の母関数として選ぶことができる。

上の議論では、母関数  $W'$  が陽に時間に依存しないとしたが、陽に時間に依存している場合は、式 (3.76) の右辺に

$$\frac{\partial W'}{\partial t}$$

がつけ加わる。したがって、変換の前後のハミルトニアンは以下の関係式で結ばれる。

$$H(q, p) = K(Q, P) - \frac{\partial W'(q, P, t)}{\partial t}. \quad (3.79)$$

### 3.3.6 恒等変換

恒等変換

$$q = Q, \quad (3.80)$$

$$p = P, \quad (3.81)$$

を与える母関数を探す。これを以下のように書き換える。

$$Q = q, \quad (3.82)$$

$$p = P. \quad (3.83)$$

これから

$$W'(q, P) = Pq, \quad (3.84)$$

とすれば変数変換 (3.77), (3.78) に代入すると以下のようになり

$$p = \frac{\partial W'}{\partial q} = P, \quad (3.85)$$

$$Q = \frac{\partial W'}{\partial P} = q, \quad (3.86)$$

確かに恒等変換が導かれる。

### 3.3.7 無限小変換

変換後の変数と変換前の変数の差が無限小となる無限小変換を考える。関数  $G(q, P)$  を用いて、恒等変換からのズレの大きさが小さいことを表現する微小量  $\varepsilon$  を導入して以下の無限小変換の母関数を定義する。

$$W'(q, P) = Pq + \varepsilon G(q, P). \quad (3.87)$$

これから微小量の一次までで以下の変数変換の関係式をえる。

$$p = P + \varepsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial q} \sim P + \varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial q}, \quad (3.88)$$

$$Q = q + \varepsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial P} \sim q + \varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial p}. \quad (3.89)$$

関数  $G$  の変数を  $P$  から  $p$  に入れ替えたのは、これらの差はこの変換の関係式に微小量の2次以上の高次の差のみに現れるので、1次までの近似でその差を無視したためである。変換の関係式 (3.88) と (3.89) から変換前後の変数の変化量を  $G$  で表す以下の関係式が得られる。

$$\delta^L q(t) \equiv Q(t) - q(t) = \varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial p}, \quad (3.90)$$

$$\delta^L p(t) \equiv P(t) - p(t) = -\varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial q}. \quad (3.91)$$

このような性質から  $G(q, p)$  を無限小変換の母関数と呼ぶ。ここで  $\delta^L$  は節 2.3 で導入されたリー微分であり、変換前後の質点の物理量をそれぞれの座標系の時計が指す時刻が同一の  $t$  の時で差分を取った量である。次節で定義されるポアソン括弧式を用いると以下の形にまとめられる。

$$\delta^L q(t) = \varepsilon [q, G(q, p)]_c, \quad (3.92)$$

$$\delta^L p(t) = \varepsilon [p, G(q, p)]_c. \quad (3.93)$$

### 3.4 ポアッソン括弧式

ポアッソン括弧式を以下のように定義する。任意の  $q, p$  の関数である  $A(q, p), B(q, p)$  に対してポアッソン括弧式は以下のように定義される。

$$[A, B]_c \equiv \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q}. \quad (3.94)$$

ここで量子論で用いられる交換関係式と区別するため添字の  $c$  をつけた。古典的 *classical* という意味が込められている。一般の自由度  $n$  の系のポアッソン括弧式は以下のように定義される。

$$[A, B]_c \equiv \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right). \quad (3.95)$$

例えば  $A = q_1 = x, B = p_1 = p_x$  の時、

$$[q_1, p_1]_c = \sum_{i=1}^n \delta_{i1} \delta_{i1} = 1, \quad (3.96)$$

となる。

### 3.5 ネーターの定理

ある変換に対してハミルトニアンが不変の時、その変換を表す母関数に対応する物理量が保存する。これがネーターの定理である。以下  $q, p$  が粒子の軌道を表すとす。するとこれらはハミルトンの運動方程式 (3.40), (3.41) を満たす。ある物理量  $F = F(q, p)$  の粒子の軌道に沿った時間全微分を考える。すると

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial t} = [F, H]_c + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (3.97)$$

となりポアッソン括弧式を使って書ける。この関係式は、物理量  $F$  が時間に陽に依存せず、その時間依存性が粒子の一般化座標とそれに共役な運動量を通してのみ現れると即ち  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$  のとき、 $F$  を  $H$  のポアッソン括弧式が0の時、物理量  $F$  が保存することを示している。

例として中心力場ポテンシャル  $U(r)$  中を運動する質量  $m$  の質点の角運動量保存を扱う。ここで  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  は、中心から質点までの距離である。質点の運動量を  $p_x, p_y, p_z$  とするとハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(r). \quad (3.98)$$

中心を通る軸の周りの角運動量は

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (3.99)$$

で与えられる。したがって、角運動量の  $z$  成分は

$$L_z = xp_y - yp_x, \quad (3.100)$$

であり、時間を陽に含まない。角運動量の  $z$  成分とハミルトニアンのポアソン括弧式を計算すると

$$\begin{aligned} [L_z, H]_c &= \frac{\partial L_z}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial L_z}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial L_z}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial L_z}{\partial p_y} \frac{\partial H}{\partial y} \\ &\quad + \frac{\partial L_z}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial p_z} - \frac{\partial L_z}{\partial p_z} \frac{\partial H}{\partial z} \\ &= p_y \frac{p_x}{m} - (-y) \frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} + (-p_x) \frac{p_y}{m} - x \frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} \\ &= \frac{dU}{dr} \left( \frac{yx}{r} - \frac{xy}{r} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.101)$$

となり 0 となる。この結果は中心力場中では、質点の角運動量の  $z$  成分が保存することを示している。同様の計算を行うと  $L_x, L_y$  が保存することも証明できる。中心力場中の質点では、中心を通る任意の軸の周りの回転運動に伴う角運動量が保存することを示している。

次無限小座標変換 (3.87) によるハミルトニアンの変分を求める。これに伴う正準変数の変換を以下のように表す。

$$Q(t) = q(t) + \delta^L q(t), \quad (3.102)$$

$$P(t) = p(t) + \delta^L p(t). \quad (3.103)$$

ハミルトニアンの変分は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}\delta H &\equiv H(Q, P) - H(q, p) = \frac{\partial H}{\partial q} \delta^L q + \frac{\partial H}{\partial p} \delta^L p, \\ &= \varepsilon \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} = -\varepsilon [G, H]_c.\end{aligned}\quad (3.104)$$

ここで (3.90), (3.91) を用いた。これら (3.97) と (3.104) を用いると変換の母関数の粒子の軌道に沿った時間全微分とハミルトニアンとのポアソン括弧式の間以下の関係式が得られる。

$$\frac{dG}{dt} = [G, H]_c.\quad (3.105)$$

ここで  $G$  は時間を陽に依存しないとした。この方程式は、母関数  $G$  で表される変換に対してハミルトニアンが不変すなわち  $\delta H = 0$  の時、 $G$  に対応する物理量が粒子の運動に伴って保存することを示している。これがネーターの定理の正準変換の母関数を用いた表現である。

三つの具体例を取り上げる。時間推進変換を考える。

$$t' = t + \varepsilon,\quad (3.106)$$

この変換で粒子の位相空間中の座標が以下のように変換される。

$$Q(t + \varepsilon) = q(t),\quad (3.107)$$

$$P(t + \varepsilon) = p(t).\quad (3.108)$$

したがって、変数変換前後での座標の同時刻での変化量すなわちリー微分は以下ようになる。

$$\delta^L q(t) = Q(t) - q(t) = q(t - \varepsilon) - q(t) = -\dot{q}\varepsilon = -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial p},\quad (3.109)$$

$$\delta^L p(t) = P(t) - p(t) = p(t - \varepsilon) - p(t) = -\dot{p}\varepsilon = \varepsilon \frac{\partial H}{\partial q}.\quad (3.110)$$

ここでハミルトンの運動方程式を用いた。したがって、無限小時間推進変換の母関数はハミルトニアンであり

$$G = -H,\quad (3.111)$$

である。したがって、ネーターの定理からハミルトニアンが時間推進に対

して不変であるときエネルギーが保存する。

空間推進変換を考える。

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\epsilon}, \quad (3.112)$$

$$\vec{p}' = \vec{p}. \quad (3.113)$$

この変換による粒子の位相空間中の座標の変化量は以下のようなになる。

$$\delta^L \vec{q}(t) = \vec{Q}(t) - \vec{q}(t) = \vec{\epsilon}, \quad (3.114)$$

$$\delta^L \vec{p}(t) = 0. \quad (3.115)$$

この変換を与える母関数は以下のものである。

$$G = \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{p}}{\epsilon}. \quad (3.116)$$

ここで  $\epsilon$  は  $\vec{\epsilon}$  の絶対値である。したがって、ハミルトニアンが空間推進に対して不変であるとき保存する量は運動量である。

次に3次元空間での単位ベクトル  $\vec{e}$  を軸とした回転角  $\epsilon$  の無限小回転を考える。

$$\vec{x}' = \vec{x} + \epsilon \vec{x} \times \vec{e}. \quad (3.117)$$

この変換により一般化座標と正準運動量は以下のように変換される。

$$\vec{Q}(t) = \vec{q}(t) + \epsilon \vec{q}(t) \times \vec{e}, \quad (3.118)$$

$$\vec{P}(t) = \vec{p}(t) + \epsilon \vec{p} \times \vec{e}. \quad (3.119)$$

したがって、関係式 (3.92)、(3.93) より変換前後の位相空間中の粒子の座標即ち正準変数の変化量は以下のようなになる。

$$\delta^L \vec{q}(t) = \epsilon \vec{q}(t) \times \vec{e}, \quad (3.120)$$

$$\delta^L \vec{p}(t) = \epsilon \vec{p}(t) \times \vec{e}. \quad (3.121)$$

これから無限小空間回転の母関数が以下のように与えられることが分かる。

$$G = (\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{e} = \epsilon^{ijk} e_i p_j q_k. \quad (3.122)$$

これを確かめてみよう。

$$\frac{\partial G}{\partial p_\ell} = \epsilon^{ijk} e_i \delta_{j\ell} q_k = \epsilon^{i\ell k} e_i q_k = \epsilon^{\ell ki} q_k e_i = (\vec{q} \times \vec{e})_\ell, \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial G}{\partial q_\ell} = \varepsilon^{ijk} e_i p_j \delta_{\ell k} = \varepsilon^{ij\ell} e_i p_j = -\varepsilon^{\ell ji} p_j e_i = -(\vec{p} \times \vec{e})_\ell. \quad (3.124)$$

母関数と変数の変分の関係式にこれらを代入すると確かに (3.120), (3.121) が再現される。したがって、無限小回転に対してハミルトニアンが不変である時、保存量は回転軸の周りの角運動量である。ここで  $\varepsilon^{ijk}$  は完全反対称テンソルであり、 $\varepsilon^{123} = 1$  であり隣り合う添字の入れ替えに対して反対称性を持つ3階のテンソルである。即ち  $\varepsilon^{213} = \varepsilon^{132} = -1$  が成り立つ。反対称性から添字のいずれか二つが等しい成分は0である。

### 3.6 非慣性系の正準形式

節 1.7.2 で取り上げた回転系を例に非慣性系の正準形式を紹介する。回転系の自由粒子の Lagrangian は式 (1.132) で与えられた。一般化運動量は以下のように定義される。

$$P'_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = m(\dot{x}' - y' \Omega), \quad (3.125)$$

$$P'_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}'} = m(\dot{y}' + x' \Omega), \quad (3.126)$$

$$P'_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}'} = m\dot{z}', \quad (3.127)$$

回転軸に垂直な面内の正準運動量が単純に  $m\dot{x}'$  で与えられないことが分かる。Poisson 括弧式は、この正準運動量による微分として

$$\begin{aligned} [A, B]_c &= \frac{\partial A}{\partial x'} \frac{\partial B}{\partial P'_x} - \frac{\partial A}{\partial P'_x} \frac{\partial B}{\partial x'} \\ &\quad + \frac{\partial A}{\partial y'} \frac{\partial B}{\partial P'_y} - \frac{\partial A}{\partial P'_y} \frac{\partial B}{\partial y'} \\ &\quad + \frac{\partial A}{\partial z'} \frac{\partial B}{\partial P'_z} - \frac{\partial A}{\partial P'_z} \frac{\partial B}{\partial z'}, \end{aligned} \quad (3.128)$$

のように定義される。

例として、節 1.7.2 で扱った回転系のハミルトニアンを求める。ハミルトニアンは以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
H &= P'_x v'_x + P'_y v'_y + P'_z v'_z - L \\
&= \frac{1}{m} (P'_x (P'_x + m y' \Omega) + P'_y (P'_y - m x' \Omega) + P'_z P'_z) - \frac{1}{2m} (P_x'^2 + P_y'^2 + P_z'^2) + U \\
&= \frac{1}{2m} (P_x'^2 + P_y'^2 + P_z'^2) + y' P'_x \Omega - x' P'_y \Omega + U. \tag{3.129}
\end{aligned}$$

ハミルトニアンをこの形に整理したものは、正準方程式に代入して運動方程式を求めるには便利な形であるが、回転系で測定した粒子のエネルギーとの対応が分かりにくい。ハミルトニアンが粒子のエネルギーであることを考慮して、回転系で測定した粒子のエネルギー (1.140) の速度を式 (3.125), (3.126), (3.127) を用いて正準運動量で置き換えてみると以下のようにになる。

$$E' = \frac{1}{2m} ((P'_x + m y' \Omega)^2 + (P'_y - m x' \Omega)^2 + P_z'^2) - \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2) \Omega^2 + U. \tag{3.130}$$

この式の右辺がハミルトニアン (3.129) と一致していることは、簡単に確認できる。確かにハミルトニアンが回転系での力学的エネルギー (1.140) に対応していることが確認できた。ハミルトンの正準運動方程式にハミルトニアン (3.129) を代入すると以下の運動方程式を得る。

$$\dot{x}' = \frac{\partial H}{\partial P_x'} = \frac{P_x'}{m} + y' \Omega, \tag{3.131}$$

$$\dot{y}' = \frac{\partial H}{\partial P_y'} = \frac{P_y'}{m} - x' \Omega, \tag{3.132}$$

$$\dot{z}' = \frac{\partial H}{\partial P_z'} = \frac{P_z'}{m}, \tag{3.133}$$

$$\dot{P}'_x = -\frac{\partial H}{\partial x'} = P'_y \Omega - \frac{\partial U}{\partial x'}, \tag{3.134}$$

$$\dot{P}'_y = -\frac{\partial H}{\partial y'} = -P'_x \Omega - \frac{\partial U}{\partial y'}, \tag{3.135}$$

$$\dot{P}'_z = -\frac{\partial H}{\partial z'} = -\frac{\partial U}{\partial z'}. \tag{3.136}$$

方程式 (3.131) と (3.132) を用いて、方程式 (3.134) の  $P'_x$  を  $x'$  の時間微分で  $P'_y$  を  $y'$  で書き換えると以下の方程式に帰着される。



$$\begin{aligned}
m\ddot{x}' - m\dot{y}'\Omega &= m\dot{y}'\Omega + m\dot{x}'\Omega^2 - \frac{\partial U}{\partial x'}, \\
m\dot{x}' &= 2m\dot{y}'\Omega + m\dot{x}'\Omega^2 - \frac{\partial U}{\partial x'}.
\end{aligned} \tag{3.137}$$

同様の計算により運動方程式の他の成分が以下のように求まる。

$$m\dot{y}' = -2m\dot{x}'\Omega + m\dot{y}'\Omega^2 - \frac{\partial U}{\partial y'}, \tag{3.138}$$

$$m\dot{z}' = -\frac{\partial U}{\partial z'}. \tag{3.139}$$

これらは節 1.7.2 で求めた、回転系の粒子の運動方程式 (1.136) と確かに一致している。

### 3.7 Liouville の定理

正準運動方程式にしたがって 1 次元運動する多数の粒子からなる粒子系を考える。この系の Hamiltonian を  $H$  とする。粒子  $\alpha$  が従う運動方程式は以下ようになる。

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \tag{3.140}$$

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}. \tag{3.141}$$

位相空間  $q_\alpha - p_\alpha$  を考える。

$$\mathbf{v}_\alpha = (\dot{q}_\alpha, \dot{p}_\alpha, 0), \tag{3.142}$$

$$\mathbf{A}_\alpha = (0, 0, H), \tag{3.143}$$

で定義される位相空間中の速度ベクトル  $\mathbf{v}_\alpha$  と速度ポテンシャル  $\mathbf{A}_\alpha$  を導入する。これらを用いると運動方程式 (3.140)、(3.141) は以下のようにまとめられる。

$$\mathbf{v}_\alpha = \nabla_\alpha \times \mathbf{A}_\alpha, \tag{3.144}$$

ここで

$$\nabla_{\alpha} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}}, 0 \right), \quad (3.145)$$

は位相空間における粒子  $\alpha$  に対する勾配ベクトルである。したがって、位相空間中の速度の発散は

$$\nabla_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} = 0, \quad (3.146)$$

となりゼロである。このような粒子を十分多数含む位相空間中の微小領域  $q \sim q + \Delta q, p \sim p + \Delta p$  を考える。構成粒子が式 (3.146) を満たすので、

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.147)$$

を満たす。式 (3.147) は、正準運動方程式の元で運動する粒子系は非圧縮性流体であることを示している。一般に速度場の発散がゼロであることが流体が非圧縮性流体であることの解説を付録 E に与えた。即ち粒子の運動に伴い位相空間内で粒子系が占める位相体積が保存する。微小体積要素で表すと

$$\Delta q \Delta p = \text{constant}, \quad (3.148)$$

のように表現される。Hamilton の運動方程式にしたがって運動する粒子の集合体が位相空間中に占める位相体積が保存するという定理を Liouville の定理と呼ぶ。

Liouville の定理は、粒子系の位相空間内の状態の進化の追跡に欠かせない Boltzmann 方程式の導出の重要な役割を果たす。付録 (D) に入門的な内容を紹介した。

## 3.8 ビリアル定理

### 3.8.1 自己重力平衡系

お互いの重力により相互作用する質量  $m_{\alpha}$  を持つ  $N$  個の粒子系が力学的平行状態にある場合を考察する。粒子  $\alpha$  の位置ベクトルを  $\mathbf{r}_{\alpha}$  とすると粒子  $\alpha$  の重力エネルギー  $U_{\alpha}$  は以下のように書ける。

$$U_\alpha = - \sum_{\beta=1(\neq\alpha)}^N \frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}. \quad (3.149)$$

これを全ての粒子について足しあげることで粒子系の自己重力エネルギー  $U$  が以下のように計算される。

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1(\neq\alpha)}^N \frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}. \quad (3.150)$$

右辺に現れる  $1/2$  は、右辺の和でダブルカウントされている分を補正するためにつけた因子である。右辺の重力エネルギーの和は、自分自身以外の全ての粒子の寄与について行う。粒子  $\alpha$  の運動方程式は以下ようになる。

$$\frac{d}{dt} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = -\nabla_\alpha U. \quad (3.151)$$

ここで  $\mathbf{v}_\alpha$  は、粒子  $\alpha$  の速度、 $\nabla_\alpha$  は  $(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial z_\alpha})$  を成分とする  $\mathbf{r}_\alpha$  による勾配ベクトルである。

粒子系の運動エネルギーを  $K$  とすると

$$\begin{aligned} 2K &= \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha v_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^N (m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) \cdot \mathbf{v}_\alpha = \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^N (m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) \cdot \mathbf{r}_\alpha \right) - \sum_{\alpha=1}^N \frac{dm_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{dt} \cdot \mathbf{r}_\alpha \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^N (m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) \cdot \mathbf{r}_\alpha \right) + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}_\alpha \cdot \nabla_\alpha U \end{aligned} \quad (3.152)$$

となる。この粒子系が力学的平衡状態にあるとしてこの式の長時間  $T$  にわたる平均をとる。右辺第一項の長時間平均が無視できることを示す。

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^N (m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) \cdot \mathbf{r}_\alpha \right) = \frac{1}{T} \left[ \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{v}_\alpha(T) \cdot \mathbf{r}_\alpha(T) - \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{v}_\alpha(0) \cdot \mathbf{r}_\alpha(0) \right] \rightarrow 0. \quad (3.153)$$

粒子系は力学的平衡状態にあるということは、系内の粒子は広がりも縮みもしない一定の空間領域内を運動していることになる。このような運動している系の  $\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \mathbf{v}_\alpha(t) \cdot \mathbf{r}_\alpha(t)$  は、時間により大きく変化しない。したがって、右辺の  $[\ ]$  内の量は、ある一定の範囲内の値をとるので、長時間平均はゼロに近づく。これを用いて関係式 (3.152) の長時間平均をとると以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned}
2\bar{K} &= \sum_{\alpha=1}^N \overline{\mathbf{r}_\alpha \cdot \nabla_\alpha U} \\
&= - \sum_{\alpha=1}^N \overline{\mathbf{r}_\alpha \cdot \nabla_\alpha \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^N \sum_{\beta=1(\neq\gamma)}^N \frac{Gm_\gamma m_\beta}{|\mathbf{r}_\gamma - \mathbf{r}_\beta|}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \overline{\mathbf{r}_\alpha \cdot \sum_{\gamma=1}^N \sum_{\beta=1(\neq\gamma)}^N Gm_\gamma m_\beta \left( \frac{\mathbf{r}_\gamma - \mathbf{r}_\beta}{|\mathbf{r}_\gamma - \mathbf{r}_\beta|^3} \delta_{\gamma\alpha} - \frac{\mathbf{r}_\gamma - \mathbf{r}_\beta}{|\mathbf{r}_\gamma - \mathbf{r}_\beta|^3} \delta_{\beta\alpha} \right)} \\
&= \frac{G}{2} \sum_{\gamma=1}^N \sum_{\beta=1(\neq\gamma)}^N \overline{Gm_\gamma m_\beta \frac{\mathbf{r}_\gamma \cdot (\mathbf{r}_\gamma - \mathbf{r}_\beta) - \mathbf{r}_\beta \cdot (\mathbf{r}_\gamma - \mathbf{r}_\beta)}{|\mathbf{r}_\gamma - \mathbf{r}_\beta|^3}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1(\neq\alpha)}^N \overline{\frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}} \\
&= -\bar{U}.
\end{aligned} \tag{3.154}$$

ここで  $\delta_{\alpha\beta}$  は、クロネッカーのデルタと呼ばれる関数で

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \tag{3.155}$$

で定義される。式 (3.154) の計算では、

$$\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{3.156}$$

などを用いた。

式 (3.154) の関係式が、自己重力平衡系のビリアル定理である。互いの重力で相互作用する粒子系が、力学的平衡状態にある時、系の自己重力エネルギーの長時間平均が、系全体の平均運動エネルギーの-2倍に等しいという関係式である。ビリアル平衡にある自己重力系の例として、図 3.2 に球状星団 M13 の写真を載せた。球状星団は、約 100 万個の恒星で構成される星団である。星々が互いの重力で引き合って束縛されている。重力により潰れず一定の形を保っていられるのは、星々が有限の運動エネルギーを持っているからである。球状星団中の星々の運動方向はランダムであるが、簡単のためそれぞれが星団の中心を軌道中心とする円運動をしているとする。星の分布がほぼ球状なので、質量分布が球対称であると近似する。ある星の軌道半径を  $R$  とするとこの星に働く重力は、 $R$  より内側に存在する星の



図 3.2 球状星団 M13。

総質量  $M(< R)$  からの寄与のみとなる。星の質量  $m$ 、速度  $v$  とすると遠心力と重力の釣り合いから次の式をえる。

$$\frac{mv^2}{R} = -\frac{GmM(< R)}{R^2}$$

これから

$$2\frac{mv^2}{2} = \frac{GmM(< R)}{R}, \quad (3.157)$$

が得られる。右辺が重力ポテンシャルエネルギーにマイナス1をかけたものであり、ビリアル定理 (3.154) と同じ関係が構成要素の星一つに対して成り立っていることが分かる。

### 3.8.2 調和振動子

図 1.12 で紹介した単振り子の振動の振幅が、小さい極限即ち  $\theta \ll 1$  の場合を扱う。式 (1.115)、(1.116) から振動の速度は、

$$\dot{x} = l\dot{\theta} \cos \theta, \quad (3.158)$$

$$\dot{y} = -l\dot{\theta} \sin \theta, \quad (3.159)$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = l\dot{\theta}, \quad (3.160)$$

のように角速度によって表される。加速度は以下のように表される。

$$\ddot{x} = \ell \ddot{\theta} \cos \theta - \ell \dot{\theta}^2 \sin \theta, \quad (3.161)$$

$$\ddot{y} = -\ell \ddot{\theta} \sin \theta - \ell \dot{\theta}^2 \cos \theta. \quad (3.162)$$

紐の張力を  $T$  とすると質点の運動方程式は以下ようになる。

$$m\ell \ddot{\theta} \cos \theta - m\ell \dot{\theta}^2 \sin \theta = -T \sin \theta, \quad (3.163)$$

$$-m\ell \ddot{\theta} \sin \theta - m\ell \dot{\theta}^2 \cos \theta = -T \cos \theta + mg, \quad (3.164)$$

式 (3.163) の両辺に  $\sin \theta$  を掛け、式 (3.164) の両辺に  $\cos \theta$  を掛けて足すと張力を遠心力と重力で与える次の関係式を得る。

$$m\ell \dot{\theta}^2 = T - mg \cos \theta. \quad (3.165)$$

式 (3.163) の両辺に  $\cos \theta$  を掛け、式 (3.164) の両辺に  $\sin \theta$  を掛けて引くと回転角に対する運動方程式を得る。

$$m\ell \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \sim -mg \theta = -m\omega^2 \ell \theta. \quad (3.166)$$

最後の变形で、微小振動であることを用いた。ここで  $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$  は、振り子の固有角振動数である。初期条件  $\theta = \theta_0$ ,  $\dot{\theta} = 0$  を満たすこの方程式の解が

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t, \quad (3.167)$$

と求まる。運動方程式 (3.166) は、固有振動数  $\omega$  の調和振動子の運動方程式である。

運動方程式 (3.166) の両辺に  $\ell \dot{\theta}$  を掛けてエネルギー積分を行うと以下のようなになる。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m g \ell \theta^2 \right) = 0. \quad (3.168)$$

これは力学的エネルギー

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m g \ell \theta^2 = \frac{1}{2} m g \ell \theta_0^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \ell^2 \theta_0^2, \quad (3.169)$$

が保存することを示している。振動の周期  $2\pi/\omega$  より十分長い時間  $T$  での運動エネルギーの長時間平均を求めると

$$\bar{K} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{2} m \ell^2 \theta_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{T} \frac{1}{2} m \ell^2 \theta_0^2 \omega^2 \frac{1}{2} \left( T - \frac{1}{2\omega} (\cos 2\omega T - 1) \right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}mgl\theta_0^2, \quad (3.170)$$

となる。ここで  $\rightarrow$  は  $\frac{1}{T\omega} \rightarrow 0$  の極限を表している。同様に位置エネルギー  $U$  の長時間平均は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2}mgl\theta_0^2 \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \frac{1}{2}mgl\theta_0^2 \frac{1}{2} \left( T + \frac{1}{2\omega} (\cos 2\omega T - 1) \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{4}mgl\theta_0^2, \end{aligned} \quad (3.171)$$

この結果から調和振動子の運動エネルギーと位置エネルギーの長時間平均には以下の関係式が成り立つことが分かる。

$$\bar{K} = \bar{U}. \quad (3.172)$$

関係式 (3.172) が調和振動子系のビリアル定理である。

### 3.8.3 一般の保存力場

粒子間に働く力が粒子の位置座標  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) のみに依存する保存力場でその位置エネルギーが  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の同時関数で与えられる場合のビリアル定理を証明する。保存力場の位置エネルギーを  $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$  とする。位置エネルギーが座標の  $k$  次の同時関数である場合を扱う。同時関数であるとは、

$$U \propto x_1^{k-5} x_2^2 x_3^1 x_4^2 + x_{1, \dots, n}^k,$$

のように位置エネルギーに現れる各項の座標の冪乗が全て同じ  $k$  次であるということである。ここで  $k > 5$  とした。  $k$  が負の場合は

$$U \propto (x_1^{|k|-5} x_2^2 x_3^1 x_4^2 + x_{1, \dots, n}^{|k|})^{-1}$$

のように座標に依存する項が分母に現れ、分母に現れる各項の座標の冪乗が全て同じ  $|k|$  次であると考えれば良い。例えば、位置エネルギーが粒子間の相対間隔  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  ( $j \neq i$ ) にのみ依存し、その依存性が  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^k$  ( $j \neq i$ ) と書ける場合が該当する。重力場の場合は、 $k = -1$  に対応し、隣同士の質点がバネで結ばれた調和振動子系は  $k = 2$  且つ  $j = i + 1$  に対応する。

座標を  $\beta^{-1}$  倍スケールする変換を施す。即ち

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \beta \mathbf{r}_i, \quad (3.173)$$

のような変換を行う。すると位置エネルギーが  $k$  次の同次関数であることから位置エネルギーは以下のように変換される。

$$U(\beta \mathbf{r}_1, \beta \mathbf{r}_\alpha, \beta \mathbf{r}_n) = \beta^k U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_n). \quad (3.174)$$

系が力学的平衡状態にあるとき、式 (3.154) の一つ目の等号が成り立つ。したがって、

$$2\bar{K} = \sum_{\alpha=1}^N \overline{\mathbf{r}_\alpha \cdot \nabla_\alpha U(\mathbf{r}_\alpha)}. \quad (3.175)$$

式 (3.174) を  $\beta$  で微分すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} k\beta^{k-1} U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_n) &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial U(\beta \mathbf{r}_1, \beta \mathbf{r}_\alpha, \beta \mathbf{r}_n)}{\partial \beta \mathbf{r}_\alpha} \cdot \frac{\partial \beta \mathbf{r}_\alpha}{\partial \beta} \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial U(\beta \mathbf{r}_1, \beta \mathbf{r}_\alpha, \beta \mathbf{r}_n)}{\partial \beta \mathbf{r}_\alpha} \cdot \mathbf{r}_\alpha. \end{aligned} \quad (3.176)$$

を得る。この式で  $\beta = 1$  と置くと以下の関係式を得る。

$$kU(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_n) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_n)}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \cdot \mathbf{r}_\alpha. \quad (3.177)$$

この式を用いて、式 (3.175) の右辺を置き換えると以下の関係式を得る。

$$2\bar{K} = \overline{kU(\mathbf{r}_\alpha)}. \quad (3.178)$$

これが求めるビリアル定理である。重力場の時は、 $k = -1$  であることを代入すると式 (3.154) が確かに得られる。調和振動子の時は、 $k = 2$  であることを代入すると式 (3.172) が確かに得られる。

### 3.9 電磁場中の荷電粒子の運動を記述する正準形式

非相対論的運動をする電磁場中の電荷  $q$ 、質量  $m$  の質点の運動を記述する正準形式を紹介する。電場  $\mathbf{E}$ 、磁束密度  $\mathbf{B}$  が存在すると質点には以下の力が働く。



$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = q\mathbf{E}(\mathbf{x}(t), t) + q\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t). \quad (3.179)$$

ここで  $\mathbf{x}(t)$  は、時刻  $t$  の時の質点の位置ベクトル、 $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$  は質点の速度である。静止する荷電粒子に働く力で電場が定義される。一方、荷電粒子が運動するとき初めて現れる力を与えるものとして磁束密度が定義される。4つの Maxwell 方程式の内、以下の二つは、電荷分布や電流分布に影響されず常に成り立つ。

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.180)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0. \quad (3.181)$$

これらの Maxwell 方程式は、internal equations と呼ばれる。方程式 (3.180) から磁束密度は、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を用いて以下のように表される。

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (3.182)$$

この式を方程式 (3.181) に代入すると以下のように整理できる。

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.183)$$

この式から電場が以下のように書ける事が分かる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\nabla \phi, \\ \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.184)$$

ここで  $\phi$  は、スカラーポテンシャルである。

電磁場中の荷電粒子の運動方程式は以下のようなになる。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}(\mathbf{x}(t), t) + q\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t). \quad (3.185)$$

運動方程式の  $x$  成分は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -q\partial_x \phi - q\partial_t A_x + q(v_y(\partial_x A_y - \partial_y A_x) - v_z(\partial_z A_x - \partial_x A_z)) \\ &= -q\partial_x \phi - q(\partial_t A_x + \mathbf{v} \cdot \nabla A_x) + q\partial_x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \end{aligned}$$

$$= -q \frac{dA_x}{dt} - q \partial_x \phi + q \partial_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (3.186)$$

$y, z$  成分の同様の形で書ける。ここで

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.187)$$

のように偏微分を簡略化して各記号を用いた。電磁場中の電子のラグランジアンを以下のように定義すれば、オイラー・ラグランジ方程式から上記の運動方程式が導かれる。

$$L = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - q\phi \quad (3.188)$$

実際、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v_x} &= mv_x + qA_x, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= q\partial_x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - q\partial_x\phi, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_x} - \frac{\partial L}{\partial x} &= m \frac{dv_x}{dt} + q \frac{dA_x}{dt} - q\partial_x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + q\partial_x\phi = 0, \end{aligned} \quad (3.189)$$

となり方程式 (3.186) が再現できる。

$x$  と正準共役運動量  $P_x$  は以下のように定義される。

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_x + qA_x = p_x + qA_x \quad (3.190)$$

$y, z$  成分も同様に定義される。ハミルトニアンが以下のように求まる。

$$H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 + q\phi \quad (3.191)$$

ハミルトンの運動方程式にこのハミルトニアンを代入すれば方程式 (3.186) が導かれることを示すことができる。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = \frac{1}{m} (P_x - qA_x) = v_x, \quad (3.192)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_x &= \frac{d}{dt} (mv_x + qA_x) = -\partial_x H = \frac{q}{m} (\mathbf{P} - q\mathbf{A}) \cdot \partial_x \mathbf{A} - q\partial_x \phi \\ &= q\mathbf{v} \cdot \partial_x \mathbf{A} - q\partial_x \phi. \end{aligned} \quad (3.193)$$

## 第 4 章

# Hamilton-Jacobi 理論

### 4.1 アイコナル方程式

節 (1.3.1) で単色の光の位相を表す、アイコナル関数  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$  を導入した。光はベクトル波であるが、ベクトル波であることはここでの議論の本質に無関係なのでスカラー波として扱うと光の波が以下のように表現できる。

$$f = ae^{i\psi}. \quad (4.1)$$

ある時刻、ある場所のアイコナル関数を微小時間  $\delta t$ 、微小座標変位  $\delta \mathbf{r}$  で展開する。

$$\psi(\mathbf{r}_0 + \delta \mathbf{r}, \mathbf{k}, t_0 + \delta t) = \psi(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}, t_0) + \delta \mathbf{r} \cdot \nabla \psi + \delta t \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (4.2)$$

微小時間間隔、微小領域であれば、光は式 (1.46) の右辺のような平面波での近似ができる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\omega, \\ \nabla \psi &= \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

のようにアイコナルの時間、空間偏微分と角振動数、波数ベクトルを結びつけることができる。屈折率  $n$  の媒質中を伝搬する光の分散関係式  $\omega/k = c/n$  より以下の方程式を得る。

$$\left(\frac{n}{c}\right)^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 - \left[ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 \right] = 0. \quad (4.4)$$

これはアイコナル方程式と呼ばれる方程式で、幾何光学近似の元で媒質中の光の伝搬を記述する基礎方程式である。

## 4.2 Hamilton-Jacobi 方程式

正準変換 (3.79) から母関数の選び方によっては、変換後の Hamiltonian をゼロにすることができる。この時、変換後の一般化座標と正準運動量は、循環座標となりそれぞれ保存量として求まる。言い方を変えるとハミルトニアンをゼロにできる正準変換が見つければ、その系の運動の様子が分かったことになり、問題が解けたことになる。そのような母関数  $W'$  を選んだとすると

$$K(Q_i, P_i) = H(q_i, p_i) + \frac{\partial W'(q_i, P_i, t)}{\partial t} = 0, \quad (4.5)$$

を満たす。ここでハミルトニアンは時間に陽に依存しないとした。また系の自由度が  $N$  のとき、 $i = 1, \dots, N$  を取る。式 (3.77) から  $P_i$  は、 $W'$  の  $q_i$  による偏微分で表される。したがって、方程式 (4.5) は、以下のように書ける。

$$\frac{\partial W'(q_i, P_i, t)}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial W'(q_j, P_j, t)}{\partial q_i}\right) = 0. \quad (4.6)$$

これが Hamilton-Jacobi 方程式である。この方程式を満たす変換の母関数  $W'$  をハミルトンの主関数と呼ぶ。例えば、3次元空間を運動する自由粒子の Hamilton-Jacobi 方程式は以下のようなになる。

$$\frac{\partial W'}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left(\frac{\partial W'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W'}{\partial z}\right)^2 \right] = 0. \quad (4.7)$$

ここで新しいハミルトニアンがゼロ即ち  $K = 0$  であることから新しい正準変数での Hamilton の運動方程式は以下のようなになる。

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0, \quad (4.8)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0. \quad (4.9)$$

これらから定数  $\alpha_i, \beta_i$  を用いて一般化座標と一般化運動量は

$$Q_i(t) = \beta_i, \quad (4.10)$$

$$P_i(t) = \alpha_i, \quad (4.11)$$

と書ける。したがって、一般化運動量  $P_i$  はもはや変数では無く定数  $\alpha_i$  で置き換えられ、 $W'$  は  $W'(q_i, \alpha_i, t)$  のように  $q_i, \alpha_i, t$  の関数と書くことができる。

母関数  $W'$  が、一般化座標、時間と定数の関数としてなることは、以下の考察からも導くことができる。ハミルトンヤコビ方程式 (4.7) の解として一般化座標  $q_i(t)$  を求めることが運動の軌跡を求めることに対応する。 $q_i$  について時間の一階微分方程式なので、解にはそれぞれの自由度につき積分定数が一つ加わる。それが  $\alpha_i$  に対応する。変換の母関数  $W'$  は、Hamilton-Jacobi 方程式の解である  $q_i(t)$  と積分定数  $\alpha_i$  を用いて、形式的に以下のように書ける。

$$W' = W'(q_i, \alpha_i, t). \quad (4.12)$$

この解の時間全微分をとってみる。

$$\begin{aligned} \frac{dW'}{dt} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial W'(q_i(t), \alpha_i, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i(t) + \frac{\partial W'(q_i(t), \alpha_i, t)}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) = L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

したがって、

$$W'(q_i(t), \alpha_i, t) = \int^t dt' L(q_i(t'), \dot{q}_i(t'), t'). \quad (4.14)$$

となる。この式の右辺は、正に作用積分である。この結果は、Hamilton-Jacobi 方程式の解の母関数が作用積分であることを示している。そこで以下では、Hamilton-Jacobi 方程式に入れる母関数を

$$W'(q_i(t), \alpha_i, t) = S(q_i(t), \alpha_i, t), \quad (4.15)$$

によって作用積分で置き換える。即ち、ハミルトン ヤコビ方程式は作用

積分を用いて以下のように表現できる。

$$\frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial q_i}\right) = 0. \quad (4.16)$$

関係式 (3.78) より

$$\frac{\partial S(q_j, \alpha_j, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (4.17)$$

である。

Hamilton-Jacobi 方程式の形が、アイコナル方程式 (4.4) とよく似ているのは、Fermat の原理からの類推から Maupertuis の原理を経て Lagrange 形式を構築したことを思い起こせば偶然では無いことが納得できる。Hamilton-Jacobi 方程式は、物質波の伝搬を記述する方程式であり、この方程式を満たす母関数即ち作用積分は物質波の位相を表していることが期待される。

### 4.3 Hamilton の特性関数

Hamiltonian が時間を陽に含まない時、Hamilton-Jacobi 方程式は以下のように整理できる。

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (4.18)$$

左辺が時間に依存しないためには、 $\frac{\partial S}{\partial q_i}$  が時間に依存してはいけない。その為には  $S$  は

$$S = W(q_i) + Y(t), \quad (4.19)$$

のような形に変数分離形でかけていなければならない。 $q_i$  のみの関数である方程式 (4.18) の左辺が、 $t$  のみの関数である右辺と等しい為には、両辺が  $q_i$  にも  $t$  にも依存しない定数である必要がある。その定数を  $\alpha$  とすると方程式 (4.18) は

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = -\frac{dY}{dt} = \alpha, \quad (4.20)$$

となる。したがって、

$$Y(t) = -\alpha t + \text{const.}, \quad (4.21)$$

であり

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha t + \text{const.}, \quad (4.22)$$

となる。これはエネルギーが保存する場合即ち  $E = \text{一定}$  の時の式 (1.110) に他ならない。 $S$  や  $W$  が含有しうる不定定数の数は自由度の数を同じ  $N$  個である。したがって、式 (4.20) で現れた  $\alpha$  は、 $N$  個の  $\alpha_i$  と独立ではない。多くの場合、簡単のため  $\alpha_1 = \alpha$  ととる。この式の両辺を  $\alpha_1$  で偏微分し式 (4.17) を用いると以下の関係式を得る。

$$\frac{\partial W(q_i, \alpha_i)}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1. \quad (4.23)$$

方程式 (4.20) の解として与えられる、関数  $W(q)$  を Hamilton の特性関数と呼ぶ。

例として調和振動子 (3.63) を扱う。Hamiltonian が時間に陽に依存しないため Hamilton-Jacobi 方程式は、以下のように書ける。

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} q^2 = \alpha. \quad (4.24)$$

これを整理すると特性関数が満たす方程式が以下のように求まる。

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2\alpha - q^2}. \quad (4.25)$$

したがって、

$$W(q, \alpha) = \int dq \sqrt{2\alpha - q^2}, \quad (4.26)$$

のように解が求まる。この式を  $\alpha$  で偏微分し、積分を  $q = \sqrt{2\alpha} \sin \theta$  と置いて  $\theta$  の積分に変換して実行すると以下の結果を得る。

$$t + \beta = \int dq \frac{1}{\sqrt{2\alpha - q^2}} = \int_{\sin^{-1}(q_1/\sqrt{2\alpha})}^{\sin^{-1}(q/\sqrt{2\alpha})} d\theta = \sin^{-1} \left( \frac{q}{\sqrt{2\alpha}} \right) - \sin^{-1} \left( \frac{q_1}{\sqrt{2\alpha}} \right) \quad (4.27)$$

簡単のため初期  $t = 0$  の位置を  $q_1 = 0$  とすると

$$q(t) = \sqrt{2\alpha} \sin(t + \beta), \quad (4.28)$$

を得る。これは期待通り角振動数 1 の単振動解である。

特性関数について別の角度から考察する。正準変換を行って変換後の Hamiltonian が変換後の一般化座標  $Q_i$  に依存せず一般化運動量  $P_i$  にのみ依存する形に変形する変換後の Hamiltonian は  $K(P_i)$  のように書ける。この時、 $Q_i$  が循環座標となり、それに共役な運動量  $P_i$  が保存する。

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K(P_i)}{\partial Q_i} = 0. \quad (4.29)$$

節 3.3 に調和振動子を扱って一般化座標に依存しない Hamiltonian への変換の例を示した。式 (4.29) から

$$P_i = \alpha_i, \quad (4.30)$$

のように一般化運動量は定数  $\alpha_i$  で書ける。式 (4.30) から一般化運動量はや変数では無く定数として扱え、母関数は  $W'(q_i, \alpha_i)$  のように書ける。したがって、正準変換は  $(q_i, p_i) \rightarrow (q_i, \alpha_i)$  であり、母関数は

$$p_i = \frac{\partial W'(q_i, \alpha_i)}{\partial q_i}, \quad (4.31)$$

$$Q_i = \frac{\partial W'(q_i, \alpha_i)}{\partial \alpha_i}, \quad (4.32)$$

を満たす関数として定義される。方程式 (4.20) を正準変換後のハミルトニアンが  $K = \alpha_1$  となるように変換の母関数  $W'$  を決定する方程式として扱う。ここで  $\alpha = \alpha_1$  とした。すると正準運動方程式より

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \begin{cases} 1 & (i=1) \\ 0 & (i \neq 1) \end{cases} \quad (4.33)$$

を得る。これから

$$Q_1 = \frac{\partial W'}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1, \quad (4.34)$$

$$Q_i = \frac{\partial W'}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (i \neq 1), \quad (4.35)$$

を得る。これは、特性関数の満たす方程式 (4.23) に他ならない。



## 4.4 作用変数と角変数

周期的な運動を記述するのに便利な  $P = \alpha$  となる運動量の取り方を紹介する。調和振動子 (3.63) を例に議論を進める。ただし、振動数がどのように現れるを明示するため、固有振動数  $\omega$  を 1 とせず明記する。 $q$  に共役な正準運動量は

$$p(t) = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2\alpha - \omega^2 q^2} = \sqrt{2\alpha} \cos(t + \beta), \quad (4.36)$$

である。この関係式を整理すると以下のようになる。

$$\frac{p^2}{2\alpha} + \frac{q^2}{(2\alpha/\omega^2)} = 1. \quad (4.37)$$

この式からも分かるように  $\alpha$  は調和振動子の力学的全エネルギーである。図 4.1 に力学的エネルギー  $\alpha$  の調和振動子の位相空間上の軌跡を示した。解 (4.28) と (4.36) から位相空間中の回転方向は、軌跡に矢印で示したように時計回りである。仮想的なベクトル  $\mathbf{v} = (p, 0, 0)$ 、 $\nabla_{qp} = (\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p}, 0)$  を定義する。図 4.1 の粒子の軌跡で囲まれた楕円の単位法線ベクトルが  $\nabla_{qp} \times \mathbf{v} = (0, 0, -1)$  で定義される。符号は、位相空間中の粒子の軌跡の回転方向に右ネジを回した時、ネジの進む方向が紙面を突き抜ける方向であることを反映している。位相空間中の粒子の軌跡で囲まれる領域  $\sigma$  の面積を  $J(\alpha)$  とする。この面の向きは、位相空間中の粒子の軌跡に沿った方向に右ねじを回した時ねじが進む方向に取る必要があり、法線ベクトルは  $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$  となる。したがって、

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot (\nabla_{qp} \times \mathbf{v}) dq dp = \oint \mathbf{v} \cdot (dq, dp, 0) = \oint pdq \\ &= \oint \frac{\partial W(q, \alpha)}{\partial q} dq, \end{aligned} \quad (4.38)$$

となる。この計算ではストークスの定理を用いた。周回積分は、位相空間中粒子が回転する向き即ち時計回りに計算する。積分を実行するまでもなく、 $J$  は長半径・短半径がそれぞれ  $\sqrt{2\alpha}$ 、 $\sqrt{2\alpha}/\omega$  の楕円の面積なので

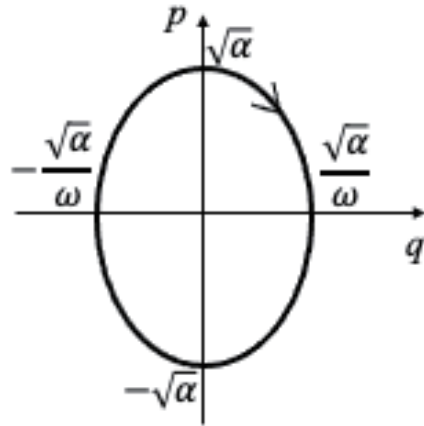


図 4.1 基準振動数  $\omega$ 、力学的エネルギー  $\alpha$  の調和振動子の位相空間上の軌跡。

$$J(\alpha) = \pi\sqrt{2\alpha} \frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega} = 2\pi \frac{\alpha}{\omega}, \quad (4.39)$$

である。エネルギーと基準振動数が一定である限り楕円の面積は一定で  $J$  は保存量となる。この  $J$  を作用変数と呼ぶ。

正準運動量を  $\alpha$  から作用変数  $J$  に置き換えると特性関数は以下のようになる。

$$W(q, J) = \int dq \sqrt{\omega \frac{J}{\pi} - \omega^2 q^2}. \quad (4.40)$$

作用変数  $J$  に共役な座標を  $w$  とすると母関数と正準座標の関係式から

$$w = \frac{\partial W(q, \alpha(J))}{\partial J}, \quad (4.41)$$

により求まる。この  $w$  を角変数と呼ぶ。今 Hamiltonian が  $\alpha$  なので、Hamilton の正準運動方程式から以下の方程式を得る。

$$\dot{w} = \frac{\partial \alpha}{\partial J} = \frac{\omega}{2\pi} = \nu = \frac{1}{T}. \quad (4.42)$$

最後の变形では、関係式 (4.39) を用い、振動の周期  $T$  あるいは振動の周波数  $\nu$  を用いた。角変数の定義式 (4.41) に式 (4.22) を代入すると

$$w(t) = \frac{\partial}{\partial J}(\alpha(J)t + S(q, \alpha(J), t)) = vt + \beta_J, \quad (4.43)$$

を得る。ここで

$$\beta_J = \frac{\partial S(q, \alpha(J), t)}{\partial J}, \quad (4.44)$$

は、 $J$  に対応した新座標である。式 (4.43) の右辺に  $2\pi$  を掛けた量は、振動の位相に対応する量を表している。これが  $w$  が角変数と呼ばれる所以である。

文献によっては、作用変数を

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint pdq, \quad (4.45)$$

と定義しているものもある。この定義を用いて角変数を定義すると方程式 (4.42) に対応する方程式は、

$$\dot{w} = 2\pi v, \quad (4.46)$$

となり、右辺は角速度となる。この方程式の解は

$$w(t) = 2\pi vt + \beta_J, \quad (4.47)$$

となり、物質波の位相に該当する量になる。ここで  $\beta_J$  も  $J$  を再定義したことにより、以前の定義に従って得られたものの  $2\pi$  倍になっている。こちらの定義を用いた場合、角変数の時間微分が角速度に角変数が波の位相に一致するという特徴がある。

#### 4.4.1 ケプラー運動の作用変数と角変数

中心力ポテンシャル

$$U = -\frac{k}{r}, \quad (4.48)$$

中に束縛されている質量 1 の粒子の運動を考える。ここで  $k$  は  $k > 0$  なる定数であり、 $r$  は原点から粒子までの距離である。ポテンシャル (4.48) は、原点ある重力源の周りを周回する人工衛星、あるいは原点にある正の電荷を

持つ原子核の周りを周回する電子に働く力を表している。厳密には、これらの運動は、力の源となる重力源あるいはクーロン力源も人工衛星や電子からの力を受けて運動し原点に静止し続けることができない。しかし、第ゼロ近似で重力源やクーロン力源が原点に静止しているという近似は、悪くない近似である。また、この仮定のもとに展開される以下の議論を力の源が原点に静止しているという近似を外して一般的な状況に容易に拡張が行える。

粒子のラグランジアンは以下のように与えられる。

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) + \frac{k}{r}. \quad (4.49)$$

この系は、原点を中心とした任意の軸の周りの回転変換に対して普遍である。ネーターの定理より原点を通る任意の軸の周りの回転に関わる角運動量が保存する。このことは、粒子の運動が角運動量を法線とする同一平面内に限られることが保証する。そこで簡単のため  $\theta = \pi/2$  として、 $x-y$  平面内の運動を扱う。この仮定の下では、 $\dot{\theta} = 0$  であり、ラグランジアンが以下の形に還元される。

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{k}{r}. \quad (4.50)$$

方位角  $\phi$  が循環座標であるから共役な運動量  $p_\phi$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = r^2\dot{\phi}, \quad (4.51)$$

が保存する。作用変数  $J_\phi$  が以下のように計算される。

$$J_\phi = \oint p_\phi d\phi = 2\pi p_\phi. \quad (4.52)$$

ラグランジアンが時間を陽に依存しないため力学的エネルギーが保存する。力学的エネルギーを  $E$  とおくと

$$E = \frac{1}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) - \frac{k}{r}, \quad (4.53)$$

と書ける。これを用いると動径  $r$  と共役な運動量  $p_r$  が以下のように書ける。

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r} = \pm \sqrt{2E + \frac{2k}{r} - \frac{J_\phi^2}{4\pi^2 r^2}}. \quad (4.54)$$

粒子は、中心力場に束縛されているので  $E < 0$  である。束縛されているということは、粒子は中心力源から離れるとどこかで  $\dot{r} = 0$  となり、再び原点に向かって動き出す。原点に近づくと遠心力が増大しそれ以上原点に近づくことができなくなり、 $\dot{r} = 0$  となって今度は原点から遠ざかる方向に運動を始める。これらの点を転回点と呼ぶ。転回点の位置は、式 (4.54) で  $\dot{r} = 0$  とすることで以下の方程式の解として得られる。

$$2E + \frac{2k}{r} - \frac{J_\phi^2}{4\pi^2 r^2} = 0. \quad (4.55)$$

両辺に  $r^2$  を掛けると方程式 (4.55) は

$$(-2E)r^2 - 2kr + \frac{J_\phi^2}{4\pi^2} = 0, \quad (4.56)$$

の形の二次方程式に還元される。二次方程式 (4.56) を  $a, b$  とし、長い方を  $a$  とする、即ち  $a \geq b$  とすると

$$a = \frac{k + \sqrt{k^2 + EJ_\phi^2/2\pi^2}}{-2E}, \quad (4.57)$$

$$b = \frac{k - \sqrt{k^2 + EJ_\phi^2/2\pi^2}}{-2E}, \quad (4.58)$$

で与えられる。動径方向の運動も  $a$  から  $b$  の間の周期運動である。そこでもう一つの作用変数  $J_r$  を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} J_r &= \oint p_r dr = \int_b^a \sqrt{2E + \frac{2k}{r} - \frac{J_\phi^2}{4\pi^2 r^2}} dr + \int_a^b \left( -\sqrt{2E + \frac{2k}{r} - \frac{J_\phi^2}{4\pi^2 r^2}} \right) dr \\ &= 2 \int_b^a \sqrt{2E + \frac{2k}{r} - \frac{J_\phi^2}{4\pi^2 r^2}} dr = 2\sqrt{-2E} \int_b^a \frac{1}{r} \sqrt{(a-r)(r-b)} dr. \end{aligned} \quad (4.59)$$

最後の变形では、二次方程式 (4.56) の解が  $r = a, b$  であり、粒子の運動が  $b \leq r \leq a$  に限られることを用いた。以下式 (4.59) の最後の積分は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} \int_b^a \frac{1}{r} \sqrt{(a-r)(r-b)} dr &= \int_b^a \frac{1}{r} \frac{(a-r)(r-b)}{\sqrt{(a-r)(r-b)}} dr \\ &= - \int_b^a \frac{r dr}{\sqrt{(a-r)(r-b)}} + (a+b) \int_b^a \frac{dr}{\sqrt{(a-r)(r-b)}} - ab \int_b^a \frac{dr}{r \sqrt{(a-r)(r-b)}} \end{aligned} \quad (4.60)$$

この式の第一項と第二項は、 $r = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)\cos u$  と変数変換することで実行できる。変数変換後の積分範囲は以下のようになる。

$$\begin{aligned} r &: b \rightarrow a \\ u &: 0 \rightarrow \pi \end{aligned} \quad (4.61)$$

第一項は、以下のように計算される。

$$\begin{aligned} - \int_b^a \frac{r dr}{\sqrt{(a-r)(r-b)}} &= - \int_0^\pi \frac{(1/2)((a+b) - (a-b)\cos u) (1/2)(a-b)\sin u du}{\sqrt{(1/2)(a-b)(1+\cos u)(1/2)(a-b)(1-\cos u)}} \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^\pi du ((a+b) - (a-b)\cos u) = - \frac{\pi}{2}(a+b). \end{aligned} \quad (4.62)$$

第二項は、以下のように計算される。

$$(a+b) \int_b^a \frac{dr}{\sqrt{(a-r)(r-b)}} = (a+b) \int_0^\pi \frac{(1/2)(a-b)\sin u du}{(1/2)(a-b)\sin u} = \pi(a+b). \quad (4.63)$$

第三項はまず  $s = 1/r$  と置いて変数変換する。

$$\begin{aligned} -ab \int_b^a \frac{dr}{r \sqrt{(a-r)(r-b)}} &= -ab \int_{1/b}^{1/a} \left( \frac{ds}{-s^2} \right) \frac{s}{\sqrt{(a-1/s)(1/s-b)}} \\ &= -\sqrt{ab} \int_{1/a}^{1/b} \frac{ds}{\sqrt{(s-1/a)(1/b-s)}}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

ここで  $s = \frac{1}{2}(1/a + 1/b) - \frac{1}{2}(1/b - 1/a)\cos u$  とおくとこの積分は、本質的に第二項の積分と同じになることから

$$-ab \int_b^a \frac{dr}{r \sqrt{(a-r)(r-b)}} = -\pi\sqrt{ab}, \quad (4.65)$$

となる。以上から  $J_r$  が以下のように求まる。

$$J_r = 2\pi\sqrt{-2E} \left( \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right). \quad (4.66)$$

式 (4.57), (4.58) より

$$a+b = -\frac{k}{E}, \quad (4.67)$$

$$\sqrt{ab} = \frac{J_\phi}{2\pi\sqrt{-2E}}. \quad (4.68)$$

これらを式 (4.66) に代入すると以下の結果を得る。

$$J_r = 2\pi \frac{k}{\sqrt{-2E}} - J_\phi, \quad (4.69)$$

整理すると粒子の力学的エネルギーの作用変数による以下の表式を得る。

$$E = -\frac{2\pi^2 k^2}{(J_r + J_\phi)^2}. \quad (4.70)$$

作用変数  $J_\phi$  に共役な角変数を  $w_\phi$ 、方位角方向の運動の周期を  $T_\phi$  とすると方程式 (4.42) より以下の関係式を得る。

$$\dot{w}_\phi = \frac{\partial E}{\partial J_\phi} = \frac{4\pi^2 k^2}{(J_r + J_\phi)^3} = \frac{1}{T_\phi}, \quad (4.71)$$

同様に作用変数  $J_r$  に共役な角変数を  $w_r$ 、動径方向の運動の周期を  $T_r$  とするとこれらの間の以下の関係式を得る。

$$\dot{w}_r = \frac{\partial E}{\partial J_r} = \frac{4\pi^2 k^2}{(J_r + J_\phi)^3} = \frac{1}{T_r}. \quad (4.72)$$

これらから

$$T_r = T_\phi, \quad (4.73)$$

であることが分かり、一回転する周期と動径方向の振動の周期が一致していることが分かる。このことは、ケプラー運動の軌道が閉じていることを示している。

式 (4.71) から  $T_\phi$  は、以下のように力学的エネルギーを用いて表すことができる。式 (4.69) を用いると以下の関係式を得る。

$$\frac{1}{T_\varphi} = 4\pi^2 k^2 \times \left( \frac{2\pi k}{\sqrt{-2E}} \right)^{-3} = \frac{(-2E)^{3/2}}{2\pi k}. \quad (4.74)$$

ケプラー運動の軌道長半径  $r_0$  は

$$r_0 = \frac{a+b}{2} = -\frac{k}{2E}, \quad (4.75)$$

で与えられる。これを式 (4.74) に代入すると回転運動の周期と軌道長半径の関係式通して以下の関係式を得る。

$$\frac{1}{T_\varphi} = \frac{k^{1/2}}{2\pi} \left( \frac{1}{r_0} \right)^{3/2}. \quad (4.76)$$

これは軌道周期の二乗が軌道長半径の3乗に比例するというケプラーの第3法則である。以下、円運動の場合についてこの関係を調べる。円運動では、遠心力と重力の釣り合いから以下の関係式を得る。

$$\frac{k}{a^2} = \frac{p_\varphi^2}{a^3} = \frac{J_\varphi^2}{4\pi^2 a^3}. \quad (4.77)$$

これを用いると円運動での力学的エネルギーは以下のように書ける。

$$-2E = \frac{2k}{a} - \frac{J_\varphi^2}{4\pi^2 a^2} = \frac{k}{a}. \quad (4.78)$$

これを代入すると式 (4.74) は以下のように書ける。

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{k}{a^3} \right)^{1/2}. \quad (4.79)$$

円運動の角振動数を  $\omega$  とすると  $p_\varphi = a^2 \omega$  である。これを式 (4.77) に代入すると角振動数が以下のように求まる。

$$\omega = \left( \frac{k}{a^3} \right)^{1/2}. \quad (4.80)$$

式 (4.79) と比較すると

$$\omega T = 2\pi, \quad (4.81)$$

であり、 $T$  が確かに回転運動の周期になっていることがわかる。



## 4.5 断熱不変量

### 4.5.1 一般の周期運動

一般化座標  $q$  でそれに共役な運動量  $p$  で周期的運動をする系を考える。作用変数を以下の式で定義する。

$$J = \oint pdq. \quad (4.82)$$

この系を記述するパラメータのユックリした変化に伴いこの作用変数  $J$  は不変である。これを断熱不変量と呼ぶ。断熱不変量である作用変数 (4.82) を Planck 定数  $h$  とおくと光量子仮説に該当する。

### 4.5.2 調和振動子

紐長さ  $l$ 、質量  $m$  の振り子を考える。振動の振幅が微小の時、振り子のラグランジアンは以下のように書ける。

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mg\ell\theta^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\theta^2. \quad (4.83)$$

ここで  $\omega = \sqrt{g/\ell}$  は単振り子の固有角振動数である。振動角  $\theta$  に共役な運動量は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}. \quad (4.84)$$

と書ける。解 (3.167) を代入すると、作用変数は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} J &= \oint m\ell^2\dot{\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} m\ell^2\theta_0^2\omega^2\sin^2\omega t dt \\ &= \pi m\ell^2\theta_0^2\omega = 2\pi\frac{\bar{E}}{\omega}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

ここで  $\bar{E}$  は、系のエネルギーの長時間平均であり以下のように与えられる。

$$\bar{E} = 2\bar{K} = \frac{1}{2}mg\ell\theta_0^2. \quad (4.86)$$

この単振り子の紐の長さが固有振動の周期  $2\pi/\omega$  に比べて十分ユックリ変化するとき、即ち

$$\frac{\dot{\ell}}{\ell} \ll \frac{\omega}{2\pi}, \quad (4.87)$$

の時、作用変数 (4.85) が不変であることを示す。紐の長さが一定の速度  $\dot{\ell}$  で変化するとする。長さの変化速度が一定ということは、 $\ddot{\ell} = 0$  である。質点の速度の  $x-y$  成分は以下のようなになる。

$$\dot{x} = \dot{\ell}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\ell}\sin\theta, \quad (4.88)$$

$$\dot{y} = -\dot{\ell}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\ell}\cos\theta. \quad (4.89)$$

加速度は以下のようなになる。

$$\ddot{x} = \dot{\ell}\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\ell}\dot{\theta}^2\sin\theta + 2\dot{\ell}\dot{\theta}\cos\theta, \quad (4.90)$$

$$\ddot{y} = -\dot{\ell}\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\ell}\dot{\theta}^2\cos\theta - 2\dot{\ell}\dot{\theta}\sin\theta. \quad (4.91)$$

運動方程式は以下のようなになる。

$$m(\dot{\ell}\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\ell}\dot{\theta}^2\sin\theta + 2\dot{\ell}\dot{\theta}\cos\theta) = -T\sin\theta, \quad (4.92)$$

$$m(-\dot{\ell}\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\ell}\dot{\theta}^2\cos\theta - 2\dot{\ell}\dot{\theta}\sin\theta) = -T\cos\theta + mg. \quad (4.93)$$

これらは、節 (3.8.2) と同様の变形で以下の式に還元される。

$$T = m\dot{\ell}\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta, \quad (4.94)$$

$$m\dot{\ell}\ddot{\theta} + 2m\dot{\ell}\dot{\theta} = -mg\sin\theta \sim -mg\theta. \quad (4.95)$$

この運動方程式は、微小振動なので  $x = \ell\theta$  が成り立つことを用いて微小振動の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2x, \quad (4.96)$$

に代入することで以下のように導出することができる。

$$m\frac{d^2\ell\theta}{dt^2} = m\dot{\ell}\ddot{\theta} + 2m\dot{\ell}\dot{\theta} = -m\omega^2\ell\theta. \quad (4.97)$$

振動角の運動方程式 (4.95) の両辺に  $\dot{\ell}\theta$  を掛けて式を整理すると以下の振動子の力学的エネルギーの時間発展の式を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{\ell}^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m g \ell \theta^2 \right) &= -m \dot{\ell} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m g \dot{\ell} \theta^2, \\
&= \frac{\dot{\ell}}{\ell} \left( -m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m g \ell \theta^2 \right), \\
&= \frac{\dot{\ell}}{\ell} (-2K + U). \tag{4.98}
\end{aligned}$$

条件 (4.87) の元でこの式の一周期にわたる平均を取る。力学的エネルギーの一周期にわたる平均を  $\bar{E}$  と書き表すと

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{\dot{\ell}}{\ell} (-2\bar{K} + \bar{U}) = -\frac{\dot{\ell}}{\ell} \frac{\bar{E}}{2}, \tag{4.99}$$

となる。ここで  $\dot{\ell} \ll \ell$  であるため、調和振動子のビリアル定理 (3.172) を用いることができ、それを用いた。また一周期では紐の長さの変化が無視できるので、力学的エネルギーの平均は式 (4.86) で与えられ、作用変数  $J$  は式 (4.85) で与えられる。作用変数の分母の時間微分は以下のように計算される。

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\omega} = -\frac{1}{\omega^2} \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2\omega} \frac{\dot{\ell}}{\ell}. \tag{4.100}$$

ここで  $\omega = \sqrt{g/\ell}$  を用いた。式 (4.99) と (4.100) を用いて作用 (4.85) の時間微分を計算すると

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{dt} &= 2\pi \left( \frac{1}{\omega} \frac{d\bar{E}}{dt} - \frac{\bar{E}}{\omega^2} \frac{d\omega}{dt} \right) = 2\pi \left( -\frac{\dot{\ell}}{\ell} \frac{\bar{E}}{2\omega} + \frac{\dot{\ell}}{\ell} \frac{\bar{E}}{2\omega} \right) \\
&= 0, \tag{4.101}
\end{aligned}$$

となり、作用変数  $J$  が不変であることが証明された。微小振動する単振り子の紐長さをユックリ変化させた時、不変である作用変数  $J$  を断熱不変量と呼ぶ。断熱という言葉、この過程が可逆であることに起因している。上の証明は、 $\dot{\ell}$  の正負即ち紐が長くなるか短くなるかを問わない。例えば、一旦紐を長くしたのち再び短くして元の状態に戻すことができる。可逆的即ち断熱的である変化過程に関連した不変量なので断熱不変量と呼ばれる。

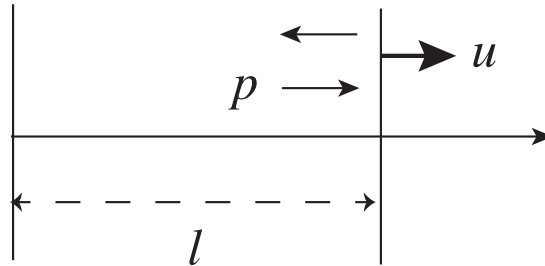


図 4.2 平行な壁の間を運動する自由粒子。

#### 4.5.3 平行な壁の間を運動する自由粒子

図 4.2 のように平行な二つの壁の間を往復する質量  $m$  で速度  $v$  で一次元運動をする粒子を考える。壁と粒子との衝突は、完全弾性衝突とする。壁の間の運動は自由粒子として扱えるとする。この粒子は、壁の間の往復に要する時間

$$T = \frac{2\ell}{p/m}, \quad (4.102)$$

の周期的運動をしていると考えることができる。ここで  $\ell$  は壁の間隔である。壁の間を運動する粒子のラグランジアンは以下のように与えられる。

$$L = \frac{m}{2}v^2. \quad (4.103)$$

正準共役な運動量は以下のように与えられる。

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = mv. \quad (4.104)$$

この粒子の往復運動の作用変数は

$$J = p\ell + (-p)(-\ell) = 2p\ell, \quad (4.105)$$

である。片側の壁が速度  $u$  で反対の壁から遠ざかり、壁の間隔が伸びるとする。壁の速度が十分遅く、粒子が一往復する間の壁の間隔の変化量

$$\Delta\ell = uT = \frac{2ul}{p/m}, \quad (4.106)$$

が  $\ell$  に比べて十分小さいとする。速度  $u$  で遠ざかる壁との衝突で引き起こされる粒子の運動量の変化量は

$$\Delta p = -2mu, \quad (4.107)$$

である。これらを用いて、壁が遠ざかるときの作用変数を計算する。粒子が固定された左側の壁から出発した時刻を  $0$  とする。この時に遠ざかる壁に向う粒子の運動量を  $p$  とするとその速度は  $v = p/m$  である。遠ざかる右側の壁に衝突した時を  $t_1$  とすると

$$vt_1 = \ell + ut_1, \quad (4.108)$$

の解として

$$t_1 = \frac{\ell}{v-u}, \quad (4.109)$$

と求まる。したがって、左の壁を出発してから右の壁に当たるまでに走る距離は、微小量  $u/v$  の一次までの精度で

$$\ell + \Delta\ell = \ell + \frac{u}{v-u}\ell \sim \ell + \frac{u}{v}\ell, \quad (4.110)$$

である。遠ざかる右側の壁に衝突後の粒子の運動量と速度を  $p_{ref}$  とすると

$$p_{ref} = p - 2mu, \quad (4.111)$$

である。したがって、動いている壁に衝突するときの作用変数は微小量の一次までの精度で、

$$\begin{aligned} J &= p(\ell + \Delta\ell) + (-p_{ref})(-(\ell + \Delta\ell)) = 2p\ell + 2p\Delta\ell - 2mul - 2mu\Delta\ell \\ &\sim 2p\ell + 2p\frac{u}{v}\ell - 2mu = 2p\ell. \end{aligned} \quad (4.112)$$

となり、式 (4.105) の結果と一致し不変である。壁の移動速度が粒子の速度に比べて十分小さくなるように、ユックリ壁を動かすとき、 $J$  が不変量であることが確かめられた。これは、周期運動する粒子に対して式 (4.82) で定義される作用変数が断熱不変量出ることの具体的な例の一つである。

この例は、気体を閉じ込めた箱の体積をユックリ膨張させると作用変数を一定に保ったまま運動量が減少しそれに伴って温度が低下することを示している。気体が温度  $T$  の熱平衡状態にある時、気体分子一個の遠ざかる壁に垂直な速度成分の運動エネルギー  $p^2/2m$  の平均は  $k_B T/2$  に等しい。ここで  $k_B$  は Boltzmann 定数である。したがって、気体分子の作用変数の平均は

$$J = 2 \frac{p^2}{2mp} 2m\ell = 2 \frac{k_B T}{p} m\ell = 4m \frac{k_B T \ell^2}{J} = 4m \frac{k_B T V^{2/3}}{J}, \quad (4.113)$$

と書ける。ここで  $V$  は気体が含まれる領域の体積である。断熱膨張に対して作用変数が不変ということから

$$k_B T V^{2/3} = \text{const.} \quad (4.114)$$

が得られる。これは理想気体の状態方程式に他ならない。

#### 4.5.4 応用例：磁気ミラー効果

$z$  軸正の方向を向いた一様磁場  $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$  中を運動する電荷  $q$ 、質量  $m$  の粒子の運動を考察する。粒子の  $xy$  平面内の運動方程式は

$$m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B_0, \quad (4.115)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B_0, \quad (4.116)$$

である。この方程式は、新たな変数

$$Z \equiv v_x + iv_y, \quad (4.117)$$

を導入して  $Z$  の方程式にして解く。方程式 (4.116) に虚数単位  $i$  を掛けて方程式 (4.115) と足し合わせると以下の方程式を得る。

$$\frac{dZ}{dt} = -i \frac{qB_0}{m} Z. \quad (4.118)$$

サイクロトロン振動数  $\omega_c$  を

$$\omega_c = \frac{qB_0}{m}, \quad (4.119)$$

で定義すると解は以下のもとなる。

$$Z = Z_0 e^{-i\omega_c t}. \quad (4.120)$$

初期条件  $t = 0$  で  $v_x = v_\perp$ ,  $v_y = 0$  とすると

$$v_x = v_\perp \cos \omega_c t, \quad (4.121)$$

$$v_y = -v_\perp \sin \omega_c t, \quad (4.122)$$

が解となる。粒子の軌跡は以下のように求まる。

$$x = \frac{v_\perp}{\omega_c} \sin \omega_c t, \quad (4.123)$$

$$y = \frac{v_\perp}{\omega_c} \cos \omega_c t. \quad (4.124)$$

電荷  $q$  が正のとき時計回りに、電荷が負のとき反時計回りに半径

$$a_L = \frac{v_\perp}{\omega_c}, \quad (4.125)$$

の円軌道を描く。電荷の回転に伴う円電流が作る磁場の向きは、外部から与えた磁場  $B_0$  と反対向きである。このように与えられた磁場の強度を弱める方向に流れる電流を反磁性電流と呼ぶ。すなわち、磁場が与えられると荷電粒子は反磁性電流が流れるように回転運動を行う。この半径を Larmor 半径あるいは gyro 半径あるいはサイクロトロン半径と呼ぶ。 $z$  方向には速度  $v_\parallel$  の等速直線運動を行う。ここで  $v_\perp$  は磁場に垂直な方向の速度成分、 $v_\parallel$  は磁場に平行な方向の速度成分という意味を込めて名付けられている。それぞれ *ヴァイパープ*、*ヴァイパラ* と読む。

一様磁場  $\mathbf{B}$  のベクトルポテンシャルを  $\mathbf{A}$  とする。座標  $x, y$  に対する正準運動量  $P_x, P_y$  は、それぞれ

$$\begin{aligned} P_x &= mv_x + qA_x, \\ P_y &= mv_y + qA_y, \end{aligned} \quad (4.126)$$

で粒子の速度  $\mathbf{v}$  と結ばれる。粒子は  $x$  方向、 $y$  方向それぞれに対して  $-a_L$  から  $a_L$  の間を行き来する周期運動を行う。以下粒子の電荷は正であるとす。それらに付随した作用変数が以下のように定義される。

$$\begin{aligned}
J_x &= \oint P_x dx = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} P_x v_x dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} m v_x^2 dt + q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} A_x v_x dt \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} m v_{\perp}^2 \cos^2 \omega_c t dt + q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} A_x v_x dt \\
&= \frac{\pi}{\omega_c} m v_{\perp}^2 + q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} A_x v_x dt \tag{4.127}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_y &= \oint P_y dy = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} P_y v_y dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} m v_y^2 dt + q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} A_x v_x dt \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} m v_{\perp}^2 \sin^2 \omega_c t dt + q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} A_x v_x dt \\
&= \frac{\pi}{\omega_c} m v_{\perp}^2 + q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} A_x v_x dt, \tag{4.128}
\end{aligned}$$

z 方向を向いた一様磁場を与えるベクトルポテンシャルとして以下のものを採用する。

$$\mathbf{A} = \left( -\frac{1}{2} B_0 y + \frac{\partial \chi}{\partial x}, \frac{1}{2} B_0 x + \frac{\partial \chi}{\partial y}, 0 \right). \tag{4.129}$$

ここで  $\chi$  は、 $x, y$  のみに依存するスカラー関数で、付録 F で解説したベクトルポテンシャルのゲージ変換の自由の不定性を意識してベクトルポテンシャルにこの関数の勾配を加えた。この時、 $J_x, J_y$  のベクトルポテンシャルの積分の項はそれぞれ以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} A_x v_x dt &= q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} \left( -\frac{1}{2} B_0 y v_x + v_x \partial_x \chi \right) dt \\
&= -q \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c} B_0 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} \cos^2 \omega_c t dt + q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} v_x \partial_x \chi dt \\
&= -\frac{\pi m v_{\perp}^2}{2\omega_c} + q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} v_x \partial_x \chi dt. \tag{4.130}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} A_y v_y dt &= q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} \left( \frac{1}{2} B_0 x v_y + v_y \partial_y \chi \right) dt \\
&= -q \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_c} B_0 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} \sin^2 \omega_c t dt + q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} v_y \partial_y \chi dt \\
&= -\frac{\pi m v_{\perp}^2}{2\omega_c} + q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} v_y \partial_y \chi dt. \tag{4.131}
\end{aligned}$$



以上から二つの作用変数が以下のように求まる。

$$J_x = \frac{\pi m v_{\perp}^2}{2\omega_c} + q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} v_x \partial_x \chi dt, \quad (4.132)$$

$$J_y = \frac{\pi m v_{\perp}^2}{2\omega_c} + q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} v_y \partial_y \chi dt. \quad (4.133)$$

この結果から分かるように一様磁場中を回転運動する粒子の作用変数  $J_x$ ,  $J_y$  はゲージ変換の自由度が混入し、一意に決めることができない。しかし、これらの和は以下のようになりゲージ変換の自由度が消え、一意に決定される。

$$\begin{aligned} J \equiv J_x + J_y &= \frac{\pi m v_{\perp}^2}{\omega_c} + q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} (v_x \partial_x \chi + v_y \partial_y \chi) dt = \frac{\pi m v_{\perp}^2}{\omega_c} + q \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} \frac{d\chi}{dt} dt \\ &= \frac{\pi m v_{\perp}^2}{\omega_c} + [\chi(x(2\pi/\omega_c), y(2\pi/\omega_c)) - \chi(x(0), y(0))] = \frac{\pi m v_{\perp}^2}{\omega_c} \\ &= \frac{2\pi W_{\perp}}{\omega_c} = \frac{2\pi m W_{\perp}}{q B_0}. \end{aligned} \quad (4.134)$$

最後の等号の変形では、粒子が周回運動をしているため  $x(2\pi/\omega_c) = x(0)$ ,  $y(2\pi/\omega_c) = y(0)$  であることを用いた。ここで

$$W_{\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2.$$

は、磁場に垂直な速度成分すなわち磁場によって励起された回転運動の運動エネルギーである。

ゲージ変換の自由度が混入せず且つ物理的見通しがスッキリした形でのこの系の作用変数の導出を紹介する。円筒座標  $(r, \theta, z)$  を用いて運動を記述すると系のラグランジアンは以下ようになる。

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + q(\dot{r}A_r + r\dot{\theta}A_{\theta} + \dot{z}A_z) - q\phi. \quad (4.135)$$

粒子は、方位角方向に角速度の大きさ  $\omega_c$  で時計回りに半径  $a_L$  の円運動を行い、速度の動系成分はゼロ即ち  $\dot{r} = 0$  である。ここで回転方向が時計回り即ち方位角が減少する方向であることから  $\dot{\theta} = -\omega_c$  である。方位角  $\theta$  に共役な正準運動量  $P_{\theta}$  は以下のように定義される。

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} + rA_\theta. \quad (4.136)$$

したがって、方位角の周回運動に対する作用変数は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} J_\theta &= \oint P_\theta d\theta = \int_0^{-2\pi} ma_L^2(-\omega_c)d\theta + \int_0^{-2\pi} qA_\theta a_L d\theta \\ &= 2\pi m \frac{v_\perp^2}{\omega_c} + \oint q\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.137)$$

最後の項の変形は、 $A_\theta a_L d\theta$  が粒子の回転運動の軌道に沿ったベクトルポテンシャルと微小線素ベクトルの内積であることを用いた。右辺第二項は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \oint q\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} &= \int_S q\nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = -\pi a_L^2 qB_0 \\ &= -\pi \frac{v_\perp^2 m^2}{q^2 B_0^2} qB_0 = -2\pi m \frac{mv_\perp^2}{2} \frac{1}{qB_0} = -2\pi \frac{mW_\perp}{qB_0}. \end{aligned} \quad (4.138)$$

ここでストークスの定理を用いて周回積分を面積分に変換し、 $\mathbf{n}$  は粒子の軌道を境界とする面の法線ベクトルであり、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  であることを用いた。また、 $q > 0$  とし、周回積分の方向すなわち粒子の回転方向に右ねじを回した時ネジの進む方向が  $\mathbf{B}$  と反平行であること、粒子は半径  $a_L$  の円運動をすることから面の面積が  $\pi a_L^2$  であることを用いた。以上をまとめると作用変数が以下のように計算できる。

$$J_\theta = \frac{4\pi m W_\perp}{q B_0} - \frac{2\pi m W_\perp}{q B_0} = \frac{2\pi m W_\perp}{q B_0}. \quad (4.139)$$

この結果は、式 (4.134) で求めた  $J_x$  と  $J_y$  の和と一致している。

磁場強度が、回転周期に比べてゆっくり変化する時、回転運動の運動エネルギーと磁場強度の比が断熱不変量となり、保存される。この結果は、磁場強度が増加すると粒子の運動エネルギーが増加する即ち加速されることを示している。この加速が起きる物理機構を考察する。電磁誘導の法則 (3.181) により粒子の軌道で囲まれる面内を貫く磁束の増加を妨げる方向に電流が流れるよう誘導起電力が発生する。荷電粒子は、反磁性電流が流れるように回転しており、この起電力により加速される方向は電荷の正負に

関わらず粒子を加速する方向であることが分かる。このことを定量的に示す。式 (3.181) に粒子の軌道で囲まれる曲面上の面積分を施す。以下磁場の時間変化は変化率  $\dot{B}$  で空間的に一様に起きるとする。電荷を正とすると面の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は磁場  $\mathbf{B}$  と反平行である。

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.140)$$

この式の左辺の大きさ（絶対値）は以下のように計算できる。

$$l.h.s = \pi a_L^2 \dot{B}. \quad (4.141)$$

右辺はストークスの定理を用いて以下のように計算される。符号は誘導起電力の向きの情報を持つが、向きは分かっているので誘導起電力の大きさを  $E$  の評価にのみ興味がある。

$$r.h.s = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = 2\pi a_L E. \quad (4.142)$$

以上の結果から誘導起電力の大きさが以下のように求まる。

$$E = \frac{a_L}{2} \dot{B} = \frac{mv_{\perp}}{2qB_0} \dot{B}. \quad (4.143)$$

誘導起電力により磁場に垂直な速度成分の増加を表す方程式は以下のように書ける。

$$\dot{v}_{\perp} = \frac{q}{m} E = \frac{v_{\perp}}{2B_0} \dot{B}. \quad (4.144)$$

これらを用いて作用変数 (4.139) の時間変化率を計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{\pi m^2}{q} \frac{d}{dt} \left( \frac{v_{\perp}^2}{B_0} \right) = \frac{\pi m^2}{q} \frac{v_{\perp}^2}{B_0} \left( \frac{2\dot{v}_{\perp}}{v_{\perp}} - \frac{\dot{B}}{B_0} \right) \\ &= \frac{\pi m^2}{q} \frac{v_{\perp}^2}{B_0} \left( \frac{\dot{B}}{B_0} - \frac{\dot{B}}{B_0} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.145)$$

確かに作用変数  $J$  は不変量である。

磁場強度がゆっくり時間変化するさいに作用変数 (4.139) が保存することに起因する重要なもう一つの現象を紹介する。磁場の強度が  $z$  軸正の方向に進むにつれて、磁場が少しずつ増加する状況を考える。 $v_{\parallel} > 0$  の時、粒子

は磁場の周りを回転運動しながら  $z$  軸正の方向に磁力線を遡っていく。作用変数が不変のまま磁場が強くなっていくので、磁力線を遡るにしたがって  $W_{\perp}$  が大きくなる。磁場に平行な運動のエネルギーは

$$W_{\parallel} = W_0 - W_{\perp}, \quad (4.146)$$

である。磁場中の粒子の運動エネルギー  $W_0$  が一定に保たれることから、

$$W_{\perp} = \frac{J}{2\pi q} B_0(z) = W_0, \quad (4.147)$$

となる  $z$  で  $W_{\parallel} = 0$  となる。即ち、この位置より先に粒子は進むことができず。ここで反射される。これを磁気ミラー効果と呼ぶ。

## 付録 A

# フーリエ変換

線形現象の特徴は、重ね合わせの原理が適用できることである。そのような場合には、物理量をさまざまな周波数の波に分解して取り扱うフーリエ変換の手法が有効である。

### A.1 デルタ関数

本題に入る前にデルタ ( $\delta$ ) 関数とシンク (sinc) 関数についてまとめる。 $\delta$  関数とは次の性質を満たす関数のことである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (\text{A.2})$$

この関数は次のような振る舞いをする。

$$\delta(x) = \infty \quad \text{at } x = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$= 0 \quad \text{at } x \neq 0 \quad (\text{A.4})$$

さて  $\delta$  関数は以下のように波の重ね合わせで表わされる。

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \quad (\text{A.5})$$

この式の物理的意味を理解しておく事は実用上非常に重要である。そこで

式 (A.5) の右辺でデルタ関数が表せることを以下で証明しよう。

$$I(k_0, x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-k_0}^{k_0} dk e^{ikx}$$

で定義される関数  $I(k_0, x)$  を定義する。式 (A.5) の右辺は  $\lim_{k_0 \rightarrow \infty} I(k_0, x)$  で表される。 $I(k_0, x)$  は、

$$\text{sinc}X \equiv \frac{\sin X}{X}$$

で定義されるシンク関数 (sinc function) を用いて以下のように書ける。

$$I(k_0, x) = \frac{k_0}{\pi} \text{sinc}k_0x$$

シンク関数は以下の特徴を持つ。

$$\begin{aligned} \text{sinc}0 &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} dX \frac{\sin X}{X} &= \pi \end{aligned}$$

図 A.1 にこの関数の振る舞いを示した。この関数は、原点で最大値をとり減衰振動する。二つ目のピークの値は最大値の約  $1/8$  と小さく第ゼロ近似では、原点を中心とした一つ目の山に関数値が集中していると考えてよい。この一つ目の山の広がりの特徴付ける量として半値巾を定義する。半値巾とは、関数値がピーク値の半分になる所の間隔である。英語で Full Width at Half Maximum といふ FWHM という略号がしばしば使われる。シンク関数の FWHM は、約  $1.207\pi$  である。

式 (A.5) の右辺が、 $\delta$  関数の性質式 (A.2) を満たすことを示そう。

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \lim_{k_0 \rightarrow \infty} I(k_0, x)$$

と置く。 $I(k_0, x)$  が有限の値を持つ範囲は、 $x = 0$  を中心とした大体巾  $\pi/k_0$  の範囲である。したがって、 $k_0$  を無限大に近づけると原点の周りの非常に狭い範囲でのみ有限の値を持つことになる。このような狭い範囲では、関数  $f(x)$  の値が  $f(0)$  のままほぼ一定と見なせる。したがって、 $A$  は以下の様に近似的に計算できる。

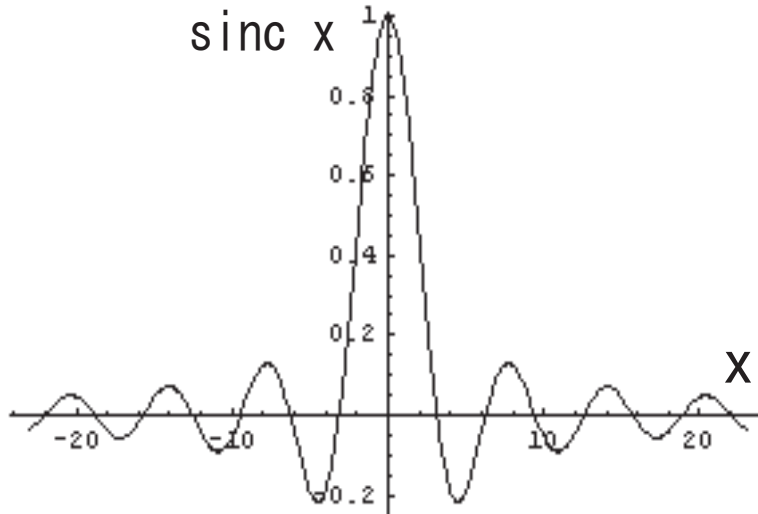


図 A.1 シンク関数 (sinc function) の振る舞い

$$A \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \lim_{k_0 \rightarrow \infty} I(k_0, x) = f(0) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dX \frac{\sin X}{X} = f(0)$$

デルタ関数の性質 (A.1) が満たされることは、シンク関数の積分の性質から自明であろう。以上でデルタ関数が式 (A.5) の様な波の重ね合わせで表現できることが証明された。

次に

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}$$

の物理的解釈を述べる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk (\cos kx + i \sin kx)$$

と書ける。虚数部は奇関数  $f(-x) = -f(x)$  だから  $-\infty \sim +\infty$  の積分はゼロである。実数部は偶関数  $f(-x) = f(x)$  である。実数部の積分は、 $x=0$  で位相が揃った  $-\infty \sim +\infty$  のすべての波数  $k$  の cosine 波を  $dk/2\pi$  の同じ重みで重ね合わせるという意味である。原点では、すべての波数の波の位相が揃っているので強め合って振幅無限大になる。一方、 $x \neq 0$  では  $0 \sim 2\pi$  の間のさまざまな位相の波が同じ割合で存在し、重ね合わさりお互い打ち消

しあって振幅がゼロになる。

## A.2 フーリエ変換

ある時間  $t$  の関数  $E(t)$  及び空間  $x$  の関数  $E(x)$  のフーリエ変換 (Fourier transformation) は以下のように定義される。

$$\hat{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt, \hat{E}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(x) e^{-ikx} dx$$

指数の肩が、時間変数  $t$  と空間変数  $x$  で符号が異なるのは、波の進行方向、即ち位相一定面の進む向きと波数ベクトル  $k$  の符号が一致するようにするためである。 $\hat{E}(\omega)$ 、 $\hat{E}(k)$  は一般に複素数であり、以下ではフーリエ変換係数或いは単にフーリエ係数と呼ぶ。フーリエ係数の絶対値の二乗は関数のフーリエスペクトル或いは単にスペクトルと呼ばれる。空間が 3 次元の場合は波数ベクトルは 3 次元ベクトル  $\mathbf{k}$  となり、指数の肩は  $-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$  となり、積分は  $d^3\mathbf{x}$  と 3 次元微小体積要素による積分となる。フーリエ係数  $\hat{E}(\omega)$  は、 $E(t)$  という波を構成する波の内、角周波数  $\omega$  を持つ波の振幅が  $|\hat{E}(\omega)|$  で  $t=0$  での位相が  $\arg\hat{E}(\omega)$  であることを表す。

フーリエ係数から元の関数は以下のようにしてもとまる。

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(k) e^{ikx} dk$$

これをフーリエ逆変換と呼ぶ。前節で述べたデルタ関数のフーリエ係数は周波数或いは波数によらず  $1/2\pi$  で一定である。以後式 (A.5) をデルタ関数のフーリエ積分表示と呼ぶことにする。

直接測定可能な物理量は全て実数、例えば  $E^*(t) = E(t)$  ここで  $E^*(t)$  は関数  $E(t)$  の複素共役、であるという条件からフーリエ係数について重要な条件が課せられる。この条件を実条件 (Reality condition) と呼ぶ。フーリエ変換の定義式の複素共役を取り実条件を用いると以下の式を得る。

$$\hat{E}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i(-\omega)t} dt = \hat{E}(-\omega)$$

これから負の周波数のフーリエ係数は、対応する正の周波数のフーリエ係



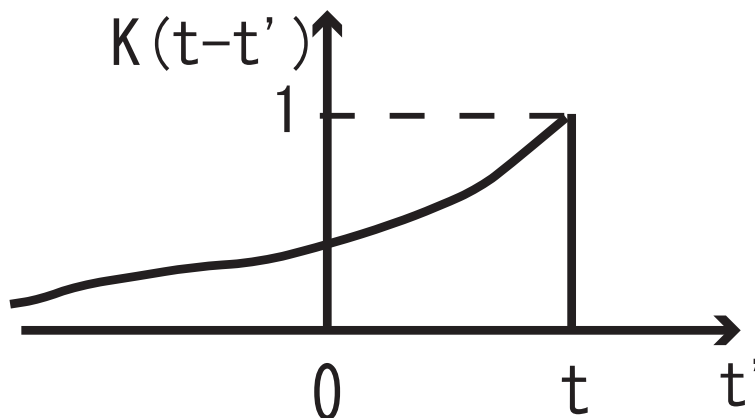


図 A.2 たたみ込み核の例

数の複素共役と等しい。したがって、 $\hat{E}(\omega)$  は、 $\omega \geq 0$  の領域のもののみ測定すれば十分である。波数についても同様のことが言えるが波数の正負は波の進行方向を表しているので正負の区別を残しておく必要がある。

### A.3 たたみ込み定理

この章では、たたみ込み定理 (convolution theorem) を紹介する。

$$f * K(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t')K(t-t')dt' \quad (\text{A.6})$$

で定義される計算が関数  $f(t)$  とたたみ込み核  $K(t)$  (convolution kernel) のたたみ込み (convolution) と呼ばれる操作である。たたみ込みの物理的内容の理解を助けるために図 A.2 に示したような核を例として考える。関数  $f(t)$  は、時刻  $t$  に学習している内容を表すものとしよう。たたみ込みの結果は現在の学力を表すと考えることができる。カーネルの値がゼロである  $t' > t$  からの寄与はない。これは現在の学力は、今より以前に学習した事柄の蓄積から成り立っている事を表している。因果律 (Causality) を満たしたカーネルは必ずこの条件を満たさなければならない。過去  $t'$  に学んだ内容は割合  $K(t-t')$  で現在の学力に反映される。過去から現在までに学習した事柄が核で表わされる割合で積み重なって現在の学力を形作っているの

ある。一度学んだ事は二度と忘れないという人の核は、過去に向かって常に1をとるものである。デルタ関数的カーネルの場合、現在学習していることがそのまま現在の学力とイコールである。非常に分かり易いが以前に学んだ事は一切蓄積になっていないという点で学習者としては少々問題である。

たたみ込み定理は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t')K(t-t')dt' = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{K}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \quad (\text{A.7})$$

と書き表される。この定理は、関数と核のそれぞれのフーリエ積分表示をたたみ込みの式に代入することで簡単に証明することができる。

#### A.4 ウィナー・ヒンチンの定理及びパーシバルの公式

ウィナー・ヒンチン (Wiener-Khintchine) の定理は以下のものである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t')f(t'+t)dt' = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{A.8})$$

ここで  $f(t)$  は任意の実関数である。左辺は  $t$  だけ時間がずれた自分自身との相関の時間平均であり、自己相関と呼ばれる。自己相関は、ある時刻の自分とそれから時間  $t$  後の自分に一定の関係があるときのみ有限の値を持つ。このようなとき現在の自分と時間  $t$  後の自分には相関があるという。右辺は、関数  $f(t)$  のスペクトルのフーリエ変換である。したがってこの定理は、自己相関はスペクトルのフーリエ積分に等しいということを言っている。この定理から色々な時間間隔  $t$  について自己相関を測定し、それをフーリエ逆変換してやれば、スペクトルが求まることが分かる。これを利用して光のスペクトルを測定する装置がフーリエ分光器であり、広帯域遠赤外分光装置として現在も広く用いられている。

以下の公式は、パーシバル (Parseval) の公式と呼ばれる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')^2 dt' = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{A.9})$$

Wiener-Khintchine の公式で  $t = 0$  とした特殊な場合と解釈することもできる。関数  $f(t)$  は、異なる時間  $t$  を異なる軸と捉えることで、 $t$  が  $-\infty$  から

$+\infty$  までの範囲で連続で無限の値を取ることから、連続無限次元空間のベクトルと捉える事ができる。このような空間をヒルベルト空間と呼ぶ。同様に関数  $\hat{f}(\omega)$  は、角周波数  $\omega$  の値で指定される軸で張られる連続無限次元空間で定義されたベクトルと捉える事ができる。したがって、フーリエ変換は、 $t$  で特徴付けられる座標系から  $\omega$  で特徴付けられる座標系への座標変換である。パーシバルの公式は、フーリエ変換前後での関数のノルム（ベクトルの大きさに対応）の変換則を与えるものである。パーシバルの公式 (A.9) は、この教科書で採用したフーリエ変換では、変換前後で基底の直交性は保たれるが、関数のノルムが  $1/\sqrt{2\pi}$  倍スケールすることを示している。フーリエ変換前後で関数のノルムが保存するようにフーリエ変換を以下のように定義することでフーリエ変換後の基底を正規直交基底に取るやり方もある。

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

この時逆変換は次のようになり

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

パーシバルの公式は以下のように変換前後でのノルムの保存を表す式となる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')^2 dt' = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

この教科書で採用したフーリエ変換の定義のメリットは、変数を角周波数  $\omega$  から周波数  $\nu$  に変換するとフーリエ変換および逆変換が以下のように

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{2\pi i \nu t} dt \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu \end{aligned}$$

のように余分な係数が無くなり対象な形に書けることである。ここで

$$\hat{f}(\nu) = 2\pi \hat{f}(\omega)$$

である。

## A.5 観測の不確定性原理

フーリエ係数  $\hat{E}(\omega)$  を実際の観測から求める操作について考える。当然のことながら人が測定可能な時間は有限な時間間隔に限られる。分かり易い例として  $-T_0/2 < t < T_0/2$  の間のみ  $E(t)$  の測定が行われた場合を考える。この時間外では測定結果がないので  $E(t) = 0$  としなければならない。観測を行った期間でのみフーリエ変換を行った結果を  $\hat{E}_{T_0}(\omega)$  と定義する。

$$\hat{E}_{T_0}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt E(t) e^{i\omega t}$$

これは、次のような表記もできる。

$$\hat{E}_{T_0}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt W(t) E(t) e^{i\omega t}$$

ここで

$$\begin{aligned} W(t) &= 1 \quad \text{for} \quad -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ &= 0 \quad \text{otherwise} \end{aligned}$$

は、窓関数 (window function) と呼ばれる関数の一種で上記の場合はトップハット型窓関数 (top-hat window function) と呼ばれる。窓関数を使った表記を良くみるとたたみ込み定理を用いることが出来ることが分かる。ただし、 $t$  と  $\omega$  の関係が入れ替わっている。そこでたたみ込み定理を  $dt/2\pi \rightarrow d\omega$  の対応関係に注意して用いると

$$\begin{aligned} \hat{E}_{T_0}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hat{E}(\omega') \hat{W}(\omega - \omega') \\ \hat{W}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{i\omega t} dt = \frac{T_0}{2\pi} \frac{1}{(\frac{\omega T_0}{2})} \sin \frac{\omega T_0}{2} \end{aligned}$$

が得られる。積分の中に現れる窓関数のフーリエ係数  $\hat{W}(\omega - \omega')$  は  $\omega' = \omega$  でピークを持ちその廻りに  $\Delta\omega \sim 2\pi/T_0$  程度の広がりを持った関数である。 $\hat{E}_{T_0}$  は、真のフーリエ係数  $\hat{E}$  とこの関数のたたみ込みであるから、真のフーリエ係数に比べてなまされ

$$\Delta\omega \sim \frac{2\pi}{T_0}$$

程度の周波数分布の不定性が現れる。上記の計算過程から明らかなように観測時間  $T_0$  に得た情報を全て足しあげてスペクトルを得ている。したがって、観測時刻は  $\Delta t \sim T_0$  程度不定である。以上から周波数の不定性と観測時刻の不定性を掛け合わせると以下の関係が得られる。

$$\Delta\omega\Delta t \sim 2\pi$$

ここまで述べた周波数分布及び観測時刻の不確定さは原理的なものであり、人為的に導入される測定誤差等により観測量の不確定さはこれらより必ず大きくなる。したがって、観測時刻の不確定さと周波数分布の不確定さには、

$$\Delta\omega\Delta t \geq 2\pi \quad (\text{A.10})$$

なる関係が必ず存在することになる。これを**観測の不確定性原理**と呼ぶ。ここでは時間と周波数の場合を例にとったが、空間の位置と波数の関係でも同様のことが導ける。3次元空間の場合、各位置座標と波数成分の間に独立な3つの不確定性関係が成り立つ。導出過程を振り返れば明らかなように、これは波の性質から導かれたものである。波の重ね合わせで表される現象には必ずこの不確定性原理が現れる。上記不確定性関係の式に  $\hbar$  を掛ければそのまま量子力学の基本原則であるハイゼンベルグ (Heisenberg) の不確定性原理である。量子力学の本質が、全ての物質が粒子性ととともに波動性を持つことであるということとハイゼンベルグの不確定性原理が密接に関連していることが理解できるであろう。

以下、観測の不確定性原理を波の重ね合わせを使って物理的に説明する。 $E(t) = \cos\omega_0 t$  の波が  $-\Delta t/2 < t < \Delta t/2$  の間のみ存在する場合を例として考える。ただし、 $2\pi/\Delta t \ll \omega_0$  とし、 $\omega > 0$  の領域のみ考える。フーリエ係数は、

$$\hat{E}(\omega) \sim \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{\Delta t}{2}}{\omega - \omega_0}$$

この結果から周波数分布は  $\omega = \omega_0$  を中心とした  $\Delta\omega = 2\pi/\Delta t$  程度の広が

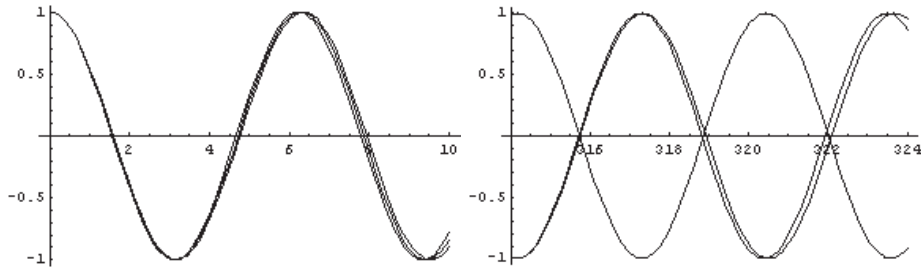


図 A.3  $\omega = 1, \omega = 1.01, \omega = 0.99$  の正弦波の比較。左図に示したように  $t = 0$  近辺では三つの波の位相は殆ど揃っており合成波はあたかも単色波のように振舞う。しかし、 $t = 2\pi/\Delta\omega = \pi$  経過すると右図に示したように三つの波の位相が  $0 \sim 2\pi$  の間にばらけてしまい、周波数が異なることが顕著に現れる。

りを持っていることが分かる。波が存在している間は  $\omega = \omega_0$  の単色の波のみだがフーリエ係数を見ると  $\omega \neq \omega_0$  の様々な周波数の波が存在しているのは何故だろうか。この理由を考察する為に、周波数分布が  $\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega < \omega < \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega$  の範囲でのみある一定値を取るトップハット型に分布している場合を考える。この方が考え易い。 $\Delta\omega \ll \omega_0$  かつ初期位相が全ての周波数でゼロであれば、 $t = 0$  の周辺では全ての波の位相が殆どそろって見かけ上  $\omega = \omega_0$  の単色波のように振舞う。時間が経つと徐々に周波数の違いによる位相の差が現れる。お互いが打ち消しあい重ね合わせた結果の振幅がゼロになるのは、全ての周波数の波の位相差が  $0$  から  $2\pi$  の範囲に分布した時である。そこで丁度  $t = \Delta t/2$  で最も周波数の大きな波と小さな波の位相差が  $2\pi$  になったとする。すると

$$\begin{aligned} (\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega)\Delta t/2 - (\omega_0 - \frac{1}{2}\Delta\omega)\Delta t/2 &= 2\pi \\ \Delta\omega\Delta t &= 4\pi \end{aligned}$$

を得る。この結果は、 $\Delta t \sim 4\pi/\Delta\omega$  程度が波の継続時間であり、それ以降は含まれる波がお互い打ち消しあい振幅が減少してしまうことを示している。言い方を変えると  $t = 0$  の近辺では、全ての含まれる波の位相差が無視しえる程小さいので重ね合わせで出来た波があたかも単色のように振舞う。し

かし、時間が立つと微妙な位相差が目立ち始め  $t \sim 2\pi/\Delta\omega$  後には、位相差が  $0 \sim 2\pi$  の間に一様に分布してしまい、互いに打ち消しあって重ね合わせた波の振幅がゼロになってしまうのである。厳密には、この場合  $t = \Delta t/2$  で丁度全ての波が打ち消し合い振幅がゼロになるが、それ以降は重ね合わせた結果の波の振幅が再び有限となる。重ね合わせで得られる波の時間変化の様子はシンク関数となる。  $E(t) = \cos\omega_0 t$  の波が  $-\Delta t/2 < t < \Delta t/2$  の間のみ存在する場合は、ここでの例の時間と周波数の関係を逆にしたケースと考えればよい。

## A.6 Heisenberg の不確定原理と物質の二重性

波の周波数の広がり = 不確定性と測定時間間隔 = 到達時刻の不確定性の間に式 (A.10) で示された関係があることを示した。式 (A.10) で示される不確定性関係は、波の重ね合わせで表される現象すべてに付随した波に本質的な基本的性質である。量子論によるとエネルギー  $E$  を持った物質は、

$$E = \hbar\omega = E, \quad (\text{A.11})$$

で定義される角振動数  $\omega$  を持った波の性質を持ち、波の粒子の二重性を持っている。したがって、全ての物質は波の性質である観測の不確定性関係 (A.10) を伴っていることになる。そこで式 (A.10) に  $\hbar$  を掛けると

$$\delta E \Delta t \geq \hbar, \quad (\text{A.12})$$

を得る。これは粒子のエネルギーと時間の間 Heisenberg の不確定性関係である。この関係式は、全ての物質（粒子）が波の性質を伴うという関係式 (A.11) と波の性質である観測の不確定性関係 (A.10) を一つの式で表現した関係式であることが理解できる。





## 付録 B

## 光の回折

図 B.1 に光の回折の様子を示しました。図の中央の青色で示した壁に、間隔  $D$  の隙間が開いています。紙面に垂直方向に同じ構造が続いていることを想定しています。つまり壁に巾  $D$  のスリット状に隙間が開いている事になります。そこでこの壁を単に巾  $D$  のスリットと呼ぶ事にします。

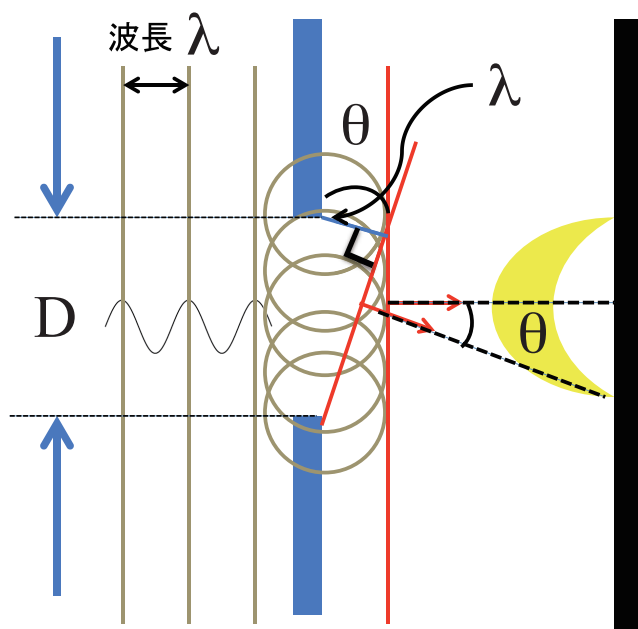


図 B.1 光の回折の解説

図では、このスリットに左から波長  $\lambda$  の平面波がスリットに垂直に入射する場合を考えています。即ち、波の進行方向がスリットと垂直で、波面はスリットの壁と平行です。スリットを抜けた後の波の伝わり方は次のように考えることが出来ます。スリットの出口の各点が新たな波源となり、そこから同心円状に光が放射されると考えます。この光を二次波と呼びます。二次波の波面を半径  $\lambda$  の同心円で図 B.1 に示しています。スリット通過後の光の伝わり方は、各点の二次波の重ね合わせで決まります。図の右端にある黒い壁は、スクリーンで、スリット通過後の光を当てて観察するためのものです。スリットと垂直方向即ちスリットに入射する前の光と同じ進行方向では、全ての二次波の山が重ね合わさるので強め合って明るくなります。図に示したように、スクリーン上でこの光が到達する部分が一番明るくなります。

この方向から図 B.1 に示したように角度  $\theta$  (シータと読む。これもギリシャ文字の一つ。) 傾いた方向に伝わる光について考えてみます。波面は進行方向に垂直なので、図のようにスリットに対して角度  $\theta$  傾きます。図 B.1 でスリットの一番上を通過した光の二次波は、この波面上で山の部分に対応します。また、スリットの一番下を通過した光の二次波の山の部分にも対応します。一方、これらの間の部分を通過した光の二次波には、山から山の間全ての振幅が含まれる事になります。一波長に渡って振幅を平均することになり節 1 で説明したように、重ね合わせた結果の振幅はゼロとなります。この結果、スクリーンに現れる光の強度は、この方向で真っ暗、即ちゼロでなります。図からスリット通過後の光の強度がゼロとなる進行方向  $\theta$  とスリット巾  $D$ 、光の波長  $\lambda$  の間に次の関係があることが分かります。ここで  $\theta$  は十分小さい角度とします。

$$D\theta = \lambda \quad (\text{B.1})$$

したがって、スリット通過後の光は、回折現象によりスリット入射前の光の進行方向以外にも広がって進む事になりますが、次の式で示す方向で強度がゼロとなります。

$$\theta = \frac{\lambda}{D} \quad (\text{B.2})$$

この関係式から次のことが分かります。スリットの中が広がると ( $D$  が大きくなると) スリット通過後の光の広がりが小さくなります。逆に中が狭くなると通過後の光の広がりが大きくなります。また、同じ巾のスリットを通過しても光の波長が長くなると通過後の光の広がりが大きくなります。

地球に届いた光を望遠鏡で観測することを考えてみます。望遠鏡の直径を口径と呼びます。口径  $D$  の望遠鏡を観測したい天体に向けることは、図 B.1 を直径  $D$  の円形状の穴の開いたスリットに置き換えてスリット面を目標天体から来る光の波面に平行に揃える事に対応します。このスリットを通過した光だけを目やカメラに集めて観測をするわけです。図 B.2 に巾  $D$  の縦長のスリットに平面波が入射した時、スリットをすり抜けて回折した光の強度の角度分布を示しました。スリット入射前の光の進行方向と同じ方向 ( $\theta = 0$  の方向) で明るさが最大になるのは、期待通りかと思えます。特徴的なのは、星像が  $\lambda/D$  程度にじんできている点です。この例では、天体は、大きさが無視出来るくらい小さい理想的な場合を想定しているので、星像は  $\theta = 0$  近辺の究めて狭い領域にのみ出来なければなりません。しかし、実際はどんなに小さい天体を観測しても、望遠鏡の口径と観測波長で制限される  $\lambda/D$  に星像が広がってしまうのです。逆に  $\lambda/D$  より小さな大きさを持った天体の広がり、この観測装置では見極める事が出来ない (専門用語で分解することが出来ないと言います) のです。別の例で説明すると、二つの天体の空の上での間隔  $\Delta\theta$  が  $\lambda/D$  より狭い場合は、二つの天体として分離して識別する事が出来ず、一つの光源として重ね合わさった情報しか得る事ができないのです。星像が広がってしまうのは、回折現象によるものなので、このようにして決まる観測装置の解像度の限界を回折限界と呼びます。より細かい構造が観測したければ、より口径の大きな望遠鏡を作る必要があるわけです。

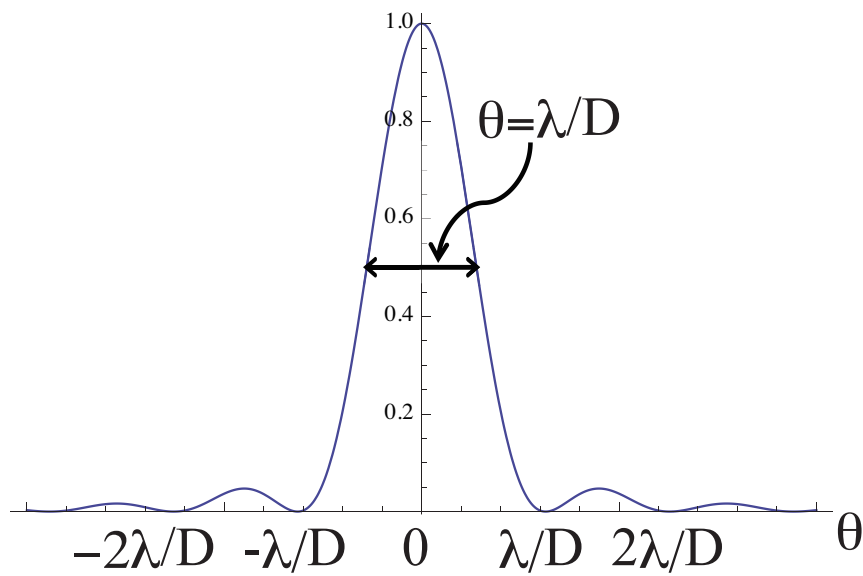


図 B.2 巾  $D$  の縦長のスリットに垂直に入射した波長  $\lambda$  の平面波が作る回折像の明るさの分布。縦軸は、最大強度を 1 とした時の回折像の強度を示す。横軸は、スリット通過後の光の進行方向が入射光の進行方向からどれだけ傾いているかを表す角度  $\theta$ 。

## 付録 C

# An example of the Legendre transformation led paradigm shift

The spontaneous symmetry break down is the physical description of the phase transition of macroscopic systems. In this chapter, fundamentals of the SSB are introduced by using simplified model of ferromagnetic phase transition.

### C.1 Ferromagnetic phase transition

First, the fundamentals of thermal statistical mechanics are summarized. Suppose each ion takes quantum states with energy  $E_i$ . The partition function of the system per one ion is described as

$$Q = \sum_i e^{-E_i/k_B T}, \quad (\text{C.1})$$

where  $T$  is the temperature of the system. The Helmholtz free energy is defined by

$$F = -k_B T \log Q. \quad (\text{C.2})$$

The probability of finding the ion at energy level of  $E_i$  when the system is in thermal equilibrium, is given by

$$P_i = \frac{e^{-E_i/k_B T}}{Q}. \quad (\text{C.3})$$

The entropy is defined as

$$S = -k_B \sum_i P_i \log P_i. \quad (\text{C.4})$$

The derivative of the Helmholtz free energy by temperature with constant volume is given as

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V &= k_B \left[ \log Q + T \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial T} \right] \\ &= k_B \left[ \log Q + \sum_i \frac{E_i}{k_B T} \frac{e^{-E_i/k_B T}}{Q} \right] \\ &= k_B \left[ \sum_i \frac{e^{-E_i/k_B T}}{Q} \log Q + \sum_i \frac{E_i}{k_B T} \frac{e^{-E_i/k_B T}}{Q} \right] \\ &= k_B \sum_i \left[ P_i \left( \log Q + \frac{E_i}{k_B T} \right) \right] \\ &= -k_B \sum_i P_i \log P_i \\ &= S. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

It provides the equation which gives the entropy from the temperature derivative of the Helmholtz free energy.

Consider the macroscopic system composed by a large number of ions with magnetic moment of  $\vec{\mu}$ . When external magnetic field of  $\vec{B}$  is applied, the energy due to the interaction between the field and the magnetic moment is described by

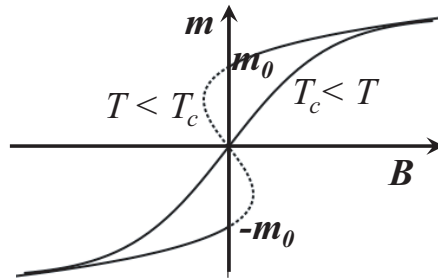
$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (\text{C.6})$$

In the following discussion, we assume that direction of  $\vec{\mu}$  takes only parallel to  $\vec{B}$ ,  $\mu$ , or antiparallel to  $\vec{B}$ ,  $-\mu$ , for simplicity. Therefore, the energy level taken by each ion are two level of  $E_1 = -\mu B$  and  $E = \mu B$ . The average value of the magnetic moment of per one ion,  $m$ , is deduced from the Helmholtz free

energy as

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial F}{\partial B} &= \sum_i \mu_i \frac{1}{Q} e^{-E_i/k_B T} = \sum_i \mu_i P_i \\
 &= \langle \mu \rangle = m = \mu \tanh\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right). \quad (C.7)
 \end{aligned}$$

The magnetic moment of the ferromagnetic system as a function of the applied magnetic field strength is shown in figure C.1. The magnetic moment of



☒ C.1 The magnetic moment of the magnetized system as a function of the applied magnetic field.

the ferromagnetic system in high temperature limit is described by the curve assigned by  $T > T_c$  in fig.C.1 which is approximately described by the average magnetic moment of eq.(C.7). However, as decreasing temperature, the deviation of the average magnetic moment of the system from eq. (C.7) becomes significant. When the temperature of the system becomes below  $T_c$ ,  $m$  vs  $B$  curve shows two distinct diagnostics. The magnetic moment takes a finite value without applied magnetic field. In other word, the system retains a permanent magnetism. This characteristics that the system takes a finite value of the magnetic moment without applied field when  $T < T_c$  is the ferromagnetic phase transition. The values of the magnetic moment becomes discontinuous across  $B = 0$ . When the magnetic field strength is adiabatically decreased from the positive field strength,  $m$  takes  $m_0$  at  $B = 0$ . On the other hand, when the initial field strength is negative,  $m$  takes  $-m_0$  at  $B = 0$ . It is clear from the

above discussion that  $T_c$  is the critical temperature of the phase transition.

The physical interpretation proposed by Landau to this phenomena is as follows. Introduce Gibbs free energy from Helmholtz free energy by the following Legendre transformation.

$$G = F + BM. \quad (\text{C.8})$$

This transformation transforms the function of magnetic field strength to the function of the magnetic moment. Then, we obtain

$$\begin{aligned} dG &= \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_V dT + \frac{\partial G}{\partial M} dM \\ &= dF + dB M + B dM = \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V dT + \frac{\partial F}{\partial B} dB + dB M + B dM \\ &= -S dT - M dB + dB M + B dM = -S dT + B dM. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

and

$$\left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_V = -S, \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial G}{\partial M} = B. \quad (\text{C.11})$$

Landau proposed that the Gibbs free energy of the ferromagnetic system when  $B = 0$  is approximated by following formula at around  $m_0$ .

$$\begin{aligned} G &= a(T)m^2 + \frac{b}{2}m^4, \quad (\text{C.12}) \\ a(T) &= a(T - T_c), \end{aligned}$$

where  $a$  and  $b$  are constants. When  $T > T_c$ ,  $a(T)$  takes positive value. Therefore,  $G$  has only one minimum at  $m = 0$ . This means that at high temperature direction of magnetic moment of each ion is randomized due to thermal fluctuation. On the other hand, when  $T < T_c$ ,  $a(T)$  takes negative value. Then,  $G$  takes following two minimum at

$$m = \pm m_0 = \pm \sqrt{-\frac{a(T)}{b}}. \quad (\text{C.13})$$

Physical process of this transition is as follows. Due to interaction between



magnetic moment of each ion, magnetic moment of each ion tends to align. In high temperature, thermal fluctuation overcomes this interaction and the direction of the magnetic moment becomes random. Below  $T_c$ , the interaction between magnetic moment of each ion overcomes the randomization effect due to thermal fluctuation. In the region where number of ions with positive magnetic moment is dominant by accident, magnetic moment of majority of ions are aligned to have positive value. As a result, the expectation value of the magnetic moment in the region takes  $+m_0$ . Contrary in the region where number of ions with negative magnetic moment is dominant by accident, magnetic moment of majority of ions are aligned to have negative value. As are result, the expectation value of the magnetic moment in the region takes  $-m_0$ . From eq.(C.11), we obtain

$$B = 2(a(T)m + bm^3). \quad (\text{C.14})$$

This equation represents characteristics of the curve for  $T < T_c$  in fig.C.1 including the curve shown by dotted line well. So we can say that Landau rotated fig.C.1 90 degree and interchange vertical and horizontal axes.

The phenomena described in above paragraph is interpreted as the phase transition of the ground state. Above  $T_c$ , the ground state with zero ground state average of the magnetic moment is stable. However below  $T_c$ , the ground state which has a finite value of the ground state average of the magnetic moment becomes stable. Therefore, the ground state transition happens across  $T_c$ . In the above model, the ground state average of the magnetic moment is the key parameter which characterize the phase transition and is the order parameter of the ferromagnetic phase transition. Below  $T_c$ ,  $m$  takes finite value and the magnetic moment of each ion is ordered in one specific direction. Above  $T_c$ , the magnetic moment of each ion is disordered. Since there is no preferred direction in the system above  $T_c$ , symmetry of the system against up and down coordinate direction change transformation is kept. On the other hand, below  $T_c$ , the magnetic moment directs up or down direction. Therefore, the

symmetry of the system against the up and down coordinate direction change transformation is broken. Because of these reason, the phenomena is called spontaneous symmetry break down. This is the example of the Goldstone's theorem discussed in sec.???. It is self evident that the ground state is degenerate. In this example, there are two ground states, one takes  $+m_0$  and the other takes  $-m_0$ . The difference of the free energy at  $m = m_0$  and  $m = 0$  when  $T < T_c$  is the latent heat. The scale of the region where takes the same value of  $m$  below  $T_c$  is the coherent length. Within the coherent length,  $m$  takes the same value. However, beyond the coherent length,  $m$  does not have to take the same value. When the  $m$  takes the different value in the nested but beyond the coherent length, at the boundary of these regions  $m$  transits from  $m_0$  to  $-m_0$  gradually across  $m = 0$ . In this boundary region, the free energy is larger than minimum value of the free energy. This transition region is called topological defect.

## 付録 D

# Boltzmann Equation

ここでは、位相空間を位置座標と運動量で張られる空間とする。粒子の集合である粒子系の状態とその進化を解明することは、位相空間中の粒子系の振る舞いを明らかにすることとすることができる。そのために位置  $q \sim q + dq$ 、運動量  $p \sim p + dp$  の微小位相体積内にある粒子数  $\Delta N(q, p)$  を

$$\Delta N(q, p) = f(q, p, t) dq dp, \quad (\text{D.1})$$

で与える関数  $f(q, p, t)$  を導入する。この関数を分布関数と呼ぶ。粒子の運動が Hamilton の運動方程式で記述される場合を考える。この時、粒子の位置座標と運動量は連続的に進化する。Liouville の定理からある時刻に位置  $q \sim q + dq$ 、運動量  $p \sim p + dp$  の微小位相体積内にあった粒子全てを囲い込むことができる連続的な微小位相体積を常に定義できる。この微小体積内から抜け出す粒子が存在しないだけでなく、新たに参入する粒子も存在しない。即ちこの微小位相体積内の粒子の位相空間中の軌跡に沿って含まれる粒子数  $dN$  が保存する。これを方程式で表すと

$$\frac{d\Delta N}{dt} = \frac{d}{dt}(f(q, p) dq dp) = \frac{df(q, p)}{dt} dq dp = 0, \quad (\text{D.2})$$

である。最後の変形では Liouville の定理を用いた。これから以下の  $f$  が満たす方程式が得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dq}{dt} \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{dp}{dt} \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \quad (\text{D.3})$$

ここで  $q, p$  は、Hamilton の運動方程式の解として得られたものを用いる。この方程式は無衝突 Boltzmann 方程式と呼ばれる方程式であり、位相空間中の粒子系の進化を記述する方程式である。粒子同士の衝突が起きる粒子の運動量の向きが変わり、位相空間中の粒子の位置にジャンプが起こり連続ではなくなる。衝突現象は微分方程式である Hamilton の運動方程式では追えない。Hamilton の運動方程式に従うと言う前提は、粒子間の衝突を無視するということと等価である。粒子間の衝突や、粒子の生成・消滅が起きる場合は、式 (D.3) の右辺をそれらを取り込んだ項で置き換える。この項のことを衝突項と呼ぶ。衝突項がある場合を含めて分布関数の時間発展方程式を Boltzmann 方程式と呼ぶ。

## 付録 E

## 非圧縮性流体

ある流体の速度場が  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  が

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (\text{E.1})$$

を満たす時、流体は非圧縮性即ち流体要素の体積が不変で密度が変化しないことを解説する。まず時刻  $t$  から微小時間  $\Delta t$  後の時刻  $t + \Delta t$  への時間進化を

$$\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}(t + \delta t) = \vec{x}(t) + \vec{v}\Delta t, \quad (\text{E.2})$$

のような座標変換が行われたと捉えて説明する。時刻  $t$  の時に微小体積  $d^3x(t) = dx(t)dy(t)dz(t)$  で囲われた領域が時刻  $t + \Delta t$  との時  $d^3x(t + \Delta t) = dx(t + \Delta t)dy(t + \Delta t)dz(t + \Delta t)$  に変化したとするとこれらは以下の関係式で結ばれる。

$$d^3x(t) = \frac{\partial(x(t), y(t), z(t))}{\partial(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t))} d^3x(t + \Delta t). \quad (\text{E.3})$$

ここで右辺の係数はヤコビアンである。計算がし易いように以下のようなこの関係式の逆変換を扱う。

$$d^3x(t + \Delta t) = \frac{\partial(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t))}{\partial(x(t), y(t), z(t))} d^3x(t). \quad (\text{E.4})$$

この式のヤコビアンは、微小量の一時までで以下のように計算される。

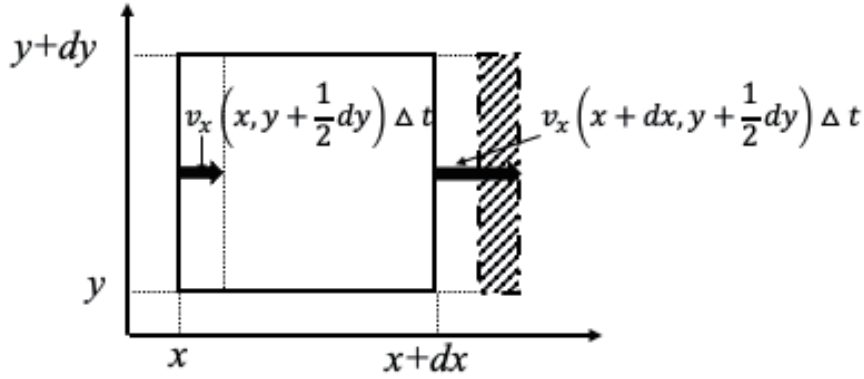


図 E.1 速度場の空間依存性による流体要素の体積変化。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t))}{\partial(x(t), y(t), z(t))} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x(t+\Delta t)}{\partial x(t)} & \frac{\partial x(t+\Delta t)}{\partial y(t)} & \frac{\partial x(t+\Delta t)}{\partial z(t)} \\ \frac{\partial y(t+\Delta t)}{\partial x(t)} & \frac{\partial y(t+\Delta t)}{\partial y(t)} & \frac{\partial y(t+\Delta t)}{\partial z(t)} \\ \frac{\partial z(t+\Delta t)}{\partial x(t)} & \frac{\partial z(t+\Delta t)}{\partial y(t)} & \frac{\partial z(t+\Delta t)}{\partial z(t)} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial v_x(t)}{\partial x(t)} \Delta t & \frac{\partial v_x(t)}{\partial y(t)} \Delta t & \frac{\partial v_x(t)}{\partial z(t)} \Delta t \\ \frac{\partial v_y(t)}{\partial x(t)} \Delta t & 1 + \frac{\partial v_y(t)}{\partial y(t)} \Delta t & \frac{\partial v_y(t)}{\partial z(t)} \Delta t \\ \frac{\partial v_z(t)}{\partial x(t)} \Delta t & \frac{\partial v_z(t)}{\partial y(t)} \Delta t & 1 + \frac{\partial v_z(t)}{\partial z(t)} \Delta t \end{vmatrix} \\
 &\sim 1 + \Delta t \left( \frac{\partial v_x(t)}{\partial x(t)} + \frac{\partial v_y(t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial v_z(t)}{\partial z(t)} \right) \\
 &= 1 + \operatorname{div} \vec{v}(t) \Delta t. \tag{E.5}
 \end{aligned}$$

三つ目の等号では、 $\Delta t$  の 2 次以上の微小量を落とし、微小量の一次まで残した。この結果から、速度場が条件 (E.1) を満たす時、流体要素の体積が不変であること即ち流体が非圧縮性流体であることが示される。

次に二次元系に限定して、視覚的に解説する。図 E.1 に時刻  $t$  の時、一辺が  $dx, dy$  の四角い境界で囲まれた領域の面積の微小時間  $\Delta t$  後の変化の様子を示した。今簡単のため流体は  $y$  方向の速度成分を持たないとした。左端と右端の境界の  $x$  方向の速度は、 $y$  に依存せず境界の中心の値で代表されるとする。左の境界は  $v_x(x, y + \frac{1}{2} dy) \Delta t$  だけ移動し、右の境界は  $v_x(x + dx, y + \frac{1}{2} dy) \Delta t$  だけ移動する。この結果、 $\Delta t$  後、領域の面積は、一点鎖線で囲まれ

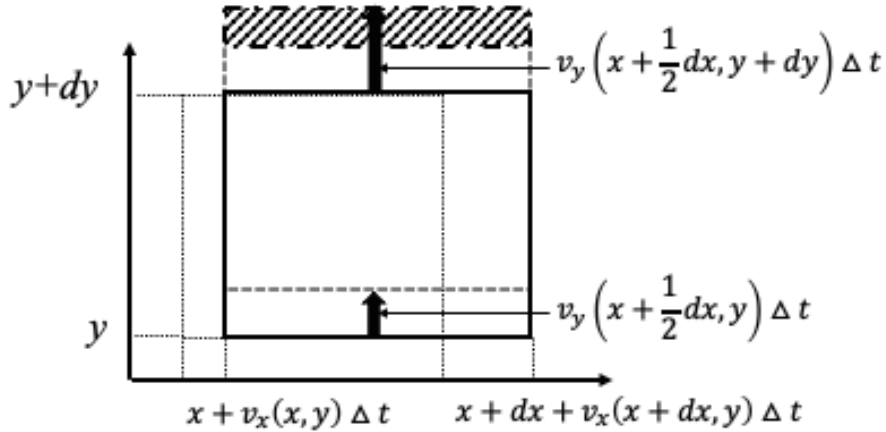


図 E.2 速度場の空間依存性による流体要素の体積変化 2。

た斜め線でハッチを掛けた領域の面積が増加する。面積の増加分は  $\Delta S_x$  は

$$\begin{aligned} \Delta S_x &= v_x \left( x + dx, y + \frac{1}{2} dy \right) \Delta t dy - v_x \left( x, y + \frac{1}{2} dy \right) \Delta t dy \\ &\sim \frac{\partial v_x(x, y)}{\partial x} \Delta t \times dx dy, \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

である。最後の統合では  $v_x$  を  $x$  についてテイラー展開して  $dx$  の一次まで残した。また  $v_x(x, y)$  が  $y$  に依存しないとしているので、 $v_x(x, y + \frac{1}{2} dy)$  を  $v_x(x, y)$  で置き換えた。

速度の  $y$  成分が存在するときは、下と上の境界の変化も同時起こり、左と右の領域の中心も  $y$  方向に移動する。これを同時に起きるのではなく、逐次的に起きると捉えても結果は変わらない。そこで、速度場の  $y$  成分の存在による領域の面積変化は、図 E.1 で考察した、領域の面積変化がおきた後に起きたとする。この時の変化の様子を図 E.2 に示した。領域の面積は、一点鎖線で囲まれた斜め線でハッチを掛けた領域の面積が増加する。面積の増加分は  $\Delta S_y$  は

$$\Delta S_y = \left[ v_y \left( x + \frac{1}{2} dx, y + dy \right) \Delta t - v_y \left( x + \frac{1}{2} dx, y \right) \Delta t \right] \times \left( dx + \frac{\partial v_x(x, y)}{\partial x} dx \Delta t \right)$$

$$\sim \frac{\partial v_y(x,y)}{\partial y} \Delta t \times dx dy, \quad (\text{E.7})$$

となる。ここで微小量  $\Delta t$  の二次以上の高次の微小量を落とした。ここでも  $v_y(x,y)$  が  $x$  に依存しないとした。要するに先ず  $x$  方向の速度場によって生じた面積変化量は微小量の高次の寄与しか与えないので、無視できるため、同時に起きた面積変化を逐次的に起きたと近似して構わなかったわけである。

以上結果から正味の面積変化量は以下のようなになる。

$$\Delta S = \Delta S_x + \Delta S_y = \text{div } \vec{v} \Delta t \times dx dy. \quad (\text{E.8})$$

条件式 (E.1) が満たされる時、確かに面積変化量がゼロ、即ち非圧縮性流体であることが証明できた。この例から分かるように、 $x$  方向の膨張したした分を  $y$  方向に圧縮されることで相殺して条件式 (E.1) が成り立っている。非圧縮性流体だからといって流体要素の形が変わらないわけではなく、体積を一定に保ちながら形が変形しうる。

式 (E.8) や式 (E.5) から分かるように  $\text{div } \vec{v}$  は、単位時間あたりの体積変化率を与える。これを速度場の発散と呼ぶ。

最後に  $v_x(x,y)$  が  $x$  に依存せず  $y$  のみに依存し、 $v_y(x,y)$  が  $y$  に依存せず  $x$  だけに依存する場合を解説する。図 E.3 に速度場の  $x$  成分のみが存在し、それが  $y$  にのみ依存し、 $x$  に依存しない場合を示した。時刻  $\Delta t$  後に実線の境界で囲われた領域が点線で囲われた領域に変化する。この時

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} > 0, \quad (\text{E.9})$$

である。図から分かるように領域は形が四角から平行四辺形に変形するだけで面積は変わらない。速度場が条件 (E.9) を満たす時、速度場に歪み（シア）が存在するという。シアは、形の変形にのみ寄与し、体積変化は引き起こさない。一般の流体の速度場、発散とシアの両方が重ね合わされた状態にある。



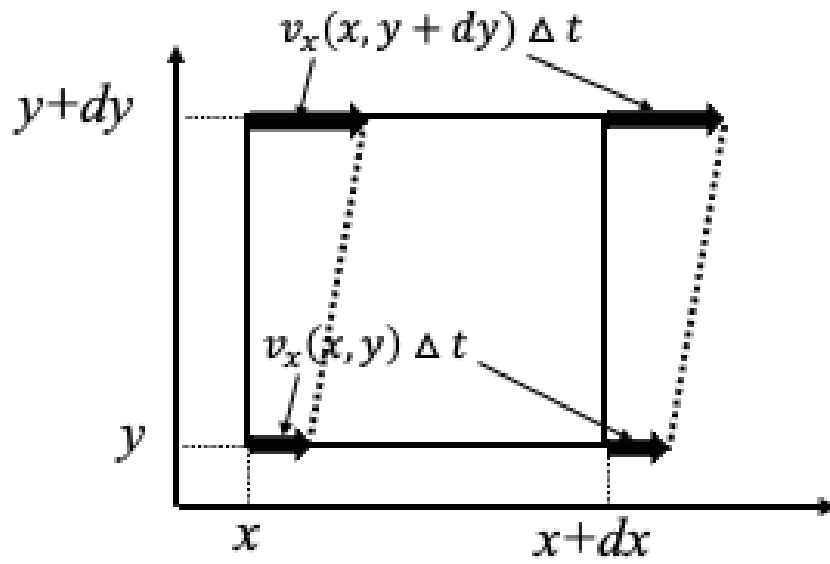


図 E.3 速度場の空間依存性による流体要素の体積変化 3。



## 付録 F

電磁場ポテンシャルの  
ゲージ変換自由度

電場磁場は、電磁場ポテンシャルを用いて式 (3.182)、(3.184) によって求められた。電磁場ポテンシャルは、得られる電場磁場が同一であれば良く、一意に決まらない。ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  に任意のスカラー関数  $\chi(\mathbf{x}, t)$  の勾配を加えて新たなベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}'$  を以下のように導入する。

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi. \quad (\text{F.1})$$

スカラー関数の勾配の回転は恒等的にゼロ即ち  $\nabla \times \nabla\chi \equiv 0$  であることから、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}'$  を用いて式 (3.182) から導出される磁場は、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  から導出される磁場と変わらない。このことは、ベクトルポテンシャルに任意のスカラー関数の勾配を加えても構わないという不定性が存在し、ある磁場を与えるベクトルポテンシャルは一意には決定できないことを示している。この時、電場が不変であるためには変換 (F.1) に伴ってスカラーポテンシャル  $\phi$  が  $\phi'$  に変換されなければならない。式 (3.184) に代入し変換後の電磁場ポテンシャルで電場を書き表すと以下のようになる。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\phi' - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\frac{\partial\chi}{\partial t}.$$

これが式 (3.184) と一致するためにはスカラーポテンシャルが以下のように変換されれば良いことが分かる。

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (\text{F.2})$$

電磁場ポテンシャルを任意のスカラー関数を用いて式 (F.1)、(F.2) のように変換することをゲージ変換と呼ぶ。即ち、同じ電場磁場を与えれば良いという条件のもとでは、電磁場ポテンシャルの取り方には、ゲージ変換の自由度の不定性が存在することになる。

電磁場中の荷電粒子のラグランジアンは、電磁場ポテンシャルを用いて、式 (3.188) のように与えられた。したがって、ゲージ変換により電磁場ポテンシャルが変換されると、ラグランジアンも  $L$  から  $L'$  に変換される。ゲージ変換後の電磁場ポテンシャルを用いたラグランジアン  $L'$  と元の電磁場ポテンシャルを用いて表したラグランジアンの差は以下のように

$$\begin{aligned} L' - L &= q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}' - q\phi' - (q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - q\phi) = q\mathbf{v} \cdot \nabla \chi + q \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ &= \frac{dq\chi}{dt}, \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

スカラー関数の粒子の軌道に沿った時間全微分となる。節 3.3.1 で解説したように、ラグランジアンにはスカラー関数の時間全微分を加えても得られる運動方程式が不変であるという不定性があった。式 (F.3) の結果は、このこととも整合した結果である。電磁場中を運動する荷電粒子の場合、ラグランジアンにスカラー関数の時間全微分を加える変換の一部は、電磁場ポテンシャルのゲージ変換に対応しているのである。