

観測的量子宇宙論：CMB 観測で探る宇宙の進化

服部 誠

2022 年 3 月 13 日

目次

第 1 章	スタンダードビッグバン宇宙論	1
1.1	フリードマン宇宙の基礎事項まとめ	1
1.2	宇宙の熱史	20
1.2.1	エントロピー	20
1.2.2	エントロピー・エネルギー密度	22
1.2.3	弱い相互作用の結合定数	25
1.2.4	ニュートリノ脱結合	28
1.2.5	電子・陽電子対消滅	29
1.2.6	軽元素合成・理論	32
1.2.7	軽元素合成・観測	50
1.2.8	宇宙再結合	55
1.2.9	Recombination lines	62
1.2.10	宇宙再電離	64
第 2 章	ダークマター	69
2.1	ニュートリノ	69
2.2	Cold Dark Matter: CDM	76
2.2.1	Weakly interacting massive particles (WIMPs)	78
2.2.2	Weakly interacting slim particles (WISPs)	84
2.3	Free streaming scale of the dark matters	84

第3章	インフレーション	93
3.1	準備	94
3.1.1	スカラー場の解析力学	94
3.1.2	場のネーターの定理	97
3.1.3	スカラー場のエネルギー・運動量テンソル	100
3.1.4	生成・消滅演算子、ハイゼンベルグの運動方程式	102
3.1.5	ハイゼンベルグの運動方程式	107
3.1.6	自由なスカラー場の量子化	108
3.1.7	Scalar, vector, tensor decomposition of perturbation	112
3.1.8	重力場の正準形式	115
3.1.9	テンソルモードのラグランジアン	122
3.1.10	重力波の量子化	125
3.2	プランク時間・プランクエネルギー・プランク質量	125
3.3	平坦性問題・地平線問題	128
3.4	インフレーション	129
3.5	Slow roll inflation	131
3.6	インフレーションによる膨張率	133
3.7	インフレーション期の揺らぎの生成	138
3.8	スカラー揺らぎ	139
3.8.1	フーリエスペクトル	139
3.8.2	Massless scalar field	141
3.8.3	Scalar field with non zero mass simplified treatment	148
3.8.4	Generation of random Gaussian field	149
3.8.5	Generation of Adiabatic perturbation via Inflation	151
3.8.6	スカラー揺らぎのパワースペクトル	153
3.9	テンソルモードの生成とパワースペクトル	157
3.10	ゲージ不変なスカラー摂動の発展方程式	158
3.10.1	Gauge transformation of scalar perturbations	159
3.10.2	Gauge invariant variables	165
3.10.3	良く扱われるゲージ	166

	3.10.4 佐々木ームハノフ変数の発展方程式	169
	3.10.5 Power spectrum of scalar perturbation	178
	3.10.6 スーパーホライズンスケールのスカラー摂動の進化	179
	3.10.7 CMB 観測との比較：スーパーホライズンスケール	185
	3.10.8 Late stage evolution of density contrast and CMB spectrum	193
第 4 章	スカラーモードの線形進化	197
4.1	Before recombination	197
4.1.1	発展方程式	197
4.1.2	Super-horizon scale	201
4.1.3	Through horizon crossing of large scale perturbation	202
付録 A	ネーターの定理・スカラー場のエネルギー・モーメンタム テンソル	205
A.1	質点の運動	205
A.1.1	オイラー・ラグランジュ方程式	205
A.1.2	正準形式	207
A.1.3	ネーターの定理	208
付録 B	輻射場の量子化	215
B.1	クーロンゲージ	215
B.2	輻射場のフーリエ積分表示	217
B.3	量子化された輻射場のエネルギー・運動量・角運動量 . . .	221
付録 C	偏光 E、B モードとその電子散乱による生成	225
付録 D	弱い相互作用	233
D.1	Dirac 方程式	234
D.2	負エネルギー粒子の Feynman の解釈とスカラー場の量子化	237
D.3	Dirac 方程式の平面波解	239
D.4	Dirac 場の量子化	246

D.5	ベータ崩壊を現象論的に記述するハミルトニアン	248
D.6	Dirac 方程式 Weyl 表示	250
D.7	自由粒子解	252
D.8	負エネルギー粒子の Feynman の解釈とスカラー場の量子化	257
D.9	Dirac 方程式の平面波解	259
D.10	Dirac 場の量子化	262
D.11	ベータ崩壊を現象論的に記述するハミルトニアン	264
付録 E	角運動量を持つ荷電粒子の磁気モーメント	265
付録 F	電磁場中の電子の運動を記述する正準形式	269
付録 G	パウリ行列・ガンマ行列	271
G.1	演算公式	271
G.2	変換則	277
付録 H	電磁場と相互作用する粒子の量子力学	305
H.1	古典電磁気学	305
H.2	スカラー粒子	306
H.3	スピン 1/2 粒子	308
付録 I	相転移	311
I.1	コヒーレント状態	312
I.2	スクイーズド状態	319
I.3	正準変換と母関数	322
I.4	ネーターの定理	332
I.5	ネーターの定理の量子場への拡張	334
I.6	基底状態の縮退	337
I.7	Goldstone の定理	339
I.8	超流動	346
I.9	超伝導	346
I.9.1	Fermi 縮退、Fermi 基底状態	349

I.9.2	南部表示	351
I.9.3	BCS 基底状態の性質	362
I.9.4	励起	369
I.9.5	エネルギーギャップ方程式	373
I.9.6	Ginzburg-Landau 理論	376
I.9.7	The Abelian Higgs model	384
I.9.8	Bogoluibov 変換の母関数	384
I.10	漸近場近似	385
I.11	Green 関数	387
付録 J	Mattis-Bardeen Theory	391
J.1	電子の不純物による散乱	391
J.2	Dipole 近似	393
J.3	高周波電磁波と金属中の電子系の相互作用	394
J.3.1	温度ゼロ	394
J.3.2	有限温度	404
付録 K	Spontaneous Symmetry Break down(SSB)	433
K.1	Ferromagnetic phase transition	433
付録 L	Gauge Theory	439
L.1	Introductory review of expressions of a free particle dynamics	439
L.2	The Noether's theorem of the field	440
L.3	Gauge Invariance	450
L.3.1	Electrodynamics	450
付録 M	Wick theorem	455
M.1	Wick の定理	455

第 1 章

スタンダードビッグバン 宇宙論

1.1 フリードマン宇宙の基礎事項まとめ

宇宙の熱史を学ぶために必要なフリードマン宇宙の基礎事項をまとめる。
ロバートソンウォーカー計量は以下のように与えられる。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (1.1)$$

現在のスケール因子を $1(a_0 = 1)$ と規格化すると、曲率は

$$K = \left(\frac{H_0}{c} \right)^2 (\Omega_0 - 1), \quad (1.2)$$

で与えられる。ここで Ω_0 は現在の宇宙の密度パラメータである。導出は、後で述べる。ここで

$$H_0 = 100h \text{ km/s/Mpc}. \quad (1.3)$$

は現在のハッブル定数であり、PLANCK 衛星から得られた測定結果は

$$H_0 = 67.15 \pm 1.5 \text{ km/s/Mpc}. \quad (1.4)$$

である。以下では

$$h_{0.67} = \frac{H_0}{67\text{km/s/Mpc}}, \quad (1.5)$$

を用いて値 (1.4) からのズレを表現する。また、 Ω_0 は現在の宇宙の密度パラメータであり、

$$\Omega_0 = \frac{\rho}{\rho_{cr}}, \quad (1.6)$$

で臨界密度

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 8.44h_{0.67}^2 \times 10^{-30}\text{g/cm}^3. \quad (1.7)$$

と現在の宇宙の全物質の平均密度との比で定義される。ロバートソン・ウオーカー計量に現れる $r, d\Omega$ は共動座標と呼ばれる座標で宇宙の番地のようなもので宇宙膨張により変化しない座標である。例えば、宇宙を膨張する球面とすると例えば経度・緯度が共動座標に対応する。地球の半径が増大しても大陸移動が起こらない限り各都市の経度・緯度は変わらない。ハッブル定数 H は以下のように定義される。

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.8)$$

現在の宇宙の曲率半径を R_0 、共動座標で測った観測者からある天体までの距離を χ とすると、物理的な距離は $d = a(t)R_0\chi$ となり、宇宙年齢と共に変化する。この天体の後退速度は以下のようにハッブル定数を用いて表せる。

$$v = \dot{d} = \frac{\dot{a}}{a}R_0\chi = Hd. \quad (1.9)$$

これは天体がその距離に比例した後退速度を持つというハッブルの法則に他ならない。

ロバートソン・ウオーカー計量の幾何学的構造の理解を深めるため3次元空間に埋め込まれた2次元球面の性質を説明する。図 1.1 に半径 R の球面の一部を示した。この球面上に我々が住みついているとしよう。3次元空間に埋め込まれた2次元球面が、球面上に特別な点が存在せず一様等方な空間であることは自明であろう。球面は曲率を持っており曲がった空間である。曲がった空間上では、ユークリッド空間で慣れ親しんだ幾何学が

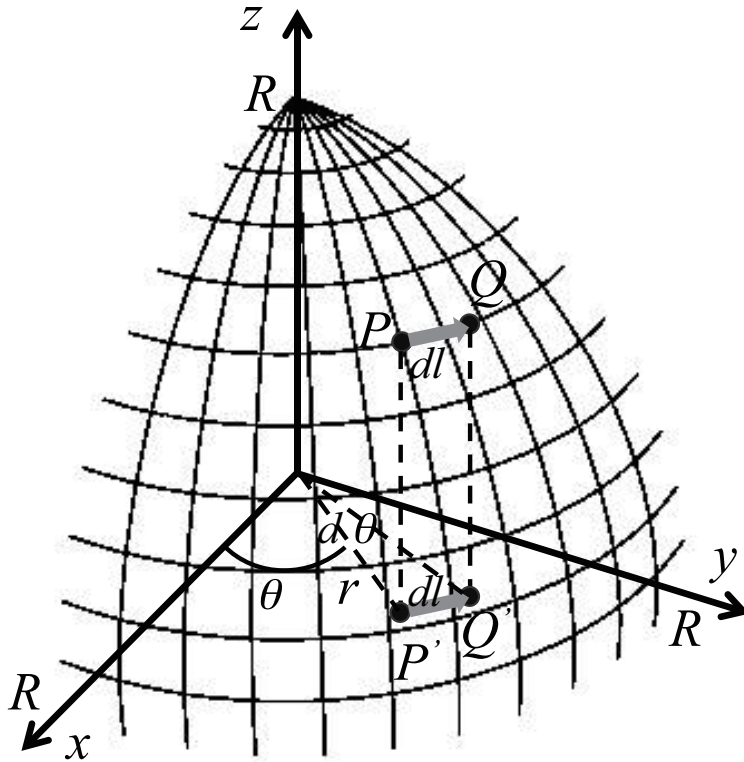


図 1.1 2次元球面。

使えず色々不便である。そこで球面上の点を xy 平面に射影し、球面上の点 $P(x,y,z)$ を xy 平面内の極座標 (r,θ) で表す。 (r,θ) は平面内で定義されているのでこれらに対してはユークリッド幾何学が適応出来る。 (r,θ) は以下のように定義される。

$$x = r \cos \theta, \quad (1.10)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (1.11)$$

$$z = \sqrt{R^2 - r^2}, \quad (1.12)$$

点 P から微小距離 dl 離れた球面上の点 $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$ を考える。 dx, dy, dz は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta = \sin \theta dr + \cos \theta d\theta, \\ dz &= \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr. \end{aligned} \quad (1.13)$$

これらを用いると PQ 間の微小線素の長さは極座標を用いて以下のように書ける。

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}} dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (1.14)$$

r の取る範囲は $0 \leq r \leq R$ である。 θ は、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ である。球面の上半分だけを扱う事にする。図 1.1 では、点 Q は点 P から経度に沿って角度 $d\theta$ 移動した点とした。したがって、 $dr = 0$ なので式 (1.14) から

$$dl = rd\theta, \quad (1.15)$$

である。図からも dl は P'Q' 間の距離に等しく、これは xy 平面内でユークリッド幾何を使えば動径掛ける角度即ち $rd\theta$ であることが納得出来る。

北極にいる観測者つまり共動座標の原点 ($r = 0$) にいる観測者に、その観測者から共動座標で r 離れた位置にある天体から放たれた光が届く過程を考える。光が放たれた時刻を t として観測者に届く時刻を t_0 とする。光はヌルパスを通るのでロバートソン・ウオーカー計量 (1.1) で $ds = 0$ とし、更に光は経線に沿って伝搬するので $d\theta = 0, d\phi = 0$ とすることで、光が走った共動座標系での物理距離を求める式が以下のように書ける。

$$\int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = -\frac{1}{c} \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (1.16)$$

ここで光は r が減少する方向に伝搬することを考慮して右辺にマイナスを

つけた。微小時間 dt 後に再び同じ場所から光が放たれたとし、それが観測者には $t_0 + dt_0$ に届いたとする。この光が走った共動座標系での物理距離を求める式が以下のように書ける。

$$\int_{t+dt}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} = -\frac{1}{c} \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}. \quad (1.17)$$

共動座標系での観測者と天体の物理距離は変わらないから式 (1.16) と (1.17) の右辺は同じである。そこでこれらの差をとると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t+dt}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_t^{t+dt} \frac{dt}{a(t)}, \\ &\sim \frac{dt_0}{a(t_0)} - \frac{dt}{a(t)}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

最後の式変形では、 dt, dt_0 が非常に短く、それらの間の宇宙膨張による宇宙の半径の変化が無視出来るとして、それぞれの期間のスケールファクターが、それぞれの時刻のスケールファクターで一定であるとした。この式から情報が発信された時の時間間隔とそれが膨張する宇宙空間を伝搬して現在の観測者に届いた時の時間間隔の間に以下の関係があることが分かる。

$$dt_0 = \frac{a(t_0)}{a(t)} dt = (1+z)dt. \quad (1.19)$$

ここで z は

$$1+z = \frac{a(t_0)}{a(t)}, \quad (1.20)$$

で定義された情報が発信された時の宇宙の半径と観測された時の宇宙の半径の比であり宇宙論的赤方偏移 (Cosmological Redshift) と呼ばれる。 dt を光の周期とするとその光の振動数は $\nu = 1/dt$ であり波長は $\lambda = cdt$ であるから以下の関係式を得る。

$$\nu_0 = \frac{\nu}{1+z}, \quad (1.21)$$

$$\lambda_0 = (1+z)\lambda. \quad (1.22)$$

宇宙膨張により変化した宇宙の半径の比の分、光の波長が伸びることを示している。

現在の宇宙を構成する物質の主たる成分は、物質（ダスト） ρ_M 、相対論的粒子（輻射：宇宙マイクロ波背景放射とニュートリノ背景放射） ρ_r 、暗黒エネルギー ρ_{DE} の3成分である。それぞれの密度パラメータを以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\Omega_{M0} &= \frac{\rho_M(t_0)}{\rho_{cr}}, \\ \Omega_{r0} &= \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_{cr}}, \\ \Omega_{DE0} &= \frac{\rho_{DE}(t_0)}{\rho_{cr}}.\end{aligned}\quad (1.23)$$

ここで添字の0は現在の密度パラメータという意味でつけている。相対論的粒子の内、宇宙マイクロ波背景放射は温度 2.725K の黒体放射であることが観測的に高い精度で示されており、そのエネルギー密度は質量密度換算で以下のようなになる。

$$\rho_\gamma = 4.64 \times 10^{-34} \text{g/cm}^3. \quad (1.24)$$

ニュートリノが3世代であるとして全てを相対論的粒子として扱くと宇宙背景ニュートリノの現在のエネルギー密度は以下のようなになる。

$$\rho_\nu = 2 \times \frac{3}{2} \left(\frac{7}{8}\right) \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \rho_\gamma = 3.16 \times 10^{-34} \text{g/cm}^3. \quad (1.25)$$

右辺に現れる因子 $3/2$ は3が3世代存在することから来ており、 $1/2$ はニュートリノは左巻きしか存在しないことに起因する。先頭の因子2は、宇宙背景ニュートリノは、左巻きのニュートリノと右巻きの反ニュートリノが同数存在することからくる。したがって、相対論的粒子の密度パラメータは以下の値である。

$$\Omega_r = \frac{\rho_{CMB} + \rho_\nu}{\rho_{cr}} = 4.13 \times 10^{-5} h^{-2}. \quad (1.26)$$

フリードマン方程式 (1.31) より、 $w = -1/3$ の物質のみ宇宙に存在する時、宇宙は減速も加速をしなくなる。この時式 (1.46) より密度はスケールファクターの2乗に反比例する。フリードマン方程式 (1.30) に立返ると曲率 K の項が丁度スケールファクターの2乗に反比例している。そこで宇宙の曲

率を密度で表現した ρ_K を以下のように定義する。

$$\rho_K \equiv -\frac{3Kc^2}{8\pi G} \frac{1}{a^2}. \quad (1.27)$$

ρ_K は、 $w = -1/3$ の物質と見なして扱うことも出来る。フリードマン方程式 (1.30) の中で曲率項が卓越しているという事は、物質（ダスト・輻射・暗黒エネルギー全て）の密度が非常に小さいことを意味する。つまり宇宙は空っぽで重力による加速も減速も起きないということである。宇宙の曲率の密度パラメータを以下のように定義する。

$$\Omega_{K0} = \frac{\rho_K(t_0)}{\rho_{cr}}. \quad (1.28)$$

アインシュタイン方程式

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (1.29)$$

からスケールファクターに対する以下の発展方程式を得る。ここで Λ は定数で宇宙定数 Cosmological constant あるいはラムダ項と呼ばれる。

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}, \quad (1.30)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right). \quad (1.31)$$

これらの二つの方程式をフリードマン方程式と呼び、宇宙膨張の様子を決定する方程式である。メトリックテンソルの共変微分は恒等的にゼロなのでこの式の左辺の発散をとっても恒等的にゼロとなり、エネルギー保存則を破らない。宇宙項を右辺に移行し以下のように整理する。

$$\kappa^2 T_{00} - \Lambda g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(\rho c^2 + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \right), \quad (1.32)$$

$$\kappa^2 T_{ij} - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(P - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \right) g_{ij}. \quad (1.33)$$

この式からラムダ項は、エネルギー密度

$$\rho_\Lambda c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}, \quad (1.34)$$

圧力

$$P = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}, \quad (1.35)$$

の物質と見なす事ができる。即ちラムダ項は $w = -1$ の物質の存在を仮定したことに対応している。定義から明らかなように ρ_Λ は時間によらない定数である。式 (1.30) を時間で微分して式 (1.31) を代入すると以下のようなエネルギー密度発展方程式を得る。

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0. \quad (1.36)$$

これは断熱変化を仮定した時のエネルギー保存則を表している。アインシュタイン方程式はエネルギー保存則が成り立つように構築されているので当然の結果である。ここで断熱とは、ハッブルレンジス内の各種類の粒子数が保存することを意味する（暗黒エネルギーは別）。

CMB 観測衛星 PLANCK の観測結果によると (Planck collaboration, Planck 2015 results. XIII., 2015)、主要な宇宙論パラメータの CMB 温度揺らぎ・偏光観測からの測定結果は以下の通りである。

$$H_0 = 67.27 \pm 0.66, \text{ km/sec/Mpc} \quad (1.37)$$

$$\Omega_{\Lambda 0} = 0.6844 \pm 0.0091, \quad (1.38)$$

$$\Omega_{M 0} = 0.3156 \pm 0.0091, \quad (1.39)$$

$$\Omega_{M 0} h^2 = 0.1427 \pm 0.0014, \quad (1.40)$$

であり現在の宇宙はダークエネルギー優勢の時代である。ここで $\Omega_{DE 0}$ は $h = 0.6727$ の時の値である。

フリードマン方程式 (1.30) から式 (1.2) を導出できる。曲率 K は定数であるから以下の変形ができる。

$$K = \frac{1}{c^2} \left(\frac{8\pi G}{3} \rho a^2 - H^2 a^2 \right) = \left(\frac{H_0}{c} \right)^2 (\Omega_0 - 1). \quad (1.41)$$

ダスト粒子からなる物質か、相対論的粒子からなる輻射か、暗黒エネルギーかを区別するのに以下の状態を方程式を導入する。

$$P = w\rho c^2. \quad (1.42)$$

物質は $w = 0$ 、輻射は $w = 1/3$ 、暗黒エネルギーの候補の一つである宇宙項

Λ は $w = -1$ である。各成分についてエネルギー保存則 (1.36) を適応すると以下の結果を得る。

$$\rho_M = \rho_{M0} \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^3 = \rho_{M0} (1+z)^3, \quad (1.43)$$

$$\rho_r = \rho_{r0} \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^4 = \rho_{r0} (1+z)^4, \quad (1.44)$$

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}. \quad (1.45)$$

相対論的粒子のエネルギー密度は、それらが熱平衡分布で与えられるとすると温度 T の 4 乗に比例する。したがって式 (1.44) から輻射の温度が $1+z$ に比例して過去に遡る程高くなる事が分かる。一般の w の場合は、

$$\rho_w = \rho_{w0} (1+z)^{3(1+w)}, \quad (1.46)$$

となる。暗黒エネルギーは宇宙を加速させる物質であり

$$w < -\frac{1}{3}, \quad (1.47)$$

を満たす未知の物質である。一つの候補としてアインシュタインによって導入された宇宙項がある。

フリードマン方程式を解いて宇宙の半径の時間進化を調べる。まず、宇宙が状態方程式 (1.42) を満たす種類の物質で構成されているとする単純化した例についてフリードマン方程式 (1.30) の解を求めてみよう。 $K = 0$ とする。エネルギー保存則 (1.46) をフリードマン方程式 (1.30) に代入して変形すると以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho a^{3(1+w)} \frac{1}{a^{(1+3w)/2}}} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^{3(1+w)} \frac{1}{a^{(1+3w)/2}}}, \\ &= H_0 \frac{1}{a^{(1+3w)/2}}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

最後の等号では、 $H_0^2 = (8\pi G/3)\rho_0$ であること $a_0 = 1$ であることを使った。 $w \neq -1$ の場合について解くと以下の解を得る。

$$a = \left(\frac{3(1+w)}{2} H_0 \right)^{2/3(1+w)} t^{2/(3(1+w))}. \quad (1.49)$$

$w > -1/3$ の時、時間の指数部が1以下となり、スケールファクターの2階微分が負となり確かに減速膨張の解になっている。物質優勢の時 $w = 0$ であり

$$a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}, \quad (1.50)$$

となり輻射優勢の時 $w = 1/3$ であり

$$a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}, \quad (1.51)$$

となり、曲率優勢の時 $w = -1/3$ であり

$$a = \left(\frac{t}{t_0}\right), \quad (1.52)$$

となる。曲率優勢の時は、スケールファクターの2階微分がゼロになり確かに減速も加速もしない解になっている。宇宙年齢はハッブル定数と以下の関係で結ばれる。

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0}. \quad (1.53)$$

$w > -1/3$ の時 $t_0 < 1/H_0$ である。宇宙が加速も減速もせずに進化して来た場合、ハッブル定数が時間によらず一定であり、ハッブルの法則 (1.9) より宇宙年齢は

$$t_0 = \frac{d}{v} = \frac{1}{H_0}. \quad (1.54)$$

で求まる。 $w > -1/3$ の宇宙では、物質の重力により宇宙膨張は減速されて現在に至ったことになる。過去の膨張速度は、ハッブル定数一定を仮定して期待される速度より速かったことになる。その結果、ある銀河間の間隔が現在の間隔に至るまでの期間がより短くて済むことになる。この為宇宙年齢が H_0^{-1} より短くなったのである。ラムダ項優勢の場合 $w = -1$ でありこの時、解は以下のようなになる。

$$a = e^{H_0 t}. \quad (1.55)$$

この解にしたがって指数関数的に半径が膨張する宇宙をド・ジッター宇宙

モデル (de Sitter) と呼ぶ。

一般の物質構成の時の宇宙年齢とスケールファクターの関係を与える式を導く。ここでは、物質 $w = 0$ 、輻射 $w = 1/3$ 、曲率、ラムダ項 $w = -1$ から宇宙が構成されているとする。フリードマン方程式 (1.30) は以下のように変形できる。

$$H^2 = H_0^2(\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda0} + \Omega_{K0}(1+z)^2). \quad (1.56)$$

現在の宇宙では Ω_{r0} が非常に小さく式 (1.56) の中の輻射の寄与が無視し得る。 Ω_{r0} の項を無視し、 $\Omega_K = 0$ で更に $\Omega_{\Lambda0} = 0, \Omega_{M0} = 1$ としたモデルすなわち物質だけで宇宙が平坦になっているモデルをアインシュタイン-ド・ジッターモデル (Einstein-de Sitter) と呼ぶ。ここで

$$\Omega_{K0} = 1 - \Omega_{M0} - \Omega_{r0} - \Omega_{\Lambda0}. \quad (1.57)$$

である。スケールファクターの微小変化を以下の関係を用いて z の微小変化に変換する。

$$da = -\frac{dz}{(1+z)^2}. \quad (1.58)$$

輻射のエネルギー密度が無視できる近傍の宇宙では、宇宙論的赤方偏移が z_1 から 0 まで変化する間の宇宙年齢の経過時間を求める式が以下のように求まる。

$$H_0 \int_{t_1}^{t_0} dt = - \int_{z_1}^0 \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda0} + \Omega_{K0}(1+z)^2}}. \quad (1.59)$$

宇宙の物質構成は以下のように進化してきたことになる。現在は式 (1.26),(1.38),(1.39) から暗黒エネルギー優勢の時代である。また宇宙の現在の曲率はゼロ即ち平坦な宇宙であることが観測的に示されている。暗黒エネルギーを宇宙項とすると物質優勢の時代から暗黒エネルギー優勢の時代に切り替わった時期 z_{DE} は以下のように求まる。

$$1 + z_{DE} = \left(\frac{\Omega_{\Lambda0}}{\Omega_{M0}}\right)^{1/3} \sim 1.3. \quad (1.60)$$

ここで $h = 0.6727$ の値を用いた。即ち赤方偏移 0.3 頃を境に物質優勢な

減速膨張する宇宙から暗黒エネルギーが優勢な加速膨張する宇宙に切り替わったことになる。物質のエネルギー密度と相対論的粒子（輻射）のエネルギー密度が等しくなった時期を matter-radiation equality と呼びその赤方偏移を z_{eq} で表し、以下のように求まる。

$$1 + z_{eq} = \left(\frac{\Omega_{M0}}{\Omega_{r0}} \right) = 3455 \left(\frac{\Omega_{M0} h^2}{0.1427} \right). \quad (1.61)$$

この時の輻射の温度は

$$T_{eq} = 2.725(1 + z_{eq}) \sim 9400\text{K}, \quad (1.62)$$

であり、これより宇宙が熱かった時は、宇宙は輻射優勢であったことになる。

宇宙論的赤方偏移 z にある物理的スケール $d\ell$ の天体を観測した時、見かけの大きさが $d\theta$ (radian) であったとする。図 1.1 より宇宙膨張を考えなければ、これら二つの量は以下の関係式で結ばれる。

$$d\ell = rd\theta. \quad (1.63)$$

膨張宇宙の場合への拡張は、ロバートソン・ウォーカー計量 (1.1) で $dt = 0, dr = 0, d\phi = 0$ とすることでこれらの二つの量の関係式が得られる。

$$d\ell = a(t)rd\theta. \quad (1.64)$$

そこで角径距離 Angular diameter distance を以下のように定義する。

$$D_A(z) = \frac{r(z)}{1+z}. \quad (1.65)$$

r は z の単調増加関数である。したがって、 $z \ll 1$ の範囲では、遠くに行く程角径距離が長くなり、天体の見かけの大きさが小さくなる。しかし、 $z > 1$ になると r の増加が鈍り且つ分母の $1+z$ が効いて来て z が大きくなる程つまり遠くなる程角径距離が小さくなる。これは過去に遡る程宇宙が小さくなるため大きさが同じ天体が宇宙全体に占める割合が大きくなることに由来している。ここで r と z の関係式を求める。そこで天体から観測者までの光の伝搬を考える。ロバートソン・ウォーカー計量で $ds = 0, d\theta = d\phi = 0$ とすることで以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{r(z)}^0 \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} &= - \int_t^{t_0} \frac{cdt}{a} = - \int_t^{t_0} \frac{cdt}{da} \frac{da}{a} = \int_t^{t_0} c \frac{1}{H} \frac{da}{a^2}, \\ &= \frac{c}{H_0} \int_z^0 \frac{dz}{\sqrt{\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{K0}(1+z)^2}}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

左辺は共同座標系での固有距離であり

$$\chi = K^{-1/2} \sin^{-1} K^{1/2} r(z), \quad K > 0, \quad (1.67)$$

$$= (-K)^{-1/2} \sinh^{-1} (-K)^{1/2} r(z), \quad K < 0. \quad (1.68)$$

$$= r(z), \quad K = 0, \quad (1.69)$$

である。曲率 K は式 (1.2) で与えられる。図 1.2 に様々な宇宙モデル対す

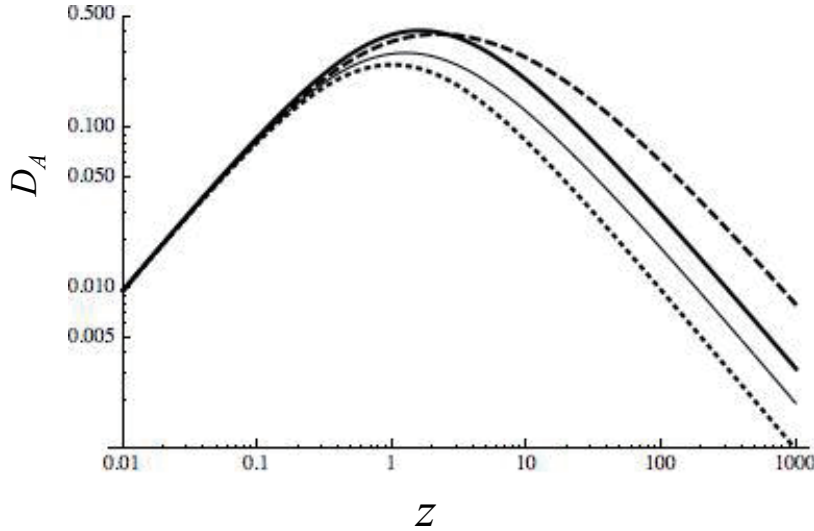


図 1.2 様々な宇宙モデルにおける角径距離の赤方偏移依存性。

る角径距離の赤方偏移依存性を示した。縦軸は c/H_0 を単位にした角径距離である。太い実線は、 $\Omega_{M0} = 0.3, \Omega_{\Lambda} = 0.7$ という現在の観測結果に近い物質構成の場合を示している。細い実線は同じ平坦な宇宙 $\Omega_K = 0$ の場合であるが、 $\Omega_{M0} = 1, \Omega_{\Lambda} = 0$ すなわちアインシュタインード・ジッターモデルを示した。破線で開いた宇宙 $\Omega_{M0} = 0.3, \Omega_{\Lambda} = 0, \Omega_K = 0.7$ を、鎖線で閉じた宇宙 $\Omega_{M0} = 2, \Omega_{\Lambda} = 0, \Omega_K = -1$ をそれぞれ示した。平坦な宇宙どうして

も、大きな赤方偏移でアインシュタインド・ジッターの方が、多少距離が短くなっているが、曲率を変えた事によるに变化より小さい。開いた宇宙では、距離が長くなり、同じ天体でも見かけの大きさが小さく見える。閉じた宇宙では逆に距離が短くなり見かけの大きさが大きく見える。

次に宇宙論的赤方偏移 z にある絶対光度 $L(\text{erg/s})$ の天体を観測した時のフラックスが $f(\text{erg/s/cm}^2)$ であったとする。宇宙膨張が無いとして、図 1.3 に球面上を伝搬する光の様子を示した。頂点 P にある光源から等方的に



図 1.3 球面上を伝搬する光。

光が放たれている。光は球面に沿って伝搬し点 O の観測に届く。点 P を z 軸上に置き図 1.1 で定義したように 2 次元極座標を導入すると点 P を中心とした点 O を含む球面上の同心円の円周の長さは $2\pi r$ である。フラックス保存則から以下の関係式を得る。

$$L = 2\pi r f. \quad (1.70)$$

上記の話をも 3 次元球面上を伝搬する光に拡張するには、式 (1.70) の円周の長さを球の面積 $4\pi r^2$ に置き換えればよい。球の半径の膨張を考慮するために、まず r を $a_0 r$ に置き換えてる。しかし、これだけでは不十分である。式 (1.70) は単位時間辺り単位周波数辺りに光源から放射された光のエネルギーと光源を取り囲む閉じた曲線上に連続的に存在する仮想的観測者が取得する全エネルギーが等しいという、エネルギー保存則を表している。光源で放射が起きた時間間隔 dt_e の間に放射された光が観測者に観測される時間間隔 dt_o が式 (1.19) に示したように $1+z$ 倍に引き延ばされる。更に放射時の周波数 ν_e は式 (1.21) にしたがって ν_o に偏移する。簡単のための光源がこの周波数のみで光を放出する単色光源とすると観測者が受け取る光のエネルギー総量は $1/(1+z)$ に減少する。したがって、天体の絶対光度とフラックスを用いたエネルギー保存則は以下のように書き表される。

$$\begin{aligned} \frac{L dt_e}{1+z} &= 4\pi a_0^2 r^2 f dt_o. \\ L &= 4\pi r^2 (1+z)^2 f. \end{aligned} \quad (1.71)$$

そこで輝度距離 luminosity distance を以下のように定義する。

$$D_L = r(1+z). \quad (1.72)$$

ここまでは光源は点源であると仮定して来た。光源即ち天体が有限の面積 dS をもっており、単位面積辺り単位立体角辺りの単位周波数、単位時間あたりの放射強度を I とし、これを表面輝度 Surface brightness と呼ぶ。表面輝度と絶対輝度は以下の関係式で結ばれる。

$$\begin{aligned} L &= 4\pi d S I_e, \\ dS &= D_A^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (1.73)$$

ここで $d\Omega$ は天体が空に張る見かけの面積である。これらから以下の式を得る。

$$4\pi D_A^2 d\Omega I_e = 4\pi D_L^2 f_o.$$

ここで f_o は観測されるフラックスで、観測される表面輝度とは $f_o = d\Omega I_o$ で結ばれる。したがって、天体近傍での表面輝度 I_e と観測される表面輝度 I_o の間には以下の関係がある。

$$I_o = \frac{1}{(1+z)^4} I_e. \quad (1.74)$$

このように遠方の天体の表面輝度は赤方偏移の4乗に反比例してドンドン暗くなる。これはトールマン効果と呼ばれている。4乗の由来の内訳は、宇宙が小さくなり像が引きのぼされて明るさが薄まる効果で2乗、時間間隔が引き延ばされ、周波数が低下する効果で1乗ずつである。天体観測の感度を決める要因の一つは、背景の明るさとのコントラストである。トールマン効果により遠方の天体程急激にコントラストがつけにくくなり観測し辛くなる。

奥行きが赤方偏移 z から $z+dz$ で微小立体角 $d\Omega$ の面で囲まれる領域の微小体積 dV は以下のように計算できる。

$$dV = ad\chi a^2 r^2 d\Omega = a^3 d\chi r^2 d\Omega. \quad (1.75)$$

これを固有体積要素と呼ぶ。共動座標部のみ抜き出した $d\chi r^2 d\Omega$ 共動体積 comoving volume と呼ぶ。 $d\chi$ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} d\chi &= -\frac{cdt}{a} = -c \frac{dt}{da} \frac{da}{a}, \\ &= \frac{c}{H_0} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{K0}(1+z)^2}}. \end{aligned} \quad (1.76)$$

以下の式で粒子的地平線 particle horizon を定義する。

$$\ell_p(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt}{a} \quad (1.77)$$

これは宇宙開闢から現在までに光即ち粒子が進むことができる距離である。言い換えると現在までに情報を交換できた距離である。簡単のために $a \propto t^n$

とする。宇宙膨張の加速度は $\ddot{a} \propto n(n-1)t^{n-2}$ となる。したがって、 $n=1$ の時加速度がゼロとなり、 $n < 1$ の時減速膨張、 $n > 1$ の時加速膨張となる。式 (1.77) は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \ell_p(t) &= \frac{1}{1-n} ct^n (t^{-n+1} - (t=0)^{-n+1}) \\ &= \frac{ct}{1-n} \quad \text{for } n < 1 \\ &= \infty \quad \text{for } n > 1 \end{aligned}$$

減速膨張時は、粒子的地平線は期待通り時間と共に伸びていき、情報交換出来る領域が増加していく。しかし、加速膨張時は、宇宙年齢が有限であるにも関わらず粒子的地平線は無窮大である。減速膨張する宇宙の粒子的地平

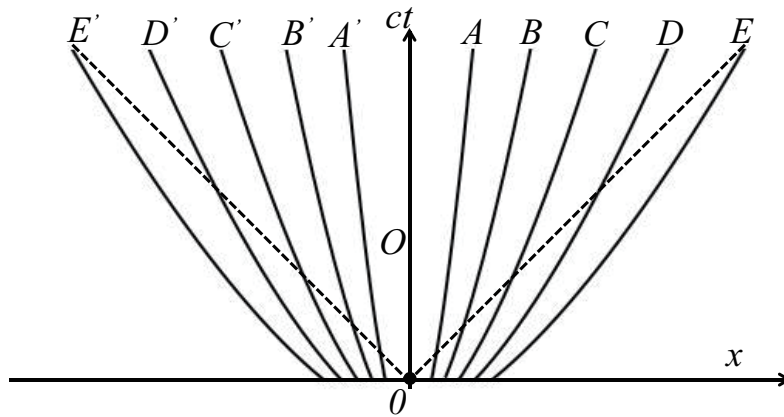


図 1.4 減速運動する粒子群との情報交換。

線が時間と共に伸びる様子を、図 1.4 を用いて解説する。ミンコフスキー座標の時空図中に減速運動をする粒子の世界線を示した。原点で静止している観測者と $t=0$ 以降で情報交換を行なうには、少なくとも $t=0$ の時原点から発した光が各粒子に届かなければならない。この光の世界線を破線で示した。各粒子の世界線と破線の交点が時刻ゼロに原点から発した光が初めて各粒子に到達した時刻である。この交点までの距離が各時刻の粒子的

地平線である。時間と共により遠方の粒子と情報交換が可能になる様子が分かる。一度光が届いた粒子の世界線は、その後常に二本の破線で囲まれた上側の領域すなわち光円錐の内側の領域に存在し、粒子的地平線の内側すなわち情報交換可能な領域に存在し続ける事が分かる。

以下の式で事象の地平線 event horizon を定義する。

$$\ell_e(t) = a(t) \int_t^{\infty} \frac{cdt}{a} \quad (1.78)$$

これはある時刻 t から以後無限の時間を掛けて到達できる距離である。 $a \propto t^n$ の時を例にとる。式 (1.78) は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \ell_e(t) &= \frac{1}{1-n} ct^n (t^{-n+1} - (t=0)^{-n+1}) \\ &= \frac{ct}{n-1} \quad \text{for } n > 1 \\ &= \infty \quad \text{for } n < 1 \end{aligned}$$

減速膨張時は、事象の地平線は期待通り無限大で、無限の時間を掛ければ宇宙の全ての領域と情報交換可能である。しかし、加速膨張時は、事象の地平線は有限になる。即ち時間を無限に掛けても情報交換できない領域が存在するのである。加速度膨張する宇宙では事象の地平線が現れる事を示すため、図 1.5 に異なる初期位置から初速度ゼロで同じ加速度で等加速度直線運動する様々な粒子の軌跡を示した。十分時間が経過した後、粒子の速度は光の速度に漸近していき、時空図上で傾きが 45 度の直線に近づく。破線で $t=0$ および $t=t_1$ に原点から発した光の世界線を示した。 $t=0$ に原点を発した光は、 $t=t_C$ に粒子 C の世界線と $t=t_D$ に粒子 D の世界線と交わり初めて情報交換が可能となる。粒子的地平線は期待通り時間の経過と共に伸びていく。しかし、 $t=\infty$ になっても粒子 E の世界線に漸近するだけで交わる事は無い。したがって、初期に粒子 E より遠方にいて同様の加速度運動する粒子とは無限の時間を掛けても情報交換をする事ができない。即ち時刻ゼロに原点にいる観測者にとって粒子 E までの距離が、情報交換できる限界であり、これが事象の地平線である。時刻 $t=t_1$ に原点を発した光は、無限の時間を掛けても粒子 C の世界線に漸近するだけで交わる事は無い。

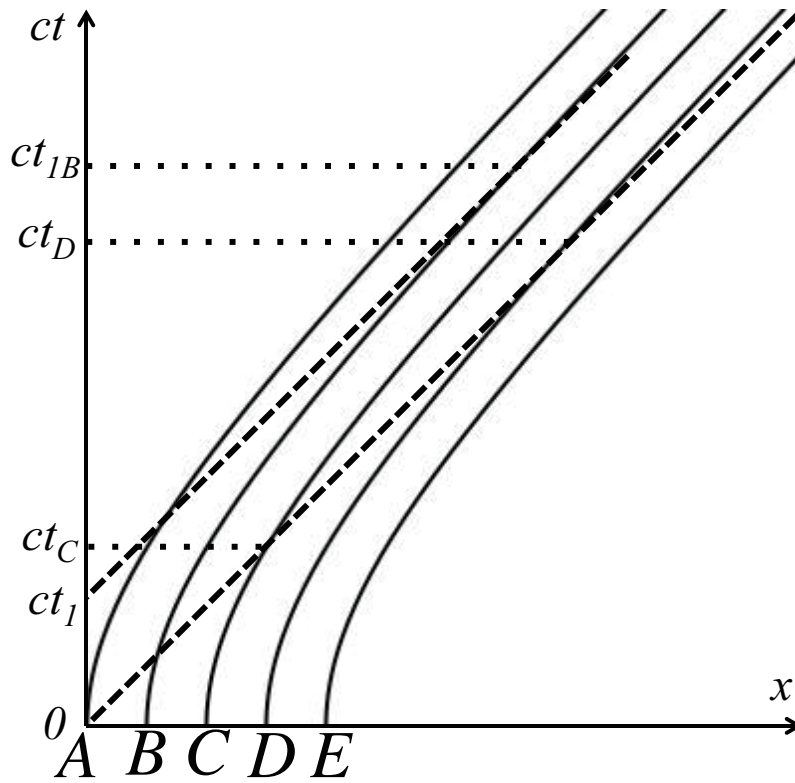


図 1.5 事象の地平線：加速運動する粒子群との情報交換。

したがって、時刻 $t = t_1$ に原点にいる観測者にとっての事象の地平線は粒子 C までの距離である。このように、共同座標での事象の地平線は時間の経過と共に短くなり、時間が経過すると遠方から順に見えなくなっていく。

最後にド・ジッター宇宙を取り上げる。粒子的地平線は以下のようになり、

$$e^{Ht} \int_0^t \frac{cdt}{e^{Ht}} = \frac{c}{H} (e^{Ht} - 1). \quad (1.79)$$

時間とともに指数関数的に増加する。事象の地平線は以下のようになる。

$$e^{Ht} \int_t^\infty \frac{cdt}{e^{Ht}} = \frac{c}{H}. \quad (1.80)$$

事象の地平線は、ハッブル半径で一定となり、二点間の距離が宇宙の指数関数的膨張により引き延ばされ、この半径を超えるとお互い情報交換が出来なくなる。

1.2 宇宙の熱史

この節では温度が 10^{11}K 以下即ち 10MeV 以下に冷えた後の宇宙の熱史について議論する。この温度の宇宙では、ミューオンの対生成、ハドロンの対生成などは起こらず、バリオン数は保存する。中性化が進む温度 3000K 程度までの間は、電子と光子の衝突率が非常に高く、荷電粒子と光子は熱平衡状態にあると仮定できる。したがって、荷電粒子と光子の温度は同じと仮定出来る。ここで議論する期間においては、宇宙の温度は時間とともに単調減少するので宇宙年齢の代わりに宇宙の温度を用いる。その方が、宇宙の物理状態を議論する上で便利である。

1.2.1 エントロピー

バリオン個数密度 n_B 、 N はバリオンと熱平衡状態にある非相対論的粒子のバリオン数あたりの数で $n_B N$ が非相対論的粒子の数密度を与え、温度 T の時、単位バリオンあたりのエントロピーは以下のように与えられる。

$$k_B d\sigma = \frac{d(\varepsilon/n_B) + pd(1/n_B)}{T}, \quad (1.81)$$

ステファン・ボルツマン定数 a_B を用いて光子とバリオンが熱平衡状態にあるプラズマのエネルギー密度、圧力は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= a_B T^4 + \frac{3}{2} n_B N k_B T, \\ p &= \frac{1}{3} a_B T^4 + n_B N k_B T, \end{aligned} \quad (1.82)$$

ここでステファン・ボルツマン定数は

$$a_B = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3} = 7.56 \times 10^{-15} \text{erg cm}^{-3} \text{deg}^{-4}, \quad (1.83)$$

で与えられる。このプラズマのエントロピーは以下のように求まる。

$$\sigma = \frac{4a_B T^3}{3n_B k_B} + N \ln \left(\frac{T^{3/2}}{n_B Cst} \right). \quad (1.84)$$

ここで Cst は積分定数である。後でみるように右辺第一項は 10^9 程度大さを持つ。さらに後でみるように電子陽電子対消滅が起きる $T = 10^{10}\text{K}$ 以降の宇宙では、宇宙の中性化が進む $T \sim 3000\text{K}$ までは、光子とバリオンのプラズマで熱的に閉じた系をなす。したがって、断熱膨張の条件からこの期間で σ は一定である。第二項の変化分が第一項にしわ寄せとして反映され、全体としてエントロピー保存を保つように進化するが、以下の議論のようにこの変化量は非常に小さい。例えば第一項に 0.01% の変化を生じさせるため要求される第二項の変化量は

$$10^9 \times 10^{-4} \sim \Delta \left[N \ln \left(\frac{T^{3/2}}{n_B Cst} \right) \right]$$

からバリオンの種類を 10^5 増減させるか

$$T^{3/2}/n_B \sim e^{100000}$$

変化させなければならず、どんなに激しい変化が起きたとしてもこのような変化が宇宙の進化のなかで起きるとは考えられない。したがって、エントロピーの右辺第一項が保存するという近似は非常によい近似で成立する。 Cst の値を光子とバリオンが熱平衡状態にある時期の $T^{3/2}/n_B$ にとれば、光子の数密度

$$\begin{aligned} n_\gamma &= \int_0^\infty \frac{8\pi p^2}{h^3} \frac{dp}{e^{\frac{pc}{k_B T}} - 1} = 8\pi \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 8\pi^2 \zeta(3) \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3, \\ &= \frac{30\zeta(3)}{\pi^4} \frac{a_B T^3}{k_B} \sim 0.3702 \frac{a_B T^3}{k_B} \text{cm}^{-3}, \end{aligned} \quad (1.85)$$

を用いて単位バリオン数あたりのエントロピーを書き換えると良い精度で以下のように近似できる。

$$\sigma = \frac{3.60n_\gamma}{n_B}. \quad (1.86)$$

即ちエントロピー保存の条件は、バリオン数あたりの光子数が保存する事を意味している。バリオン数保存から $n_B a^3$ は一定である。したがって、エントロピー保存の条件から光子の温度に対して Ta が一定という条件を得る。この時バリオンのエントロピーは

$$N \ln(T^{3/2}/n_B) = \frac{3}{2} N \ln a + \text{const.}$$

となり宇宙膨張と共に増加する。

宇宙の中性化以降では、光子は単独で断熱変化することになり、そのエントロピーは一定である。またバリオン数も保存する。したがって、バリオン数あたりの光子数は中性化以降現在まで保存する。

1.2.2 エントロピー・エネルギー密度

ここでは、温度 T で熱平衡状態分布をしている質量 m 化学ポテンシャルゼロの粒子を考える。まず状態密度を導出する。一辺 L の箱の中に閉じ込められているとする。周期境界条件からこの粒子の波数ベクトルは以下の条件を満たす。

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} \vec{n}. \quad (1.87)$$

ここで $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ で n_x, n_y, n_z は整数である。したがって、状態密度は以下のように求まる。

$$d\rho = \frac{d^3 \vec{n}}{L^3} = \frac{dk_x dk_y dk_z}{(2\pi)^3}. \quad (1.88)$$

プランク定数 h を 2π で割った $\hbar = h/2\pi$ を用いて運動量と波数の間の関係 $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ を用いて状態密度を運動量空間の体積要素を用いて表すと以下のように書ける。

$$d\rho = \frac{d^3 \vec{p}}{h^3} \quad (1.89)$$

エネルギー密度 ρc^2 ・圧力 p ・粒子数密度 n ・エントロピー密度 s を求める。まずエントロピー密度をエネルギー密度と圧力から導出する式を導く。

断熱過程では熱力学第一法則より以下の式が成り立つ。

$$d(s(T)V) = \frac{d(\rho(T)c^2V) + p(T)dV}{T}. \quad (1.90)$$

ここで断熱過程を仮定しているため熱の変化量をエントロピーの変化量と等しいとし、 s, ρ, p は温度のみの関数とした。断熱膨張では宇宙の全エントロピーは保存するため以下のエントロピー保存則が成り立つ。

$$sa^3 = \text{const.} \quad (1.91)$$

この式において dV の係数が等しいことを用いて以下の結果を得る。

$$s = \frac{\rho c^2 + P}{T}. \quad (1.92)$$

この結果を用いてエネルギー密度・圧力・粒子密度・エントロピー密度を計算する式は以下のように与えられる。

$$\rho(T)c^2 = \int_0^\infty \frac{4\pi g p^2}{h^3} dp \frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}{\exp(\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}/k_B T) \pm 1}, \quad (1.93)$$

$$P(T) = \int_0^\infty \frac{4\pi g p^2}{h^3} dp \frac{p^2 c^2}{3\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} \frac{1}{\exp(\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}/k_B T) \pm 1} \quad (1.94)$$

$$n(T) = \int_0^\infty \frac{4\pi g p^2}{h^3} dp \frac{1}{\exp(\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}/k_B T) \pm 1}, \quad (1.95)$$

$$s(T) = \frac{1}{T}(\rho c^2 + p). \quad (1.96)$$

$$(1.97)$$

ここで $+$ はフェルミオンを $-$ はボソンを表し、 g はスピンの自由度を表す。圧力の導出について多少説明を加えておく。 x 軸に垂直な yz 平面に粒子が一回の衝突で与える力積は $2p_x$ である。粒子の密度を n 、速度分布が等方的であるとするこの壁の一方から単位時間単位面積に衝突する粒子数は $nv_x/2$ である。したがって、この壁に単位時間の間に、単位面積に与えられる力積即ち圧力は $P = nv_x p_x$ である。ここで $v_x = p_x c^2/E(p)$ であるから $P = np_x^2/E(p)$ である。速度分布が等方的であることからこれを運動量空間での方向について平均すると $\langle p_x^2 \rangle = p^2/3$ となる。さらに $n = (4\pi p^2 dp g/h^3)/(\exp(\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}/k_B T) \pm 1)$ であることを考慮すると

式 (1.93) を得る。質量を持たない粒子あるいは、 $k_B T \gg mc^2$ の極限では、ボーズ粒子に対するこれらの式は以下ようになる。

$$\begin{aligned}\rho(T)c^2 &= a_B T^4, \\ P(T) &= \frac{1}{3}\rho c^2, \\ n(T) &= \frac{30\zeta(3)}{\pi^4} \frac{a_B T^3}{k_B} \sim 0.3702 \frac{a_B T^3}{k_B}, \\ s(T) &= \frac{4a_B T^3}{3}.\end{aligned}\tag{1.98}$$

ここで $g = 2$ とした。これらを用いてフェルミオンに対する量を表す関係式を導く。以下の関係式を用いる。

$$\frac{1}{e^{2x}-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{e^x+1} \right)$$

これを用いるとフェルミオンに対する上記の量を計算するのに必要な以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x+1} &= \int_0^\infty dx \left(\frac{x^3}{e^x-1} - \frac{2x^3}{e^{2x}-1} \right), \\ &= \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x-1} - \frac{2}{24} \int_0^\infty d(2x) \frac{(2x)^3}{e^{2x}-1} = \frac{7}{8} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x-1}, \\ \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x+1} &= \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x-1} - \frac{2}{2^3} \int_0^\infty d(2x) \frac{(2x)^2}{e^{2x}-1} = \frac{3}{4} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x-1}.\end{aligned}$$

これらを用いるとフェルミオンに対する求める関係式を以下のように得る。

$$\begin{aligned}\rho(T)c^2 &= \frac{7}{8} a_B T^4, \\ P(T) &= \frac{1}{3} \frac{7}{8} a_B T^4, \\ n(T) &= \frac{3}{4} \frac{30\zeta(3)}{\pi^4} \frac{a_B T^3}{k_B} \sim 0.2777 \frac{a_B T^3}{k_B}, \\ s(T) &= \frac{7}{8} \frac{4a_B T^3}{3}.\end{aligned}\tag{1.99}$$

以下では粒子のスピン自由度と種類の数を表す変数 N を用いて宇宙の全相対論的粒子のエネルギー密度を以下のように表す。

$$\rho c^2 = \frac{N}{2} a_B T^4. \quad (1.100)$$

例えば光子のみ存在する時は $N = 2$ である。

宇宙の温度が電子の静止質量エネルギーより十分大きく、電子を質量ゼロの相対論的粒子として扱える場合を考える。ただし、宇宙の温度は、電子の次に軽いミュー粒子の静止質量エネルギーよりは十分低く、ミュー粒子は既に非相対論的になっているとする。ニュートリノも有限の質量を持つが電子の質量よりは圧倒的に小さく、この時期ニュートリノも良い近似で相対論的粒子として扱える。したがって N は以下のようになる。

$$N = 2 + \frac{7}{8}(2 \times 3 + 2 \times 2) = \frac{43}{4}. \quad (1.101)$$

ここで始めの 2 は光子のスピン自由度を表す。二項目以降の $7/8$ が掛かる項はフェルミオンの寄与を表す。始めの項はニュートリノの寄与である。ニュートリノは左巻きスピンのみを持つ。反粒子である反ニュートリノが存在し、これは右巻きスピンのみを持つ。ニュートリノには、電子ニュートリノ、ミューオンニュートリノ、タウオンニュートリノの 3 世代存在する。これらのことからニュートリノの自由度は $2 \times 3 = 6$ である。二項目は電子・陽電子それぞれがスピンの自由度 2 を持つ事から来る。この時期は宇宙の曲率は無視できるのでフリードマン方程式は簡単に以下のように書ける。

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}.$$

輻射優勢期なのでスケール因子の時間依存性は $t^{1/2}$ であることをこの式に代入するとこの時期の宇宙年齢と宇宙の温度を関係づける以下の式をえる。

$$t = \sqrt{\frac{3c^2}{16\pi G N a_B}} \frac{1}{T^2} = 0.74 \left(\frac{k_B T}{1\text{MeV}} \right)^{-2} \text{sec}. \quad (1.102)$$

1.2.3 弱い相互作用の結合定数

ビッグバン軽元素合成過程を考察する上で重要な役割を果たす、ベータ崩壊の反応断面積をベータ崩壊の崩壊時間が $\tau_n = 885.7\text{sec}$ であることが

ら求める。弱い相互作用の結合定数を G_F で表す。これはフェルミ結合定数と呼ばれる。ベータ崩壊の始状態 i から終状態 f への遷移確率振幅を T_{fi} で表す。 T_{fi} を用いて遷移確率はフェルミの黄金律を用いて以下のように計算される。

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |T_{fi}|^2 \delta(E_i - E_f). \quad (1.103)$$

一方、ベータ崩壊の反応率は以下のように書ける。

$$\lambda(n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e) = A \int \frac{8\pi p_e^2}{h^3} dp_e \frac{4\pi p_\nu^2}{h^3} dp_\nu \delta(Q - E_e - p_\nu c) \quad (1.104)$$

ここで A はフェルミ結合定数と

$$A = \frac{G_F^2 (1 + 3g_A^2) \cos^2 \theta_C}{\hbar}, \quad (1.105)$$

で結ばれる定数であり、 $1 + 3g_A^2$ の 1 はベクトルカレントの寄与を $3g_A^2$ は3種類のアキシャルベクターカレントの寄与を表しており中性子のベータ崩壊から測定された値は $g_A = 1.257$ である。また θ_C はカビーボ角と呼ばれる物理量で O^{14} のベータ崩壊から求めた実験値は $\cos \theta_C = 0.9745$ である。電子がスピンの自由度 2 を持つこと、一方反ニュートリノは右巻きのみ存在することから状態密度の係数が 2 倍異なっている。 p_e は電子の運動量 p_ν はニュートリノの運動量で、

$$Q = m_n c^2 - m_p c^2 = 1.3 \text{ MeV}, \quad (1.106)$$

は中性子と陽子の質量差のエネルギーである。また、ベータ崩壊後に電子、反ニュートリノが飛び出すフリースペース中に存在する電子と反ニュートリノの各エネルギー準位の占有率が非常に小さいと仮定した。デルタ関数は反応前後のエネルギー保存則を表す。電子の運動量とエネルギーの関係式

$$p_e = \sqrt{\left(\frac{E_e}{c}\right)^2 - (m_e c)^2}, \quad (1.107)$$

を用いて式 (1.104) の積分は以下のように変形できる。

$$\lambda(n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e) = \frac{2(4\pi)^2 A}{h^6 c} (m_e c)^5 \int_1^{Q/m_e c^2} (x^2 - 1)^{1/2} x \left(\frac{Q}{m_e c^2} - x \right)^2 dx \quad (1.108)$$

ここで積分の上限値 $Q/m_e c^2$ は ~ 2.531 である。積分の部分を取り出して計算する。

$$\lambda_0 = \int_1^{Q/m_e c^2} (x^2 - 1)^{1/2} x \left(\frac{Q}{m_e c^2} - x \right)^2 dx = 1.636. \quad (1.109)$$

以上の結果から反応断面積 A はベータ崩壊の崩壊時間から以下のように求まる。

$$2 \frac{(4\pi)^2 A}{h^6 c^6} (m_e c^2)^5 \lambda_0 = \frac{1}{\tau_n}. \quad (1.110)$$

この結果にベータ崩壊の崩壊時間 $\tau_n = 885.7 \text{sec}$ を代入することでフェルミ結合定数が以下のように求まる。

$$G_F = 2.158 \times 10^{-5} (\hbar c)^3 \text{GeV}^{-2}. \quad (1.111)$$

フェルミ結合定数は

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

の崩壊過程から測定されており

$$G_F = 1.15 \times 10^{-5} (\hbar c)^3 \text{GeV}^{-2}. \quad (1.112)$$

である。

弱い相互作用の結合の強さを他の相互作用と比較する。電磁相互作用の結合の強さは、超微細定数

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}, \quad (1.113)$$

である。また強い相互作用の結合の強さは強い相互作用の結合定数を g として以下のように与えられる。

$$\frac{g^2}{4\pi\hbar c} \approx 1 \sim \frac{1}{10}. \quad (1.114)$$

これらは無次元量であるが弱い相互作用の結合定数はエネルギーに依存する。重心系での相互作用に関わる粒子のエネルギーを E とすると

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} \left(\frac{E}{100\text{GeV}} \right)^2 = 0.115, \quad (1.115)$$

で与えられ 100GeV 程度のエネルギースケールで他の相互作用と同程度の結合の強さになる。一方、電子の静止質量エネルギー程度では、

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} \left(\frac{E}{1\text{MeV}} \right)^2 \sim 1.15 \times 10^{-11}$$

となり他の相互作用と比べて非常に弱い事が分かる。

弱い相互作用の反応断面積は以下のように計算される。

$$\sigma_{wk} = \left[\frac{\hbar c}{E} \frac{G_F}{(\hbar c)^3} \left(\frac{E}{1\text{MeV}} \right) \right]^2 \sim 0.5 \times 10^{-43} \text{cm}^2. \quad (1.116)$$

1.2.4 ニュートリノ脱結合

宇宙の初期では、小さな領域に物質が密集しており、密度が高く、全ての反応の反応率が大きく熱平衡状態を維持出来ていた。しかし、宇宙の半径が膨張するにつれて密度が低下し各反応率が低下する。ある反応の反応率が小さくなりもはや周囲の物質との熱平衡状態を維持出来なくなる時期のことを脱結合と呼ぶ。宇宙の進化の速度に反応がついていけなくなり落ちこぼれるのである。

宇宙の温度が $10^{11} - 10^{10}\text{K}$ の頃の進化を扱う。ニュートリノと電子、陽電子の相互作用の反応率を宇宙膨張による状態（温度）の変化率を表すハッブルレート（ハッブル定数）と比較する。電子、陽電子の個数密度は、これらが相対論的に扱えるとして以下のように与えられる。

$$n_{e^-e^+} = 2 \times 0.2777 \frac{a_B T^3}{k_B} \sim 4.75 \times 10^{31} \left(\frac{k_B T}{1\text{MeV}} \right)^3 \text{cm}^{-3}. \quad (1.117)$$

電子、陽電子系とニュートリノの反応率、即ち反応の平均自由時間の逆数、が以下のように計算出来る。

$$\Gamma_V = n_{e^-e^+} \sigma_{wk} c = 0.05 \left(\frac{k_B T}{1\text{MeV}} \right)^5 \text{sec}^{-1}. \quad (1.118)$$

この時期は、輻射優勢期であるからハッブルレートは式 (1.102) を用いて以

下のように与えられる。

$$H = \frac{1}{2t} = 0.675 \left(\frac{k_B T}{1 \text{MeV}} \right)^2 \text{sec}^{-1}. \quad (1.119)$$

式 (1.118) と式 (1.119) の比から電子系とニュートリノの反応率とハッブルレートの比が以下のように求まる。

$$\frac{\Gamma_\nu}{H} = 0.08 \left(\frac{k_B T}{1 \text{MeV}} \right)^3. \quad (1.120)$$

この結果から宇宙の温度が 1MeV になった時には、ニュートリノと電子の反応率は宇宙の膨張率のより小さく既にこの反応が落ちこぼれており、ニュートリノと電子系は熱平衡状態を保てなくなっている事が分かる。この比が 1 になる時期は、 $k_B T \sim 2.4 \text{MeV}$ であり、この時期を境にニュートリノは宇宙の進化から落ちこぼれる。逆にこれより温度が高い宇宙では、ニュートリノは物質と熱平衡状態にあると考えてよい。温度 1MeV 以下の宇宙では、ニュートリノと物質の相互作用は切れ、自由に動き回る。即ち現在の宇宙のダークマターの一部はニュートリノである。宇宙全体のニュートリノの数 $n_\nu a^3$ が以後保存する。したがって、ニュートリノの温度 T_ν は

$$T_\nu \propto \frac{1}{a}, \quad (1.121)$$

のように宇宙膨張とともに減少する。

1.2.5 電子・陽電子対消滅

ニュートリノ脱結合以後も光子と電子、陽電子の結合は強く、互いに熱平衡状態を保つ。温度が既に電子の静止質量エネルギーと同程度になっているため電子の質量を考慮してエントロピーを評価する必要がある。式 (1.92) に式 (1.93)、式 (1.93) を代入し電子・陽電子のスピンの自由度が $g = 2$ であることを考慮するとこの時期の光子と電子、陽電子のエントロピー密度は以下式で与えられる。

$$s(T) = \frac{4a_B T^3}{3} + \frac{4}{T} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2}{h^3} dp \left(\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + \frac{p^2 c^2}{3\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} \right)$$

$$\times \frac{1}{\exp(\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}/k_B T) + 1}. \quad (1.122)$$

最初の項が光子のエントロピーであり、第二項の積分が電子・陽電子のエントロピーである。この式の右辺を光子のエントロピーでくくって以下のように整理する。

$$s(T) = \frac{4a_B T^3}{3} S(mc^2/k_B T), \quad (1.123)$$

$$S(y) \equiv 1 + \frac{45}{2\pi^4} \int_0^\infty x^2 dx \left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{3\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \times \frac{1}{\exp(\sqrt{x^2 + y^2}) + 1}. \quad (1.124)$$

$x \equiv pc/k_B T$, $y \equiv mc^2/k_B T$ である。ニュートリノ脱結合以後、光子と電子、陽電子が熱平衡にある時期のエントロピー保存則から $a^3 T^3 S(mc^2/K_B T)$ が保存することになる。電子の質量より十分温度が高い極限では式 (1.124) で $y=0$ として

$$S(0) = 1 + 2\frac{7}{8} = \frac{11}{4}, \quad (1.125)$$

となる。一方、温度が電子質量より十分低い極限では、式 (1.124) の右辺第二項が無視し得る程小さくなり、電子陽電子のエントロピーは無視し得る程小さくなる。したがって、光子と電子・陽電子系のエントロピー保存則から、 $k_B T \gg mc^2$ のある時期の光子の温度 T と $k_B \tilde{T} \ll mc^2$ のある時期の光子の温度 \tilde{T} の間の次の関係が求まる。

$$a^3 T^3 S(0) = \tilde{a}^3 \tilde{T}^3 S(\infty), \\ \tilde{T} = \frac{a}{\tilde{a}} \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} T. \quad (1.126)$$

光子の温度が $(\frac{11}{4})^{1/3}$ 断熱膨張で期待されるより高くなっているのは、電子・陽電子の対消滅によって生じたエントロピー分が全て光子のエントロピーに変わったからである。温度が低くなると電子・陽電子対消滅



は電子の運動エネルギーによらず起きるが、光子・光子衝突による電子・陽電子対生成

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+, \quad (1.128)$$

が起きるには光子対のエネルギーが電子・陽電子の静止質量エネルギーを超えていなければならない。その為宇宙の温度が低くなると反応 (1.127) が一方的に進み、反応 (1.128) が切れる。これが電子・陽電子のエントロピーが光子のエントロピーに変換される理由である。

電子静止質量エネルギーより十分高温な時は、ニュートリノと光子は熱平衡にあり同じ温度にあったと考えられるので $T_\nu = T$ である。スケール因子が \tilde{a} となった時のニュートリノの温度を \tilde{T}_ν とすると式 (1.126) から

$$\tilde{T} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} \tilde{T}_\nu, \quad (1.129)$$

のように光子とニュートリノの温度の関係式を得る。電子陽電子対消滅が起きる以前にニュートリノの脱結合が起きるため電子陽電子対消滅で発生したエントロピーがニュートリノにいく事が無く全てに光子に受け渡されるため、宇宙背景放射の温度が宇宙背景ニュートリノの温度より高くなるのである。

この節の最後に宇宙背景ニュートリノ個数密度を求める。ニュートリノ振動の実験からニュートリノは有限の質量を持っていることが分かっている。しかし、その質量は 0.1eV 程度かそれ以下と非常に軽くニュートリノ脱結合が起きた宇宙の温度が $k_B T \sim 1\text{MeV}$ 頃には、相対論的粒子即ちマクスレス粒子と扱って良い。その頃のニュートリノ 1 世代分 (反粒子も含む) の背景ニュートリノの個数密度は以下のように書ける。

$$n_\nu(T) = \frac{3}{4} \frac{30\zeta(3)}{\pi^4} \frac{a_B T^3}{k_B}. \quad (1.130)$$

この式の 3/4 の因子は、フェルミ粒子性から来るもので、この因子以降の量は温度 T の黒体放射の光子数密度である。脱結合以後、宇宙全体に含まれる宇宙背景ニュートリノの個数は変わらない。現在のニュートリノの個数密度を $n_{\nu,0}$ とすると

$$n_{\nu,0}a_0^3 = n_{\nu}(T)a^3, \quad (1.131)$$

が成り立つ。この粒子数保存の式は、ニュートリノが質量を持つか否かに寄らず成り立つ。即ち現在の宇宙背景ニュートリノの個数密度は、ニュートリノが質量を持つか否かに寄らない。そこでニュートリノがマクスレス粒子であるとして計算する。ニュートリノがマクスレスだとすると現在の宇宙背景ニュートリノの温度は

$$T_{\nu 0} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_{CMB,0} = 1.945\text{K} \quad (1.132)$$

となる。したがって、現在の宇宙における宇宙背景ニュートリノの個数密度は1世代あたり

$$\begin{aligned} n_{\nu 0} &= \frac{3}{4} \frac{30\zeta(3)}{\pi^4} \frac{a_B T_{\nu,0}^3}{k_B} \\ &= \frac{3}{4} \frac{4}{11} n_{CMB,0} = 112\text{cm}^{-3}, \end{aligned} \quad (1.133)$$

となる。宇宙の物質密度 (1.40) が全て3世代の内の1世代のニュートリノが担うためには、そのニュートリノの質量が14eVである必要がある。

1.2.6 軽元素合成・理論

宇宙に存在する He^4 の質量全元素の質量 (バリオン質量) に対する存在比率は、

$$Y = \frac{M_{\text{He}^4}}{M_b} \sim 0.24, \quad (1.134)$$

で至る所一定である。この Y のユビキタス性は、宇宙開闢から数分後に重水素生成が急激に進行して、安定な元素である He^4 が一気に生成されたとするビッグバン軽元素合成モデルによって説明される。

ビッグバン軽元素合成過程の考察に進む。宇宙の温度が電子の静止質量エネルギー程度、即ち $k_B T \sim m_e c^2$ の時期を扱う。ベータ崩壊で中性子が陽子に変換する反応は三通りあり、全反応率は以下のように書ける。

$$\lambda_{n \rightarrow p} = \lambda(n + \nu_e \rightarrow p + e^-) + \lambda(n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}_e) + \lambda(n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e).$$

(1.135)

右辺第一項の反応率は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\lambda(n + \nu_e \rightarrow p + e^-) &= \int_0^\infty \frac{4\pi p_\nu^2}{h^3} \frac{dp_\nu}{1 + e^{\frac{p_\nu c}{k_B T_\nu}}} A \int \delta(Q + p_\nu c - E_e) \frac{8\pi p_e^2}{h^3} dp_e \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{E_e}{k_B T}}}\right). \\
&= \int_0^\infty \frac{4\pi p_\nu^2}{h^3} \frac{dp_\nu}{1 + e^{\frac{p_\nu c}{k_B T_\nu}}} A \int \delta(Q + p_\nu c - E_e) \frac{8\pi \sqrt{E_e^2 - (mc^2)^2}}{h^3 c^3} E_e dE_e \frac{1}{1 + e^{\frac{E_e}{k_B T}}}. \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2 A}{h^6 c^3} \int_0^\infty p_\nu^2 dp_\nu [(Q + p_\nu c)^2 - (mc^2)^2]^{1/2} \frac{Q + p_\nu c}{1 + e^{\frac{p_\nu c}{k_B T_\nu}}} \frac{1}{1 + e^{-\frac{(Q + p_\nu c)}{k_B T}}} \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2 A}{h^6 c^6} \int_0^\infty dE_\nu E_\nu^2 [(Q + E_\nu)^2 - (mc^2)^2]^{1/2} \frac{Q + E_\nu}{1 + e^{\frac{E_\nu}{k_B T_\nu}}} \frac{1}{1 + e^{-\frac{(Q + E_\nu)}{k_B T}}} \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2 A}{h^6 c^6} (k_B T_\nu)^5 \int_0^\infty dx \left[1 - \frac{Y^2}{(x + X)^2}\right]^{1/2} \frac{x^2 (X + x)^2}{1 + e^x} \frac{1}{1 + e^{-\frac{X}{T}(X+x)}}
\end{aligned} \tag{1.136}$$

ここで Q は、中性子と陽子の質量エネルギー差で

$$Q = 1.293 \text{ MeV}, \tag{1.137}$$

である。ニュートリノ運動量での積分の項は、反応率が中性子に衝突するニュートリノの数密度に比例して増加することから来ている。電子の運動量での積分の括弧内の項は、電子がフェルミオンであることから、状態 E_e の内既に専有されている状態に放出された電子が入る事ができないことから、反応率が反応後放出される電子の空き状態の割合に比例することを表している。4番目の等号では $E_\nu = p_\nu c$ とし、ニュートリノの質量がゼロと近似した。最後の式変形では導入した変数の定義は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
x &\equiv \frac{E_\nu}{k_B T_\nu}, \\
X &\equiv \frac{Q}{k_B T_\nu}, \\
Y &\equiv \frac{m_e c^2}{k_B T_\nu}.
\end{aligned} \tag{1.138}$$

式 (1.135) の二項目の反応率は以下のように計算出来る。

$$\begin{aligned}
\lambda(n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}_e) &= \int_0^\infty \frac{8\pi p_e^2}{h^3} \frac{dp_e}{1 + e^{\frac{E_e}{k_B T}}} A \int \delta(Q + E_e - p_\nu c) \frac{4\pi p_\nu^2}{h^3} dp_\nu \frac{1}{1 + e^{\frac{-p_\nu c}{k_B T_\nu}}}, \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2 A}{h^6 c^6} \int_{m_e c^2}^\infty (E_e^2 - (m_e c^2)^2)^{1/2} E_e dE_e \int_0^\infty E_\nu^2 dE_\nu \frac{\delta(Q + E_e - E_\nu)}{1 + e^{\frac{E_e}{k_B T}}} \frac{1}{1 + e^{\frac{-E_\nu}{k_B T_\nu}}}, \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2 A}{h^6 c^6} \int_{Q+m_e c^2}^\infty dE_\nu E_\nu^2 ((E_\nu - Q)^2 - (m_e c^2)^2)^{1/2} (E_\nu - Q) \frac{1}{1 + e^{\frac{E_\nu - Q}{k_B T}}} \frac{1}{1 + e^{\frac{-E_\nu}{k_B T_\nu}}}, \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2 A}{h^6 c^6} (k_B T_\nu)^5 \int_{-\infty}^{\frac{Q+m_e c^2}{k_B T_\nu}} dx \left[1 - \frac{Y^2}{(x+X)^2} \right]^{1/2} \frac{x^2 (x+X)^2}{1 + e^{-\frac{T_\nu}{T}(x+x)}} \frac{1}{1 + e^x}
\end{aligned} \tag{1.139}$$

二つ目の等号では、電子のエネルギーは電子の静止質量エネルギー以上で無ければならないことから電子のエネルギーによる積分の下限値が決まっている。三つ目の等号では、中性子に陽電子が衝突して、生成される反ニュートリノのエネルギーは、中性子と陽子の静止質量エネルギーの差 Q と陽電子の質量エネルギー $m_e c^2$ を下回らない事から積分の下限値が決まっている。ここで陽子、中性子の運動エネルギーは無視出来るとした。最後の式変形では、式 (1.138) に与えた変数を用いて変形した。ただし、ここでは $x = -E_\nu/k_B T_\nu$ である。

式 (1.135) の三項目はベータ崩壊であり、その反応率は以下のように計算出来る。

$$\begin{aligned}
\lambda(n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e) &= \int_0^\infty \frac{8\pi p_e^2}{h^3} \frac{dp_e}{1 + e^{\frac{-E_e}{k_B T}}} A \int \delta(Q - E_e - p_\nu c) \frac{4\pi p_\nu^2}{h^3} dp_\nu \frac{1}{1 + e^{\frac{-p_\nu c}{k_B T_\nu}}}, \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2 A}{h^6 c^6} \int_{m_e c^2}^\infty (E_e^2 - (m_e c^2)^2)^{1/2} E_e dE_e \int_0^\infty E_\nu^2 dE_\nu \frac{\delta(Q - E_e - E_\nu)}{1 + e^{\frac{-E_e}{k_B T}}} \frac{1}{1 + e^{\frac{-E_\nu}{k_B T_\nu}}}, \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2 A}{h^6 c^6} \int_0^{Q-m_e c^2} dE_\nu E_\nu^2 ((Q - E_\nu)^2 - (m_e c^2)^2)^{1/2} (Q - E_\nu) \frac{1}{1 + e^{\frac{-Q - E_\nu}{k_B T}}} \frac{1}{1 + e^{\frac{-E_\nu}{k_B T_\nu}}}, \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2 A}{h^6 c^6} (k_B T_\nu)^5 \int_{-\frac{Q-m_e c^2}{k_B T_\nu}}^0 dx \left[1 - \frac{Y^2}{(x+X)^2} \right]^{1/2} \frac{x^2 (x+X)^2}{1 + e^{-\frac{T_\nu}{T}(x+x)}} \frac{1}{1 + e^x}
\end{aligned} \tag{1.140}$$

以上から中性子が陽子に変換される反応率は以下のようにまとめて書ける。

$$\begin{aligned}
\lambda_{n \rightarrow p} &= 2 \frac{(4\pi)^2}{h^6 c^6} (k_B T_V)^5 A \int_L dx \left[1 - \frac{Y^2}{(x+X)^2} \right]^{1/2} \frac{x^2(x+X)^2}{1 + e^{-\frac{T_V}{Y}(X+x)}} \frac{1}{1 + e^x} \\
&= \frac{1}{\lambda_0 \tau_n} \left(\frac{k_B T_V}{m_e c^2} \right)^5 \int_L dx \left[1 - \frac{Y^2}{(x+X)^2} \right]^{1/2} \frac{x^2(x+X)^2}{1 + e^{-\frac{T_V}{Y}(X+x)}} \frac{1}{1 + e^x}
\end{aligned} \tag{1.141}$$

但し積分区間 L は、 $-X-Y \sim -X+Y$ の区間を除く $-\infty \sim \infty$ の範囲である。

次に逆反応 $p \rightarrow n$ の反応率を求める。

$$\lambda_{p \rightarrow n} = \lambda(p + e^- \rightarrow n + \nu_e) + \lambda(p + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+) + \lambda(p + e^- + \bar{\nu}_e \rightarrow n). \tag{1.142}$$

第一項は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\lambda(p + e^- \rightarrow n + \nu_e) &= \int_0^\infty \frac{8\pi p_e^2}{h^3} \frac{dp_e}{1 + e^{-\frac{E_e}{k_B T}}} A \int_0^\infty \delta(E_e - Q - p\nu c) \frac{4\pi p_\nu^2}{h^3} dp_\nu \frac{1}{1 + e^{-\frac{p\nu c}{k_B T_V}}} \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2}{h^6 c^6} A \int_0^\infty ((Q + E_\nu)^2 - (m_e c^2)^2)^{1/2} (Q + E_\nu) E_\nu^2 dE_\nu \frac{1}{1 + e^{(Q+E_\nu)/k_B T}} \frac{1}{1 + e^{-E_\nu/k_B T_V}} \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2}{h^6 c^6} (k_B T_V)^5 A \int_0^\infty dx \left[1 - \frac{Y^2}{(X+x)^2} \right]^{1/2} \frac{x^2(X+x)^2}{1 + e^{\frac{T_V}{Y}(X+x)}} \frac{1}{1 + e^{-x}}
\end{aligned} \tag{1.143}$$

第二項は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\lambda(p + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+) &= \int_0^\infty \frac{8\pi p_e^2}{h^3} \frac{dp_e}{1 + e^{-\frac{E_e}{k_B T}}} A \int_0^\infty \delta(p\nu c - Q - E_e) \frac{4\pi p_\nu^2}{h^3} dp_\nu \frac{1}{1 + e^{\frac{p\nu c}{k_B T_V}}} \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2}{h^6 c^6} A \int_{Q+m_e c^2}^\infty ((E_\nu - Q)^2 - (m_e c^2)^2)^{1/2} (E_\nu - Q) E_\nu^2 dE_\nu \frac{1}{1 + e^{-(E_\nu-Q)/k_B T}} \frac{1}{1 + e^{E_\nu/k_B T_V}} \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2}{h^6 c^6} (k_B T_V)^5 A \int_{X+Y}^\infty dx \left[1 - \frac{Y^2}{(x-X)^2} \right]^{1/2} \frac{x^2(x-X)^2}{1 + e^{-\frac{T_V}{Y}(x-X)}} \frac{1}{1 + e^x} \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2}{h^6 c^6} (k_B T_V)^5 A \int_{-\infty}^{-X-Y} dx \left[1 - \frac{Y^2}{(x+X)^2} \right]^{1/2} \frac{x^2(x+X)^2}{1 + e^{\frac{T_V}{Y}(x+X)}} \frac{1}{1 + e^{-x}}
\end{aligned} \tag{1.144}$$

二つ目の等号では、この反応を引き起こすのに必要な仕事関数 $Q + m_e c^2$ 以上のエネルギーを持ったニュートリノでなければならない事から積分の下

限值が決まった。最後の変形では、 $x = -E_\nu/k_B T_\nu$ とした。第三項は逆ベータ崩壊で、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\lambda(p + e^- + \bar{\nu}_e \rightarrow n) &= \int_0^\infty \frac{8\pi p_e^2}{h^3} \frac{dp_e}{1 + e^{\frac{E_e}{k_B T}}} A \int_0^\infty \delta(p_\nu c + E_e - Q) \frac{4\pi p_\nu^2}{h^3} dp_\nu \frac{1}{1 + e^{\frac{p_\nu c}{k_B T_\nu}}} \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2}{h^6 c^6} A \int_0^{Q - m_e c^2} ((Q - E_\nu)^2 - (m_e c^2)^2)^{1/2} (Q - E_\nu) E_\nu^2 dE_\nu \frac{1}{1 + e^{(Q - E_\nu)/k_B T}} \frac{1}{1 + e^{E_\nu/k_B T_\nu}} \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2}{h^6 c^6} (k_B T_\nu)^5 A \int_0^{X - Y} dx \left[1 - \frac{Y^2}{(X - x)^2} \right]^{1/2} \frac{x^2 (X - x)^2}{1 + e^{\frac{T_\nu}{T}(X - x)}} \frac{1}{1 + e^x} \\
&= 2 \frac{(4\pi)^2}{h^6 c^6} (k_B T_\nu)^5 A \int_{-X + Y}^0 dx \left[1 - \frac{Y^2}{(X + x)^2} \right]^{1/2} \frac{x^2 (X + x)^2}{1 + e^{\frac{T_\nu}{T}(X + x)}} \frac{1}{1 + e^{-x}}
\end{aligned} \tag{1.145}$$

二つ目の等号では、電子、ニュートリノによって陽子に与えられるエネルギーが丁度中性子と陽子の質量差のエネルギーになっていなければならない事から積分の範囲が決まっている。最後の変形では、 $x = -E_\nu/k_B T_\nu$ とした。

以上から陽子が中性子に変換される反応率は以下のようにまとめて書ける。

$$\lambda_{p \rightarrow n} = 2 \frac{(4\pi)^2}{h^6 c^6} (k_B T_\nu)^5 A \int_L dx \left[1 - \frac{Y^2}{(X + x)^2} \right]^{1/2} \frac{x^2 (X + x)^2}{1 + e^{\frac{T_\nu}{T}(X + x)}} \frac{1}{1 + e^{-x}} \tag{1.146}$$

但し積分区間 L は、 $-X - Y \sim -X + Y$ の区間を除く $-\infty \sim \infty$ の範囲である。

$T_\nu = T$ とすると式 (1.146) の被積分関数の分母は以下のように整理できる。

$$\begin{aligned}
(1 + e^{X+x})(1 + e^{-x}) &= 1 + e^{X+x} + e^{-x} + e^X \\
&= e^X (e^{-X} + e^x + e^{-(X+x)} + 1) \\
&= e^X (1 + e^{-(X+x)})(1 + e^x)
\end{aligned}$$

最後の式の括弧内は式 (1.141) の被積分関数の分母と等しい。したがって、この時陽子から中性子への変換率は、中性子から陽子への変換率に対して以下の式のように

$$\lambda_{p \rightarrow n} = e^{-\frac{Q}{k_B T}} \lambda_{n \rightarrow p}. \quad (1.147)$$

$e^{-\frac{Q}{k_B T}}$ 倍小さい。これは、陽子が中性子に変換されるには、敷居エネルギー Q 以上のエネルギーが陽子に与えられなければならないため、十分なエネルギーを持った電子、陽電子、ニュートリノの数の割合が大凡 $e^{-\frac{Q}{k_B T}}$ に比例していることに起因している。

陽子と中性子の互いの変換反応による中性子の割合の進化を記述する方程式を導出する。中性子の数密度 n_n 、陽子の数密度 n_p として中性子の数の全核子に対する割合

$$X_n = \frac{n_n}{n_n + n_p}, \quad (1.148)$$

を定義する。全バリオンの数密度 n_b は以下のように定義される。

$$n_b = n_n + n_p. \quad (1.149)$$

中性子の数の進化を表す方程式は以下ようになる。

$$\frac{dn_n a^3}{dt} = n_p a^3 \lambda_{p \rightarrow n} - n_n a^3 \lambda_{n \rightarrow p}. \quad (1.150)$$

全バリオン数は保存するので以下の式が成り立つ。

$$\frac{d(n_n + n_p) a^3}{dt} = 0. \quad (1.151)$$

この式を用いて式 (1.150) を書き換えると以下の結果を得る。

$$\frac{dX_n}{dt} = (1 - X_n) \lambda_{p \rightarrow n} - X_n \lambda_{n \rightarrow p}. \quad (1.152)$$

この方程式の解が、中性子の割合の進化を与える。この方程式を宇宙年齢の代わりに宇宙の温度を時間経過の指標として使って書き直す。そこで次の変数を導入する。

$$x \equiv \frac{Q}{k_b T}. \quad (1.153)$$

すると $d/dt = (d/dx)(dx/dt) = -(\dot{T}/T)x(d/dx) = Hx(d/dx)$ であるから式 (1.152) は以下のように変形される。

$$\frac{dX_n}{d \ln x} = \frac{\lambda_{n \rightarrow p}}{H} \left(e^{-\frac{Q}{k_B T}} - \left(1 + e^{-\frac{Q}{k_B T}} \right) X_n \right). \quad (1.154)$$

反応平衡が満たされる時は、右辺の括弧内がゼロ、即ち中性子の生成率と分解率がバランスする。そこで反応平衡時の中性子存在比を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} X_{n,eq} &= \frac{\lambda_{p \rightarrow n}}{\lambda_{n \rightarrow p} + \lambda_{p \rightarrow n}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{\frac{Q}{k_B T}}} \end{aligned} \quad (1.155)$$

先に進む前にこの式の物理的意味を味わっておこう。この式から反応平衡時の陽子の存在比が以下のように書けることがわかる。

$$X_{p,eq} = 1 - X_{n,eq} = \frac{e^{\frac{Q}{k_B T}}}{1 + e^{\frac{Q}{k_B T}}} = e^{\frac{Q}{k_B T}} X_{n,eq}, \quad (1.156)$$

$$X_{n,eq} = e^{-\frac{Q}{k_B T}} X_{p,eq}. \quad (1.157)$$

これらの式は、互いに同値なことを表しているが、二つ目の式 (1.157) は反応平衡では中性子の数が陽子の数の $e^{-\frac{Q}{k_B T}}$ 倍小さいことを表している。中性子が陽子よりエネルギー Q だけ高い励起状態と捉えると熱平衡では存在量がボルツマン因子 $e^{-\frac{Q}{k_B T}}$ 倍だけ小さいことを表していると捉えることができる。この結果は、反応率の比が式 (1.147) で結ばれることの当然の帰結である。即ち式 (1.147) は、中性子は陽子よりエネルギー Q だけ高い状態であるため、その分作りづらいことを表していると捉えることができる。これを用いて方程式 (1.154) を変形する。

$$\frac{dX_n}{d \ln x} = \frac{\lambda_{n \rightarrow p} + \lambda_{p \rightarrow n}}{H} (X_{n,eq} - X_n). \quad (1.158)$$

さらに両辺を X_n で割って、以下の中性子存在率の相対変化率の発展方程式を得る。

$$\frac{d \ln X_n}{d \ln x} = \frac{\lambda_{n \rightarrow p} + \lambda_{p \rightarrow n}}{H} \left(\frac{X_{n,eq}}{X_n} - 1 \right). \quad (1.159)$$

以下では、方程式 (1.159) で与えられる中性子の割合の進化の様子の概

略をこの方程式を近似的に扱う事で調べる。まず $k_B T \gg Q$ とする。この時 $T_\nu = T$ であり、電子・陽電子対消滅以降のニュートリノと光子の温度の差は無視できる。この時期では、式 (1.141) および式 (1.146) において、 $X = Y = 0$ と近似できる。式 (1.141) は、以下のように計算される。

$$\begin{aligned}\lambda_{n \rightarrow p} &= \frac{1}{\lambda_0 \tau_n} \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^5 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^4}{1+e^{-x}} \frac{1}{1+e^x} \\ &= \frac{1}{\lambda_0 \tau_n} \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right) \frac{7}{15} \pi^4 = 0.9 \left(\frac{k_B T}{1 \text{MeV}} \right)^5 \text{sec}^{-1}\end{aligned}\quad (1.160)$$

ここで積分範囲から除いていた $-X - Y \sim -X + Y$ の範囲が小さく、この範囲からの寄与が無視し得るとして積分範囲を $-\infty \sim \infty$ で連続にとった。方程式 (1.154) の右辺の括弧の前の係数の値を調べると、ハッブル膨張率 (1.119) を用いて、以下のようにもとまる。

$$\frac{\lambda_{n \rightarrow p} + \lambda_{p \rightarrow n}}{H} \sim 2.7 \left(\frac{k_B T}{1 \text{MeV}} \right)^3. \quad (1.161)$$

したがって、 $k_B T \gg 1 \text{MeV}$ の頃は、方程式 (1.159) の右辺の括弧の前の係数が 1 より十分大きく、左辺の変化率が極端に大きな値を取らないためには、右辺の括弧の中が十分 1 より小さくならなければならない。したがって、中性子存在比は平衡分布で良い近似で与えられ $X_n = X_{n,eq}$ である。即ち、反応率がハッブル膨張率より十分大きいときは、反応平衡によって中性子存在比が決まる。方程式 (1.159) の右辺の括弧の前の係数は温度の 3 乗に比例しており、温度が下がると急激に反応率が下がり、反応平衡が切れることを示している。この比が丁度 1 になる頃の温度は、 $k_B T = 0.75 \text{MeV}$ であり、これ以下に冷えると、もはや反応平衡は保たれなくなり中性子存在比は、この方程式を解かなければ求まらない。さらに温度が冷えるとこの係数はゼロに近づき、右辺はゼロとなり中性子の存在比 X_n の時間変化が止まる。ここでは簡単のため、陽子・中性子変換反応は、 0.75MeV まで反応平衡が保たれ、この時に反応が切れてこの時の中性子の割合でフリーズするとして扱う。この時の宇宙年齢は 1.32sec である。丁度、反応が切れる時の中性子の割合は以下のように求まる。

$$X_n = 0.151. \quad (1.162)$$

最後の等号では、反応平衡が切れる時の温度 0.75MeV を代入して陽子・中性子変換反応の反応平衡が切れ凍結された中性子の割合を導出した。二つ目の等号では、 $T_\nu = T$ としたが、それが厳密に成り立つのは互いに熱平衡状態にあるニュートリノ脱結合期 2.4MeV ころのまでである。 $T \sim 1\text{MeV}$ の頃は、既に電子・陽電子の対消滅による光子の加熱が始まっており、 T_ν と T の差が現れ始めている。この時光子・電子系のエントロピーは式 (1.124) から以下のように求まる。

$$s(1\text{MeV}) = S(0.511) \frac{4a_B T^3}{3} = 2.705 \times \frac{4a_B T^3}{3}$$

ともとまる。一方、この時のニュートリノの温度 T_ν は、電子の質量を無視した時の光子・電子系のエントロピー

$$s_0 = S(0) \frac{4a_B T_\nu^3}{3} = 2.75 \times \frac{4a_B T_\nu^3}{3}$$

が $s(1\text{MeV})$ に等しいとすることから求まる。これらから宇宙の温度が 1MeV の時の光子とニュートリノの温度の比が以下のようにもとまる。

$$\frac{T_\nu}{T} = 0.99545$$

であり、その差は非常に小さい。したがって、 1MeV の頃までは $T_\nu = T$ の近似は悪い近似ではない。

反応平衡が切れた後は、中性子の割合は、その時の値 $X_n \sim 0.151$ からベータ崩壊により減少するのみで陽子から中性子を生成する反応は起こらない。ベータ崩壊の秒読みが陽子・中性子交換反応が切れた直後から始まったとすると以下の式で中性子の存在比の進化が記述される。

$$X_n = 0.151 \exp\left(-\frac{t - 1.32}{\tau_n}\right). \quad (1.163)$$

宇宙のヘリウムの質量存在比 (1.134) から、現在の宇宙の中性子が占めるバリオン数中の割合が $X_n = 0.12$ であることが分かる。これから、式 (1.163) より、 $t = 210\text{sec}$ の時ヘリウム合成が一気に進めば良い事が分かる。軽元素合成が起こる時期の宇宙の温度と宇宙年齢は以下の関係式で結ばれる。

$$t = 210 \text{sec} \left(\frac{0.079 \text{MeV}}{k_B T} \right)^2. \quad (1.164)$$

したがって、ハッブルレートは以下ようになる。

$$H = 0.0068 \left(\frac{k_B T}{0.1 \text{MeV}} \right)^2 \text{sec}^{-1}. \quad (1.165)$$

この時期は宇宙は輻射優勢であり、エネルギー密度は式 (1.24) から以下のように求まる。

$$\rho_r(T) = 83 \left(\frac{k_B T}{0.1 \text{MeV}} \right)^4 \text{g/cm}^3. \quad (1.166)$$

フリードマン方程式 (1.30) より

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_r$$

であり、輻射優勢であることから $H = 1/2t$ であることを代入して式 (1.164) を求めた。したがって、軽元素合成が起こる時期の宇宙の温度は、

$$\begin{aligned} k_B T &= 0.079 \text{MeV}, \\ T &= 9.2 \times 10^8 \text{K}, \end{aligned} \quad (1.167)$$

であることが分かる。

軽元素合成の起こる時期がどのような物理過程で決まっているのか以下で説明する。中性子は陽子と結合し重水素になろうとするが、宇宙背景放射の光子により結合が切れ中々先に進んでヘリウムを形成することが出来ない。この時期の宇宙の密度は以下で示す式 (1.177) 程度で 1cc あたりアボガドロ数の十分の一程度でありこれは地球大気の密度とほぼ同程度ある。非常に希薄であり、原子の 2 体衝突による反応のみが、元素合成過程として起こりうる。ヘリウム 4 を生成するには、まず重水素が生成されなければならず、重水素生成の進行が妨げられている限り、反応が先に進みヘリウム 4 が生成されることは無い。一方、中性子はベータ崩壊により数が減っていく。ヘリウムの存在比 $Y = 0.24$ を説明するには、 $X_n = Y/2 = 0.12$ になった時に重水素の生成が進み、ヘリウム合成が進めばよい。

ビッグバン軽元素合成は、バリオン数とフォトン数の比を制限する観測

量として用いられる。ここまでの議論からこれらの比は、電子・陽電子対消滅期以降保存する。そこで以下のパラメータを導入する。

$$\eta \equiv \frac{n_b}{n_\gamma}. \quad (1.168)$$

現在の宇宙が平坦で物質が全てバリオンとしてもバリオン数密度は高々

$$n_{b0} \sim 1.88 \times 10^{-29} / (1.67 \times 10^{-24}) \sim 10^{-5} h^2 \text{cm}^{-3}, \quad (1.169)$$

であり宇宙背景放射の光子数密度 410cm^{-3} と比を取ると

$$\eta \sim 2.5 \times 10^{-8}$$

と小さな値を取る。実際にはバリオンの占める割合が数%であることを考慮すると光子・バリオン比は高々 10^{-9} 程度の量である。

重水素の生成反応



重水素を破壊するプロセスは、



である。中性子1個あたりの重水素(重陽子)生成率を導出する。式(1.171)の反応断面積は、大凡電荷 $+e$ で質量 $2m_p$ の粒子と光子のトムソン散乱の断面積で与えられる。したがって、

$$\sigma_{DT} \sim \left(\frac{m_e}{2m_p} \right)^2 \sigma_T \sim 5 \times 10^{-32} \text{cm}^2. \quad (1.172)$$

と評価出来る。ここで $\sigma_T = 0.664 \times 10^{-24} \text{cm}^2$ は電子トムソン散乱の断面積であり、重水素の質量を陽子の質量の2倍 $2m_p$ とした。宇宙の温度が 0.1MeV の頃の光子の数密度は $3 \times 10^{28} \text{cm}^{-3}$ なので全ての CMB 光子が反応(1.171)を引き起こすとすると反応率は以下ようになる。

$$\lambda_{d\gamma} \sim 4 \times 10^7 \left(\frac{k_B T}{0.1 \text{MeV}} \right)^3 \text{sec}^{-1} \quad (1.173)$$

重水素を壊す反応率は非常に早く、重水素を壊すことができるほど高エネルギーの光子が存在すると、重水素が壊されてヘリウム4の合成が起きな

い。陽子の数密度 n_p を用いて反応率は以下のように与えられる。

$$\lambda_{pn \rightarrow d\gamma} = 4.55 \times 10^{-20} \left(\frac{n_p}{1\text{cm}^3} \right) \text{sec}^{-1}. \quad (1.174)$$

現在の宇宙のバリオン数密度を n_{b0} とする。陽子と中性子の質量の差を無視すると現在のバリオンの質量密度は $\rho_{b0} = m_p n_{b0}$ と書ける。バリオン数が保存する事から現在の宇宙のバリオンの質量密度と元素合成時期の陽子の数密度は以下の関係式で結ばれる。

$$\rho_{b0} a_0^3 = m_p \frac{n_p}{1 - X_n(t)} a^3 = \frac{m_p}{1 - X_n(t)} n_p \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-3}. \quad (1.175)$$

ここで $X_n(t)$ は宇宙年齢 t の時の中性子の存在比である。また現在のスケール因子を $a_0 = 1$ としたことを用いた。さらに電子・陽電子対消滅後を扱っているとして光子の温度変化は断熱的とした。現在の宇宙のバリオンの質量密度はバリオンの密度パラメータ（以下では現在の密度パラメータを Ω_B を使って表す）を使って以下のように表せる。

$$\rho_{b0} = 1.88 \times 10^{-29} \Omega_{B0} h^2 \text{g/cm}^3. \quad (1.176)$$

したがって、元素合成時の陽子密度は以下のように計算できる。

$$n_p = 8.67 \times 10^{23} \times (1 - X_n(t)) \left(\frac{k_B T}{1\text{MeV}} \right)^3 \Omega_B h^2. \quad (1.177)$$

η を用いて式 (1.174) を評価すると元素合成時期の重水素生成率が以下のように求まる。

$$\lambda_d = 1.44 \times 10^3 \left(\frac{k_B T}{1\text{MeV}} \right)^3 \left(\frac{\eta}{10^{-9}} \right) (1 - X_n(t)) \text{sec}^{-1}. \quad (1.178)$$

この反応率とハッブル膨張率 (1.165) との比を取ると

$$\frac{\lambda_d}{H} = 2 \times 10^3 \left(\frac{k_B T}{1\text{MeV}} \right) \left(\frac{\eta}{10^{-9}} \right) (1 - X_n(t)). \quad (1.179)$$

となり、重水素生成は宇宙膨張による状態変化に比べて十分速い反応である事が分かる。

重水素の生成が、宇宙背景放射の光子により妨げられる事で、元素合成が中々進行しないという描像に基づいて η を見積もる。重水素の結合エネ

ルギー $B_D = 2.224\text{MeV}$ を超えるエネルギーを持った光子が重水素を分解する。重水素一個あたり言い換えると中性子一個あたりの $h\nu > B_D$ の光子の数が1以下になればよい。中性子一個あたりの重水素を乖離出来る光子の数は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\frac{n_\gamma(h\nu \geq B_D)}{n_n} &= \frac{1}{n_n} \int_{B_D/c}^{\infty} \frac{8\pi p^2}{h^3} dp \frac{1}{e^{pc/k_B T} - 1} \\
&\sim \frac{1}{n_n} \frac{8\pi(k_B T)^3}{h^3 c^3} \int_{B_D/k_B T}^{\infty} x^2 e^{-x} dx \\
&= \frac{n_\gamma}{n_n} \frac{1}{\int_0^{\infty} dx x^2 / (e^x - 1)} (x_D^2 + 2x_D + 2) e^{-x_D} \\
&= \frac{0.416}{\eta X_n(t)} (x_D^2 + 2x_D + 2) e^{-x_D} \tag{1.180}
\end{aligned}$$

ここで $x_D \equiv B_D/k_B T$ であり、二つ目の等号では $x_D \gg 1$ であることを使って近似した。軽元素合成が起こる時期として $k_B T = 0.079\text{MeV}$ を代入し、この比が1になるためには

$$\eta \sim 1.75 \times 10^{-9}, \tag{1.181}$$

であれば良いことになる。ここで

$$x_D = 28.15, \tag{1.182}$$

であり、軽元素合成に関与している光子は、宇宙背景放射のウィーンテール上の方のごく一部のエリート集団である。エリート光子の数は、宇宙の温度に敏感に依存する。温度の 0.079MeV からの増減に敏感に依存して時乖離可能なエリート光子の中性子に対する割合が大きく変化する。その為軽元素合成は、ほぼピンポイントで宇宙の温度がある温度に達した時に起きる。

詳しい計算によると以下の結果を得ている。

$$\begin{aligned}
Y = 0.247 &\rightarrow \eta = 5.8 \times 10^{-10} & \Omega_B h^2 = 0.021 \\
Y = 0.24 &\rightarrow \eta = 4 \times 10^{-10} & \Omega_B h^2 = 0.0146 \\
Y = 0.232 &\rightarrow \eta = 2 \times 10^{-10} & \Omega_B h^2 = 0.0073
\end{aligned} \tag{1.183}$$

光子・バリオン比が減少する即ちバリオン数密度が減少してバリオンあた

りの光子数が増加すると、重水素生成の時期が遅れるためより多くの中性子がベータ崩壊によって失われる。そのためヘリウムの存在比が減少する。宇宙マイクロ波背景放射のスペクトルの正確な観測から光子の数密度は正確に分かっている。したがって、軽元素合成理論と観測で得られた Y を比較する事でバリオン数密度を制限することができる。光子・バリオン比とバリオン密度パラメータは以下の関係で結ばれる。

$$\eta = 4 \times 10^{-10} \left(\frac{\Omega_B h^2}{0.0146} \right). \quad (1.184)$$

重水素の生成・破壊過程の反応率は、中性子一個あたりの重水素の束縛エネルギーを超えた光子の数が、1 以下になるまで共に非常に速く、反応平衡にあると考えられる。重水素の存在量は以下の熱平衡分布で与えられる。

$$\begin{aligned} n_d &= g_d \int_0^\infty \frac{4\pi p^2}{h^3} dp \exp \left[-\frac{m_d c^2}{k_B T} - \frac{p^2}{2m_d k_B T} + \frac{\mu_d}{k_B T} \right]. \\ &= g_d e^{\mu_d/k_B T} \left(\frac{2\pi m_d k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \exp[-m_d c^2/k_B T]. \end{aligned} \quad (1.185)$$

ここで μ_d は化学ポテンシャルで陽子、中性子の化学ポテンシャルをそれぞれ μ_p, μ_n とすると

$$\mu_d = \mu_p + \mu_n, \quad (1.186)$$

で与えられる。重水素の全スピン角運動量は陽子と中性子のスピン角運動量を足したものであるから $S = 1, 0, -1$ の3つの自由度があるので統計的重みは $g_d = 3$ である。重水素の結合エネルギーを B_D とすると重水素の質量は以下のように与えられる。

$$m_d c^2 = m_p c^2 + m_n c^2 - B_D. \quad (1.187)$$

重水素の結合エネルギーは $B_D = 2.224 \text{ MeV}$ である。一般に質量数 A_i 、原子番号 Z_i の元素 i の化学ポテンシャルと質量は束縛エネルギー B_i を用いて以下のように表せる。

$$\begin{aligned} m_i c^2 &= Z_i m_p c^2 + (A_i - Z_i) m_n c^2 - B_i, \\ \mu_i &= Z_i \mu_p + (A_i - Z_i) \mu_n. \end{aligned} \quad (1.188)$$

この元素の熱平衡分布は以下のように与えられる。

$$n_i = g_i e^{\mu_i/k_B T} \left(\frac{2\pi m_i k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \exp[-m_i c^2/k_B T]. \quad (1.189)$$

陽子・中性子の熱平衡状態での個数密度は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} n_p &= g_p e^{\mu_p/k_B T} \left(\frac{2\pi m_p k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \exp[-m_p c^2/k_B T], \\ n_n &= g_n e^{\mu_n/k_B T} \left(\frac{2\pi m_n k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \exp[-m_n c^2/k_B T] \end{aligned} \quad (1.190)$$

ここで $g_p = g_n = 2$ である。陽子・中性子・重水素が熱平衡状態にあるとするとこれらの結果から以下の関係式を得る。

$$\frac{n_d}{n_p n_n} = \frac{g_d}{g_p g_n} \left(\frac{m_d}{m_p} \right)^{3/2} \left(\frac{2\pi m_n k_B T}{h^2} \right)^{-3/2} \exp[B_d/k_B T]. \quad (1.191)$$

これはサハの式と呼ばれる、熱平衡状態にある時、反応生成物と材料粒子間に成り立つ関係式である。サハの式が便利なのは、不定性の大きい化学ポテンシャルについての情報無しに、存在量を評価できる点である。この式を $m_d/m_p \sim 2$, $m_n \sim m_p$ として以下のように変形する。

$$\begin{aligned} X_d &= \frac{3}{4} n_p X_n \left(\frac{\pi m_p k_B T}{h^2} \right)^{-3/2} \exp[B_D/k_B T]. \\ &= 1 \times 10^{-13} \left(\frac{k_B T}{1 \text{ MeV}} \right)^{3/2} \left(\frac{\eta}{4 \times 10^{-10}} \right) (1 - X_n(t)) X_n(t) \exp[B_D/k_B T]. \end{aligned} \quad (1.192)$$

ここで $X_d = n_d/n_b$ である。元素合成の時の宇宙の温度を 0.079 MeV とするとその時の重水素の存在比は

$$X_d = 1.75 \times 10^{-3} \left(\frac{\eta}{1.75 \times 10^{-9}} \right), \quad (1.193)$$

である。ヘリウム4が生成されるには、トリチウム H^3 、ヘリウム 3He^3 、がまず生成されなければならない。これらの主な生成過程は



である。それぞれの反応断面積に重水素の相対速度の平均値を掛けた結果は、ここで扱っている温度の宇宙では以下のように与えられる。

$$\langle \sigma_{dd \rightarrow H^3 + np} v \rangle \sim 1.8 \times 10^{-17} \text{ cm}^3/\text{sec} \quad (1.196)$$

$$\langle \sigma_{dd \rightarrow He^3 + n} v \rangle \sim 1.6 \times 10^{-17} \text{ cm}^3/\text{sec} \quad (1.197)$$

したがって、これら二つの過程を併せた反応率は以下ようになる。

$$\lambda_{dd \rightarrow H^3 He^3} = 7.58 \times 10^2 \left(\frac{\eta}{1.75 \times 10^{-9}} \right) \left(\frac{k_B T}{0.1 \text{ MeV}} \right)^3 X_d. \quad (1.198)$$

ハッブルレートとの比は以下ようになる。

$$\frac{\lambda_{dd \rightarrow H^3 He^3}}{H} = 2 \times 10^5 \left(\frac{\eta}{1.75 \times 10^{-9}} \right) \left(\frac{k_B T}{0.1 \text{ MeV}} \right) X_d. \quad (1.199)$$

反応率がハッブルレートと等しくなるため、即ちこの比が 1 になるために必要な重水素の存在比は以下のように求まる。

$$X_d = 5 \times 10^{-6} \left(\frac{\eta}{1.75 \times 10^{-9}} \right)^{-1} \left(\frac{k_B T}{0.1 \text{ MeV}} \right)^{-1}. \quad (1.200)$$

一方サハの式 (1.192) から求まる重水素存在比は $X_n = 0.12$ として $X_d = 1.75 \times 10^{-3}$ である。 $k_B T = 0.1 \text{ MeV}$ の時、熱平衡分布から求めた存在比が $X_d \sim 6.66 \times 10^{-6}$ となり、式 (1.199) から求めたこの温度の時の重水素存在比 $X_d = 5 \times 10^{-6}$ とほぼ一致する。即ち、温度が 0.1 MeV 以下に冷えた時、始めてトリチウムやヘリウム 3 を生成するに十分な密度に重水素が達する。これらが生成されると残存している中性子が急激にこれらの同位体元素に取り込まれヘリウム 4 が生成される。トリチウムの結合エネルギーは 6.92 MeV 、ヘリウム 3 の結合エネルギーは、 7.72 MeV 、ヘリウム 4 の結合エネルギーは 28.3 MeV で何れも重水素より圧倒的に大きく、結合が強い。因に C^{12} の結合エネルギーは 92.2 MeV である。したがって、重水素の光乖離が起きない時期では、これらも一度結合すれば光子によって乖離される事は無く、この頃がヘリウム 4 の生成時期である。重水素の存在比が少なくなれば、ヘリウム合成が止まる。したがって、

$$X_d \sim 10^{-5} \left(\frac{\eta}{1.75 \times 10^{-9}} \right)^{-1}, \quad (1.201)$$

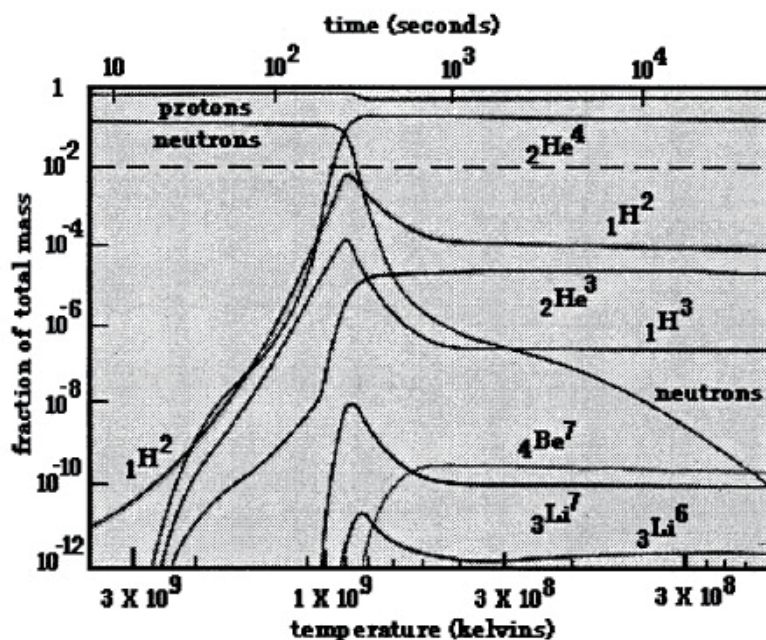


図 1.6 初期宇宙に於ける軽元素合成過程。

程度の重水素がビッグバン軽元素合成の残留物として残る。光子・バリオン比に逆比例する理由は、重水素からトリチウムやヘリウム 3 が生成される反応率が重水素の密度に比例しており、重水素の密度はバリオンの密度と重水素の存在比のかけ算であり、二つを掛けた結果が一定であれ、という条件から来ている。トリチウムは不安定な核でありベータ崩壊によりヘリウム 3He^3 に変換される。

図 1.6 にこの時期に起きる軽元素合成過程による各元素の存在比の進化の理論計算の結果を示した。図 1.7 には、ビッグバン元素合成過程で生成される各軽元素の存在比のバリオン密度依存性を示した。ニュートリノの世代数は 3 世代と考えられているが世代数を一般の N_{eff} とする。 He^4 の η 依存性を示すラインは N_{eff} が増えると左にズレ、 N_{eff} が減少すると右にズレる。この結果は以下のように理解出来る。世代数が増えると宇宙のエネルギー

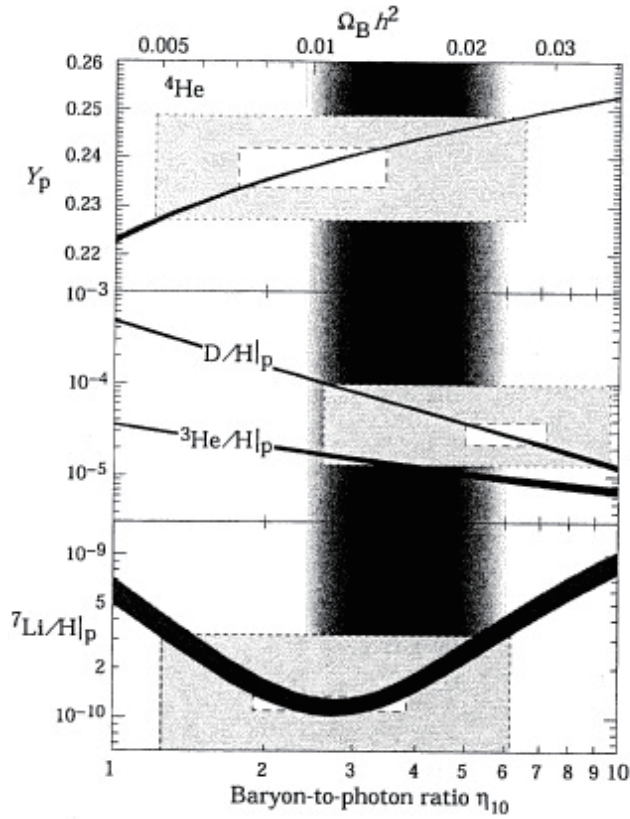


図 1.7 ビッグバン軽元素合成：軽元素存在比のバリオン密度依存性。

ギー密度が増加する。即ち、温度が同じでもハッブルレートが増加し、宇宙年齢が短くなる。ベータ崩壊で $X_n = 0.12$ なるまでに掛かる時間は変わらない。元素合成が起きる時の宇宙の温度が下がる。その結果、重水素を乖離できるエリート光子の数が減る。減少したエリート光子で十分乖離できるだけの重水素量になるようにバリオンの量が減少しなければならない。その結果 η が減少し、ラインが左にズレる。 ${}^7\text{Li}$ は $\eta < 3 \times 10^{-10}$ のレンジでは、 ${}^4\text{He} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^7\text{Li} + \gamma$ で生成され、 $\eta > 3 \times 10^{-10}$ のレンジでは ${}^4\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$ の後 ${}^7\text{Be}$ がベータ崩壊して生成される。このため $\eta \sim 3 \times 10^{-10}$ に ${}^7\text{Li}$ アブダンスに最小値が現れる。

1.2.7 軽元素合成・観測

図 1.9 に Izotov and Thuan (ApJ 500, 188-216, 1998) によって取得された系外銀河 Mrk1199 の HII region のヘリウム 4 の吸収線の測定結果を示した。メタル含有量が少ない銀河の HII 領域のスペクトルを取得してヘリウ

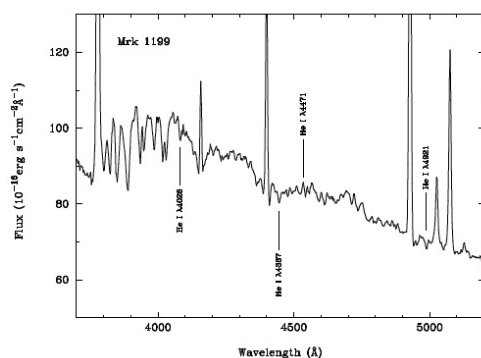


図 1.8 星間物質中のヘリウム 4 の吸収線。

ムアバンドスを測定した。図 1.9 に複数の天体の測定結果をコンパイル

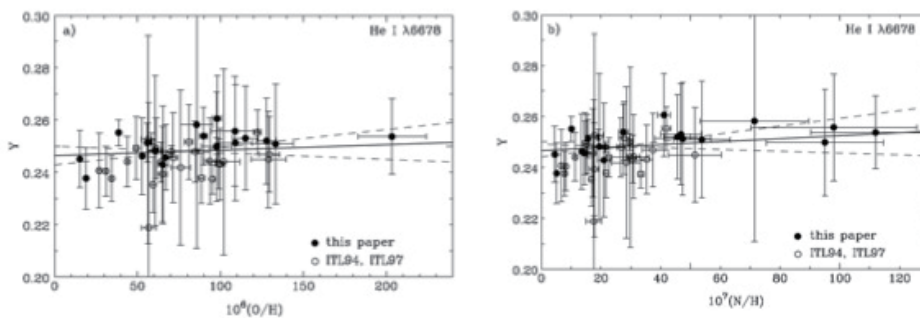


図 1.9 Izotov and Thuan の測定による Y パラメタの O,N アバンドス依存性。

したメタルアバンドスに対する Y パラメタの依存性の結果を示した。

彼らは、この結果から原始 He^4 アバンダンスの測定結果として以下の値を導出した。

$$Y = 0.245 \pm 0.004. \quad (1.202)$$

図 1.10 に Olive and Steigman (ApJ Suppl. 97, 49, 1995) が複数の系外銀河

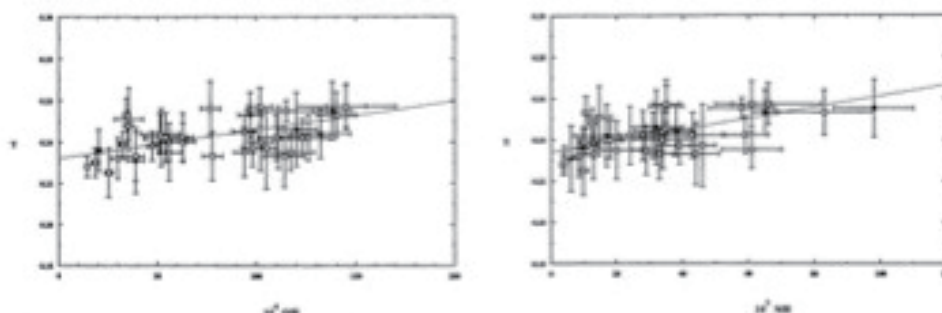


図 1.10 Olive and Steigman の測定による Y パラメタの O, N アバンダンス依存性。

の HII region の分光測定から得たメタルアバンダンスに対する Y パラメタの依存性の結果を示した。彼らはこの結果から原始 He^4 アバンダンスの測定結果として以下の値を導出した。

$$Y = 0.232 \pm 0.003. \quad (1.203)$$

このように 20 年前は、原始ヘリウムアバンダンスの測定結果が二つの派に分かれていた。その後 2000 年代に入って Peimbert 達 (Peimbert, Luridiana and Peimbert, 2007, astro-ph 0701580) によって更新されたアトミックデータ、即ちヘリウムのラインの理論モデルの更新データを使って再解析され原始ヘリウムアバンダンスとして以下の結果がしめされた。

$$Y = 0.2477 \pm 0.0029. \quad (1.204)$$

ビッグバン元素合成理論からこの値に該当する η を導出すると

$$\eta = (5.813 \pm 1.81) \times 10^{-10}, \quad (1.205)$$

となりバリオン密度パラメータは以下のように制限される。

$$\Omega_B h^2 = 0.0212 \pm 0.0066. \quad (1.206)$$

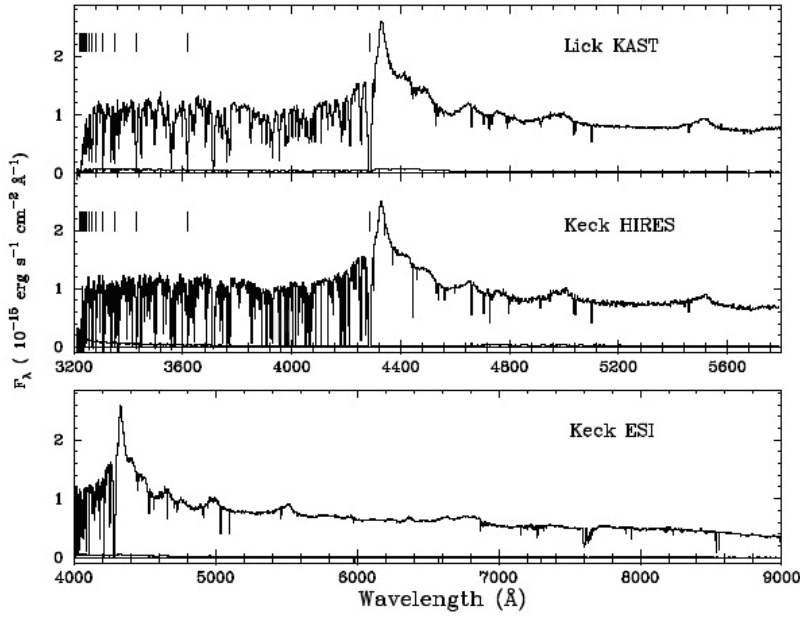


図 1.11 QSO 吸収線。Q1243+3057 の視線方向の吸収線系のスペクトルを示した。

重水素のアバundanceは、重水素のライマンアルファ線の中心周波数が水素のライマンアルファ線の中心周波数からズレることを用いて QSO の吸収線系中のライマンアルファ雲と呼ばれる原始ガスの集まりと考えられている天体の観測から求める。まず水素のライマンアルファ線の中心周波数を導出する。電子と陽子の運動方程式は以下のように書ける。

$$m_e \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = - \frac{e^2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3},$$

$$m_p \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = - \frac{e^2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$

これらを連立すると以下の相対ベクトル $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ の運動方程式が得ら

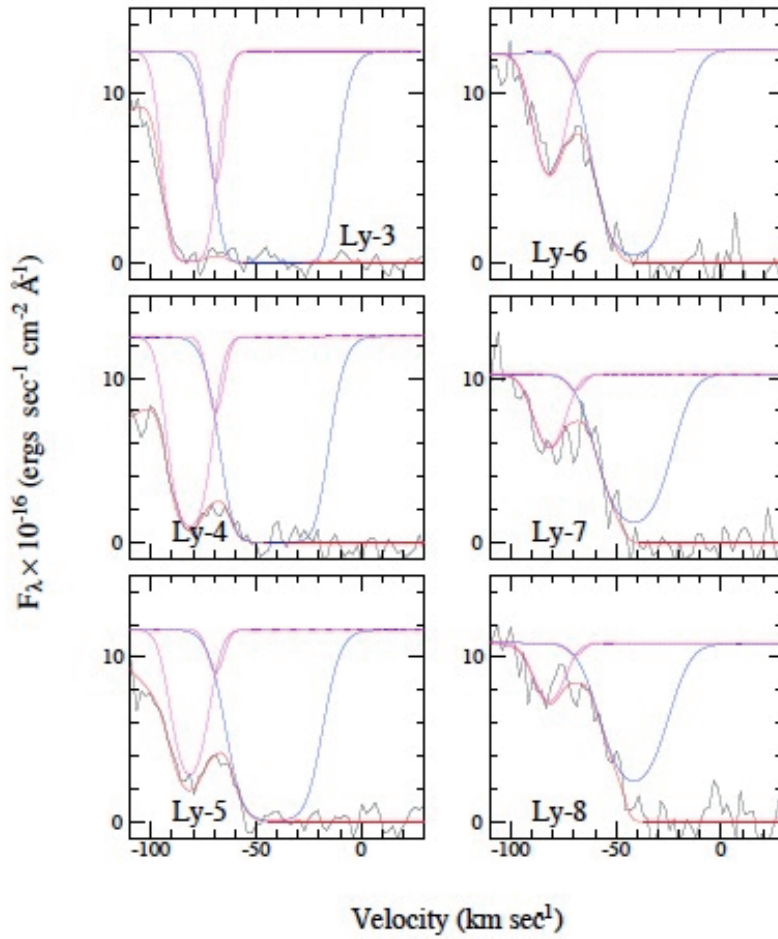


図 1.12 QSO 吸収線中の水素と重水素ライマンアルファ吸収線の例。

れる。

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{e^2}{\mu} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

$$\mu^H \equiv \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p} \right)^{-1}.$$

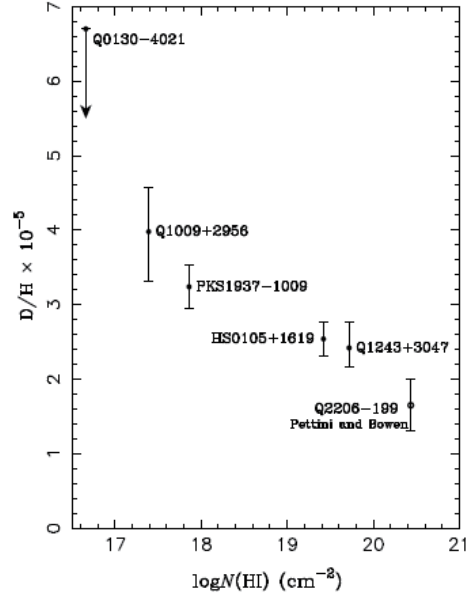


図 1.13 ライマンアルファ雲のガスの量の違いによる QSO 吸収線から求めた重水素存在比。

μ^H は換算質量である。水素原子のライマンアルファ線の波長を $\lambda_{Ly\alpha}^H$ とすると以下のように求まる。

$$\frac{hc}{\lambda_{Ly\alpha}^H} = \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\mu^H e^4}{\hbar^2}. \quad (1.207)$$

重水素は、陽子の質量を陽子プラス中性子に入れ替えれば後は水素と同じである。したがって、ライマンアルファ線の波長を $\lambda_{Ly\alpha}^D$ とすると以下のようになる。

$$\frac{hc}{\lambda_{Ly\alpha}^D} = \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\mu^D e^4}{\hbar^2}. \quad (1.208)$$

$$\mu^D = \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p + m_n} \right)^{-1}.$$

したがって、波長のズレは以下のように求まる。

$$\lambda_{Ly\alpha}^D - \lambda_{\alpha}^H = \frac{16\pi\hbar^3 c}{3e^4} \left(\frac{1}{m_p + m_n} - \frac{1}{m_p} \right) \quad (1.209)$$

$$= -\frac{16\pi\hbar^3 c}{3e^4} \frac{m_n}{(m_p + m_n)m_p} \sim -\frac{8\pi\hbar^3 c}{3e^4 m_p} \quad (1.210)$$

$$\sim -0.33\text{\AA}. \quad (1.211)$$

図 1.11 に Kirkman, Tytler, Suzuki, O'Meara and Lubin (ApJ Suppl., 149, 1, 2003) が観測した QSO1243+3047 の視線方向の吸収線系のスペクトルを示した。図 1.12 には、重水素の吸収線が現れる部分を拡大した。重水素が付随している水素の吸収線の中心波長からのズレを水素のライマンアルファがドップラーシフトしたとした時の対応する速度を示した。水素のライマンアルファの中心波長は 1216\AA であるから重水素のライマンアルファの中心波長の相対的ズレは $0.33/1216 \sim 0.00027$ でありドップラーシフトに換算したときの速度は $0.00027 \times c \sim 80\text{km/sec}$ である。また波長が短くなるので青方偏移であり、速度は負となる。図 1.13 には、様々な QSO の吸収線系の観測から測定された重水素の存在比を吸収体であるライマンアルファ雲のガスの水素の柱密度の関数として示した。これらの結果から彼らは原始重水素存在比の測定結果として以下の結果を得た。

$$D/H = 2.78_{-0.38}^{+0.44} \times 10^{-5}. \quad (1.212)$$

この結果をビッグバン元素合成の理論に適応すると以下の制限を得る。

$$\eta = 5.9 \pm 0.5 \times 10^{-10}. \quad (1.213)$$

1.2.8 宇宙再結合

宇宙が膨張して温度が下がると電子と陽子が結合して中性水素が生成される。CMB 光子が大量に存在するため水素のイオン化エネルギー $\chi_I = 13.6\text{eV}$ を超えた光子の数が陽子の数より多いと直ちに電離され中性化が進まない。陽子一個あたりの電離光子数が 1 を下回った時に中性化が一気に進む。

まず電離平衡から電離度を導出する式を求める。中性化の反応率は以下

のよう求める。

$$\begin{aligned}
\lambda(e^- + p \rightarrow H + \gamma) &= A \int n_e \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-m_e v_e^2 / 2k_B T} 4\pi v_e^2 dv_e \int \delta \left(\frac{1}{2} m_e v_e^2 + \chi_I - pc \right) 2 \frac{4\pi p^2}{h^3} dp, \\
&= A n_e \frac{32\pi^2}{h^3 c^3} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty v_e^2 \left(\frac{1}{2} m_e v_e^2 + \chi_I \right)^2 e^{-\frac{m_e v_e^2}{2k_B T}} dv_e, \\
&= A n_e \frac{8\pi}{h^3 c^3} (k_B T)^2 \left(\frac{15}{4} + 3 \frac{\chi_I}{k_B T} + \left(\frac{\chi_I}{k_B T} \right)^2 \right). \tag{1.214}
\end{aligned}$$

光子による電離反応の反応率は以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
\lambda(\gamma + H \rightarrow e^- + p) &= A \int 2 \frac{4\pi p^2}{h^3} dp e^{-\frac{pc}{k_B T}} \int \delta \left(pc - \frac{1}{2} m_e v_e^2 - \chi_I \right) 2 \frac{4\pi p_e^2}{h^3} dp_e, \\
&= A \frac{32\pi^2}{h^3 c^3} \frac{2m_e^3}{h^3} e^{-\frac{\chi_I}{k_B T}} \int_0^\infty v_e^2 \left(\frac{1}{2} m_e v_e^2 + \chi_I \right)^2 e^{-\frac{m_e v_e^2}{2k_B T}} dv_e, \\
&= A \frac{8\pi}{h^3 c^3} (k_B T)^2 \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \left(\frac{15}{4} + 3 \frac{\chi_I}{k_B T} + \left(\frac{\chi_I}{k_B T} \right)^2 \right) e^{-\chi_I / k_B T}. \tag{1.215}
\end{aligned}$$

ここではフリースペースでの電子の縮退は無視出来る程小さいとした。また反応断面積の入射光子あるいは入射電子のエネルギー依存性が小さいとして、その依存性を無視して定数 A で書けるとした。これらの反応は電磁相互作用なので電離度が高い内は、反応率は十分ハッブルレートより高く反応平衡が保たれる。この時、以下の関係式が成り立つ。

$$n_H \lambda(\gamma + H \rightarrow e^- + p) = n_p \lambda(e^- + p \rightarrow H + \gamma). \tag{1.216}$$

ここで電離度 X_e を以下のように定義する。

$$X_e = \frac{n_e}{n_H + n_p}. \tag{1.217}$$

ここで $Y = 0.24$ より全バリオン数の 24% がヘリウムに取り込まれており、ヘリウムは既に中性化が進んでおり、水素として存在するのは残り 76% であることを考慮すると、以上の結果から X_e を決定する式が以下のように求まる。ここで $n_e = n_p$ である。

$$\frac{X_e^2}{1 - X_e} = \frac{1}{8\pi\zeta(3)} \frac{1}{0.76} \frac{1}{\eta_b} \left(\frac{2\pi m_e c^2}{k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{\chi_I}{k_B T}}. \tag{1.218}$$

分母の 0.76 は、バリオン（陽子・中性子）の内、ヘリウムに取り込まれている割合 0.24 を差し引いた残りが水素として残っているバリオンであることから来る。宇宙の中性化が進む時期を $X_e = 0.5$ となった時期とすると $k_B T = 0.316\text{eV}$, $T = 3670\text{K}$ の時期となる。この時期を宇宙再結合期 recombination と呼ぶ。電離エネルギーと温度との比は以下ようになる。

$$\frac{\chi_I}{k_B T_{rec}} = 43. \quad (1.219)$$

この時期の赤方偏移を z_{rec} とすると

$$1 + z_{rec} = \frac{3670}{2.725} = 1347, \quad (1.220)$$

である。この時期の物質密度は以下のように求まる。

$$\rho_M(z_{rec}) = \rho_{cr} \Omega_M (1 + z_{rec})^3 = 0.62 \times 10^{-20} \left(\frac{\Omega_M h^2}{0.135} \right) \text{g/cm}^3. \quad (1.221)$$

この時期の宇宙年齢を計算する。宇宙年齢と赤方偏移の関係を求める式 (1.59) から、この時期の宇宙は平坦で構成物として物質と輻射のみを考えれば良い事を考慮すると、宇宙年齢と赤方偏移の関係が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} t &= \frac{2}{3} \frac{1}{H_0 \Omega_M^{0.5} (1 + z_{eq})^{3/2}} \left[\frac{(1 - 2x)\sqrt{1+x}}{x^{3/2}} + 2 \right], \\ &= 2.68 \times 10^{12} \left[\frac{(1 - 2x)\sqrt{1+x}}{x^{3/2}} + 2 \right] \text{sec}, \\ x &\equiv \frac{1+z}{1+z_{eq}} \end{aligned} \quad (1.222)$$

ここで z_{eq} は以下の値を使った。

$$1 + z_{eq} = 3455 \left(\frac{\Omega_M h^2}{0.1427} \right)$$

宇宙再結合時の水素一個あたりの電離光子の数を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{n_\gamma(h\nu \geq \chi_I)}{n_H} &= \frac{1}{0.76n_b} \int_{\chi_I/c}^{\infty} \frac{8\pi p^2}{h^3} \frac{dp}{e^{pc/k_B T} - 1} \\ &\sim \frac{n_\gamma}{0.76n_b} \frac{1}{\Gamma(3)\zeta(3)} \int_{\chi_I/k_B T}^{\infty} x^2 dx e^{-x} \end{aligned}$$

$$= \frac{1.09}{2\eta} \left(\left(\frac{\chi_I}{k_B T} \right)^2 + 2 \frac{\chi_I}{k_B T} + 2 \right) e^{-\frac{\chi_I}{k_B T}} \quad (1.223)$$

$$= 3.7 \times 10^{-7} \quad (1.224)$$

最後の等号では、 $k_B T = 0.316\text{eV}$ を代入した。水素一個あたりの電離光子の数が1程度になる時の宇宙の温度は $k_B T \sim 0.49\text{eV}$ である。ほぼ近い値を取るが、実際に宇宙再結合が起きる時期は、水素あたりの電離光子の数が1よりかなり少なくなった時期である。この温度と電離エネルギーとの比は

$$\frac{\chi_I}{k_B T} \sim 27.3, \quad (1.225)$$

元素合成時の重水素乖離が切れる時期の温度と乖離エネルギーの比と同じになる。何れにせよ、宇宙再結合期は、水素の電離エネルギーよりかなり宇宙の温度が低くなった時に起きるが、それはバリオン数あたりの光子数が圧倒的に多いため、エリート光子のみで十分水素をイオン化可能であるからである。

宇宙再結合時期の光子のトムソン散乱に対する平均自由行程は

$$\begin{aligned} \lambda_{rec} &= \left(0.76\eta n_\gamma(T_0) X_e \left(\frac{T}{T_0} \right)^3 \sigma_T \right)^{-1} \sim 3.4 \times 10^{21} \left(\frac{\eta}{5.8 \times 10^{-10}} \right)^{-1} \left(\frac{T}{3670\text{K}} \right)^{-3} X_e^{-1} \text{cm}. \\ &\sim 6.84 \times 10^{21} \left(\frac{X_e}{0.5} \right)^{-1} \text{cm} \end{aligned} \quad (1.226)$$

最後の等号では $X_e = 0.5$ を代入した。 $\sigma_T = 0.665 \times 10^{-24} \text{cm}^2$ はトムソン散乱の断面積である。この時期の粒子的地平線は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \ell_p(z) &= a(t) \int_0^t \frac{cdt}{a} = a(t) \int_0^a \frac{cda}{a\dot{a}} \\ &= \frac{c}{H_0 \Omega_m^{0.5} (1+z_{eq})^{1.5}} \frac{1}{x} \left(\frac{2\sqrt{1+x}}{x^{1/2}} - 2 \right) \\ &= 1.2 \times 10^{23} \frac{1}{x} \left(\frac{2\sqrt{1+x}}{x^{1/2}} - 2 \right) \text{cm}. \end{aligned} \quad (1.227)$$

ここでは $\Omega_{m0} h^2 = 0.1427$, $H_0 = 100 \text{km/sec}/1\text{Mpc}$ を代入した。宇宙再結合時の粒子的地平線の長さは

$$\ell_p(z_{rec}) = 5.5 \times 10^{23} \text{cm}, \quad (1.228)$$

となる。粒子的地平線と光子の平均自由行程の比は以下ようになる。

$$\frac{\ell_p(z_{rec})}{\lambda_{rec}} \sim 80. \quad (1.229)$$

光子の拡散スケールは以下ようになる。

$$\ell_{dif} = \sqrt{\lambda_{rec}\ell_p(z_{rec})} \sim 6.1 \times 10^{22} \text{cm} \sim 0.11 \times \ell_p(z_{rec}). \quad (1.230)$$

ここまでは電離度は $X_e = 0.5$ とした。

更に中性化が進んで光に対するトムソン散乱の平均自由行程が当時の宇宙粒子的地平線に等しくなる時期、即ち宇宙が光子に対して透明になる時期を求める。 $X_e \sim 0.01$ の時、宇宙の温度は 0.2625eV であり、この時の宇宙年齢は $t = 1.126 \times 10^{13}\text{sec} = 3.57 \times 10^5\text{yr}$ となり、平均自由行程と粒子的地平線の比は 2.3 となる。 $X_e \sim 0.008$ の時、宇宙の温度は 0.2602eV であり、この時の宇宙年齢は $t = 1.143 \times 10^{13}\text{sec} = 3.62 \times 10^5\text{yr}$ となり、平均自由行程と粒子的地平線の比は 1 となる。この時期を宇宙の晴れ上がり **decoupling** と呼ぶ。この時の赤方偏移は $1 + z_{dec} = 1120$ で、粒子的地平線は $\ell_p(z_{dec}) \sim 7.6 \times 10^{23}\text{cm}$ である。光子 **decoupling** と呼ぶべきであるが、宇宙論で **decoupling** と呼べばこの時期を指す。これ以降は、宇宙は電磁波に対して透明になり、自由に伝搬できる。即ちこの時期が、宇宙の表面に対応する。最終散乱面 (last scattering surface (LSS)) とも呼ばれる。**CMB** が放たれるのはこの時期であり、この時期のトムソン散乱で **CMB** に偏光シグナルが刻印される。 $\Omega_{m0}h^2 = 0.1427$, $\Omega_{\Lambda0} = 1 - \Omega_{m0}$ を仮定して、角径距離を計算して宇宙晴れ上がり時の粒子的地平線が見かけの大きさ幾らに対応するか評価すると 1.12 度となる。全天画像を多重極展開した時の ℓ は、見かけの角度 θ (radian 単位) と以下の関係にある。

$$\ell \sim \frac{\pi}{\theta}. \quad (1.231)$$

宇宙晴れ上がり時の粒子的地平線は $\ell \sim 160$ である。また、晴れ上がり時の宇宙が物質優勢で輻射のエネルギー密度が無視し得るとすると粒子的地平線を計算する式は以下ようになる。

$$\ell_p = 3ct = \frac{2c}{H_0} \frac{1}{(\Omega_m h^2)^{0.5}} \frac{1}{(1+z)^{3/2}}. \quad (1.232)$$

表 1.1 LSS の粒子的地平線の見かけの大きさ

$(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$	(1,0)	(0.318,0.682)	(0.318,0)	(1.5,0)
$\theta(\text{deg})$	1.234	1.122	0.613	1.621
ℓ	145	160	294	110

これを用いると宇宙晴れ上がり時の粒子的地平線は $\ell_p = 1.07 \times 10^{24} \text{cm}$ 、 $\theta \sim 1.7 \text{deg}$ 、 $\ell \sim 107$ となる。この時期の直前まで光子とバリオンはタイトに結合しており、バリオンが自己重力で集まると光子の圧力が反発力として働き音波として伝わる。この時音速は $\sim c/\sqrt{3}$ である。したがって、音波が到達出来る最大距離 Sound horizon の大きさは、式 (1.232) で与えられるサイズの $1/\sqrt{3}$ 倍であり、 $\theta \sim 1 \text{deg}$ 、 $\ell \sim 185$ となる。テーブル 1.1 に、宇宙晴れ上がり時の粒子的地平線の見かけのサイズを様々宇宙モデルで求めた結果を示した。対応する ℓ も示した。結果は、 Ω_K に大きく依存して変化することが分かる。この事を用いて宇宙の曲率が 0 即ち平坦な宇宙でることが観測的に求められている。

熱平衡分布により電離度が決定している限り温度の低下と共に電離度はドンドン低くなる。しかし、電離度が低下すると電子と陽子の遭遇確率が低下し、再結合が起きにくくなる。そのため、電離度の低下はどこで底打ちする。以下では、この底打ち値を導出する。Milne の関係式から再結合断面積を光電離の断面積から計算出来る。光電離の断面積は、光子と原子の相互作用を量子力学の元で摂動計算から求められる。温度 T で熱平衡分布したイオンと電子の系では、再結合率が以下のような近似式でよく表現できることが知られている (Rybicki and Lightman, Radiative processes in astrophysics, 10.5 節)。

$$\begin{aligned} \lambda(e^- + p \rightarrow H + \gamma) &= \langle v\sigma \rangle \\ &= 5.197 \times 10^{-14} \lambda^{1/2} (0.4288 + \frac{1}{2} \ln \lambda + 0.469 \lambda^{-1/3}) \text{cm}^3/\text{sec}. \\ \lambda &\equiv \frac{\chi_I}{k_B T} = \frac{1.579 \times 10^5}{T}. \end{aligned} \quad (1.233)$$

宇宙再電離前後の電離率の発展方程式が以下のように求まる。電子の総数

の発展方程式は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{d(n_e a^3)}{dt} &= n_H a^3 \lambda(\gamma + H \rightarrow e^- + p) - n_p \lambda(e^- + p \rightarrow H + \gamma). \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{n_e}{n_H + n_p} (n_H + n_p) a^3 \right) &= n_H a^3 \lambda(\gamma + H \rightarrow e^- + p) - n_p \lambda(e^- + p \rightarrow H + \gamma). \\ \frac{dX_e}{dt} &= (1 - X_e) \lambda(\gamma + H \rightarrow e^- + p) - X_e \lambda(e^- + p \rightarrow H + \gamma).\end{aligned}\tag{1.234}$$

最後の式への変形では、中性水素と陽子の総数 $(n_H + n_p)a^3$ は保存することを用いた。この方程式を変数を時間から $x = \chi_I/k_B T$ に変換すると以下の方程式を得る。

$$\frac{dX_e}{dx} = \frac{\lambda(e^- + p \rightarrow H + \gamma)}{xH} \left[(1 - X_e) \frac{\lambda(\gamma + H \rightarrow e^- + p)}{\lambda(e^- + p \rightarrow H + \gamma)} - X_e \right].\tag{1.235}$$

右辺のカギ括弧の前の係数が十分 1 より大きい時、即ち再結合率がハッブル膨張率より遥かに大きい時、電離率の変化率が極端に大きな値を取らない為には、カギ括弧の中がゼロに近く電離平衡が保たれる。宇宙の晴れ上がり時 $k_B T = 0.2602\text{eV}$ の時の電子密度は

$$\begin{aligned}n_e &= 0.76 X_e n_{\gamma 0} \eta (1 + z_{dec})^3 \\ &= 2.15 \left(\frac{\eta}{5.183 \times 10^{-10}} \right) \left(\frac{X_e}{0.008} \right) \left(\frac{1 + z_{dec}}{1140} \right)^3 \text{cm}^{-3},\end{aligned}\tag{1.236}$$

で与えられる。したがって、再結合率は以下の値を持つ。

$$\Gamma_r = n_e \langle v \sigma \rangle \sim 1.9 \times 10^{-12} \text{sec}^{-1}$$

この時のハッブルレートおよび xH は以下のように求まる。

$$\begin{aligned}H &= H_0 (\Omega_M h^2)^{1/2} (1+z)^{3/2} = 1.2 \times 10^{-18} (1+z)^{3/2} \left(\frac{\Omega_M h^2}{0.1427} \right)^{1/2} \\ &\sim 4.5 \times 10^{-14} \text{sec}^{-1}, \\ xH &= 2.35 \times 10^{-12} \text{sec}^{-1}.\end{aligned}\tag{1.238}$$

したがって、宇宙晴れ上がり時期頃の発展方程式 (1.235) の右辺のカギ括弧

の前の係数は 1 程度であり、反応平衡からのズレが顕著になりだしている。電離率の進化を方程式 (1.235) を解いて厳密に追って、導出した宇宙晴れ上がりの時期は宇宙の温度が 3000K 頃となる。これは電離平衡の仮定の元で導出した上記の議論の結果とほぼ同じ結果である。さらに温度が低下して $\lambda(e^- + p \rightarrow H + \gamma)/xH \ll 1$ となると方程式 (1.235) の右辺はゼロとなり、電離率の時間変化が止まる。宇宙の温度が

$$k_B T_{\text{freez}} = 0.227 \text{eV}, \quad (1.239)$$

になった時、電離度が

$$X_e(t_{\text{freez}}) \sim 2 \times 10^{-4}, \quad (1.240)$$

となる。宇宙の電離度は式 (1.240) の値で凍結し、水素に取り込まれず残存した電子が残る。詳細な計算の結果では、宇宙晴れ上がり以降、電離度の平衡分布からのズレが顕著になり、電離度の低下が緩やかになる。 $z \sim 100$ で電離度の凍結が起こり、その時の値は式 (1.240) で与えられる値とほぼ一致する。

1.2.9 Recombination lines

宇宙再結合は、自由電子が水素に取り込まれる現象である。したがって、その時発生した水素の輝線が観測されるはずである。これらを宇宙再結合線、cosmic recombination lines と呼ぶ。このような輝線は今の所検出されていない。その観測可能性について、近年 Sunyaev のグループにより势力的に研究されている (Rubino-Martin, Chluba and Sunyaev, MNRAS, 2008, AA, 2013, Chluba and Sunyaev, AA 503, 345, 2009)。再結合期に発生した水素の輝線が、赤方偏移してどの波長で見えるか示した。単位は実験室系が μm で観測者が測定する波長が mm で示してある。

Ly	Labo	rest	Bal	Labo	rest	Pasch	Labo	rest	Brack	Labo	rest
	μm	mm		μm	mm		μm	mm		μm	mm
α	0.12	0.16	α	0.656	0.88	α	1.87	2.5	α	4.05	5.45
β	0.103	0.138	β	0.486	0.65	β	1.28	1.72	β	2.63	3.54

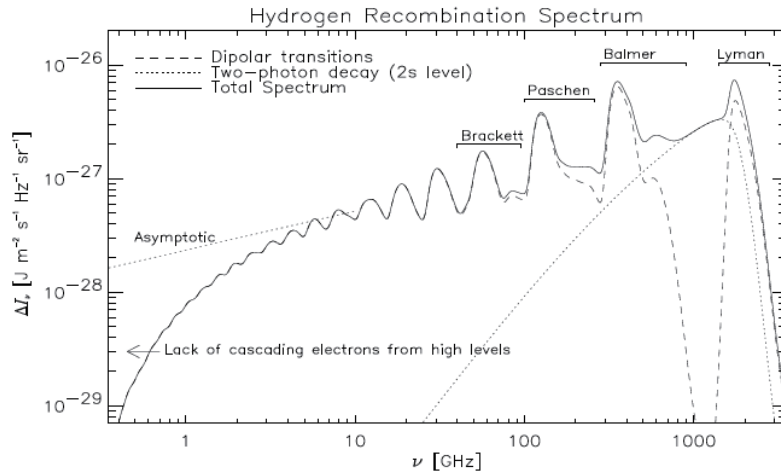


図 1.14 CMB スペクトルに混入すると水素の再結合線。

図 1.14 に CMB スペクトルに混入する水素の再結合線の Sunyaev グループによるシミュレーション結果を示した。彼らは、主量子数 $n_{max} = 30$ まで含めて計算している。ライマンアルファの輝線が期待より弱いのは、 $n = 2(2p)$ から $n = 1(1s)$ の自発遷移率が $6.25 \times 10^8 \text{sec}^{-1}$ とあまりにも高いため、放射された光子がすぐさま周辺の水素に吸収されてしまい出て来れない為である。つまり、ライマンアルファ輝線光子にとって、再結合期の宇宙は光学的に非常に厚いプラズマである。2s から 1s の遷移は、二光子放射過程であり、四重極放射である。その遷移率は 8.23sec^{-1} と以前高い率だがライマンアルファ遷移と比べれば 8 桁も小さい。また吸収されるには丁度よいエネルギーを持った相棒光子と出会って吸収される必要があり、その確率は非常に小さく、放射されると我々まで届く。図 1.15 に水素の再結合線の CMB 強度に対する相対強度を示した。期待通り非常に弱い。CMB のウイン側で相対強度の増加が見えるのは、CMB 強度が指数的に減少している為である。これらラインの観測が出来る時代がくれば、宇宙再結合期の物理過程を観測量を手掛かりに調べることが可能となる。同様の事はヘリウムの再結合線に対しても調べられている。ヘリウムの再結合線の寄与

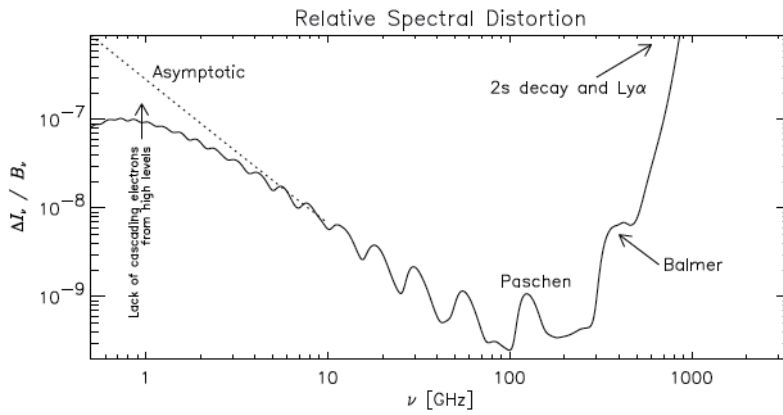


図 1.15 水素の再結合線の CMB との相対強度。

は水素の再結合線に対して高々 10% の寄与しか与えない。水素とヘリウムの存在比が約 10 対 1 であることから期待される通りの結果である。宇宙再結合期の物理過程を追跡するコード RECFAST が彼らによって開発され公開されている。またバルマーアルファ線による散乱により、温度揺らぎのパワースペクトルに歪みを生じる可能性があることも彼らによって示されている。

1.2.10 宇宙再電離

電離率 0.02% まで中性化が進んだ宇宙において、天体が形成されると、その天体からのエネルギー供給により再び銀河間物質の電離が進む。銀河間物質の電離度を調べる手法として Gunn-Peterson テストがある。もし銀河間物質の大半が中性水素であれば、遠方の QSO のライマンアルファ輝線より短波長側の連続波を構成する光子が、途中で存在する中性水素のライマンアルファ遷移によって吸収されごっそり失われて観測されるはずであるが実際はどうでしょう、という問題提起のことを指す。図 1.16 に、Goto et al. (MNRAS, 2009) によって取られた $z = 6.4$ の QSO CFHQS J2329-0301 の光学域でのスペクトルを示した。 $z = 6.4$ のライマンアルファ輝線より

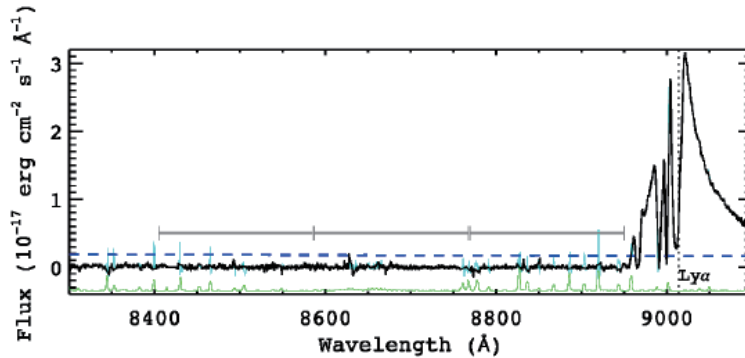


図 1.16 Gunn-Peterson テスト。

短波長側の連続波がごっそりゼロになっている。これは少なくとも $z = 8500./1216 - 1 \sim 6$ より遠方の宇宙の銀河間ガスは、QSOの連続波をごっそり吸収して削り取れるほど十分な量の中性水素を含んでいる事を示している。ライマンアルファの遷移確率は非常に大きいため中性水素の割合が高々 0.01% であっても十分 QSO のスペクトルからごっそり連続波を削り取る事ができる。その為、ライマンアルファの吸収による Gunn-Peterson テストは、銀河間物質の中性度を調べる指標としてはあまり役に立たない。そこでライマンアルファより遷移確率がそれぞれ 6.2 倍、17.9 倍小さい Ly β や Ly γ の吸収による Gunn-Peterson テストの実施が試みられている。

図 1.17 には、 $z = 1.32$ と比較的近傍の QSO のスペクトルを示した。QSO のライマンアルファ輝線より短波長側に様々な吸収線系が現れている。この例のように近傍の QSO では、ライマンアルファ輝線の短波長側の連続波が吸収線系によって部分的に欠けている以外、十分残っている。この事は、銀河間ガスの中性水素含有量が非常に小さく、殆どイオン化していることを示している。銀河間ガスのイオン化は光電離で引き起こされていると考えられ、電離紫外線光子が宇宙空間を満遍なく満たしていることになる。DLA は dumped Lyman alpha システムで、水素の柱密度が $N(HI) > 10^{20.3} \text{cm}^{-2}$ の物質含有量の多い天体により引き起こされた吸収である。恐らく視線の

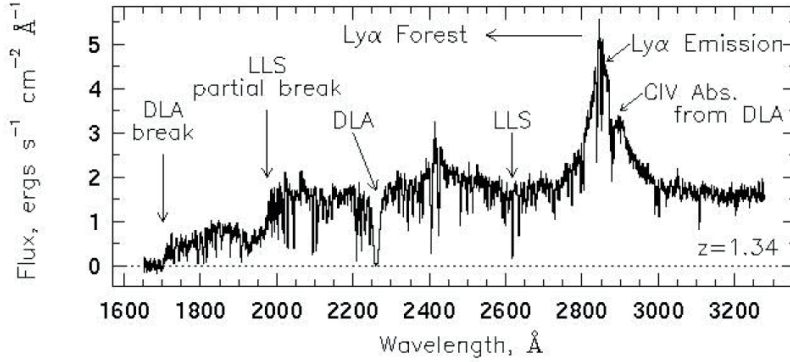


図 1.17 比較的近傍の QSO のスペクトルに現れた吸収線系の例。

途中にある銀河に付随したものであろうと考えられている。LLS は Lyman limit systems (LLS) で、水素の柱密度が $10^{17.2} < N(HI) < 10^{20.3} \text{cm}^{-2}$ のレンジにある天体により引き起こされた吸収線である。我々の銀河系で high velocity cloud として観測されている銀河に落ち込むガスあるいは銀河から放出されたガス、表面輝度が低くで本体が未だ観測出来ない銀河、銀河同士のすれ違い時に潮汐力で引きちぎられて放出されたガス、等が候補天体として挙げられている。その他無数に存在する鋭い切れ込みは全て Lyman alpha Forest と呼ばれる吸収線系で、水素の柱密度が $N(HI) < 10^{17.2} \text{cm}^{-2}$ の物質含有量の少ない天体である。恐らくまだ星形成による金属汚染を経験していない始原ガスの集まりと考えられている。したがって、この吸収線系中の重水素量は、ビッグバン元素合成時に凍結された残存量を反映していると考えられている。

宇宙再電離の時期の最も有力な観測的情報は、CMB 偏光観測によって得られている。図 1.18 に WMAP 観測開始から 3 年間の測定データで得られた CMB パワースペクトルを示す。多重極 ℓ と角度スケールは概ね以下の関係式で結ばれる。

$$\ell = \frac{\pi}{\theta}. \quad (1.241)$$

黒点が温度揺らぎ (TT correlation)、赤点が温度揺らぎと偏光の相互相関 (TE

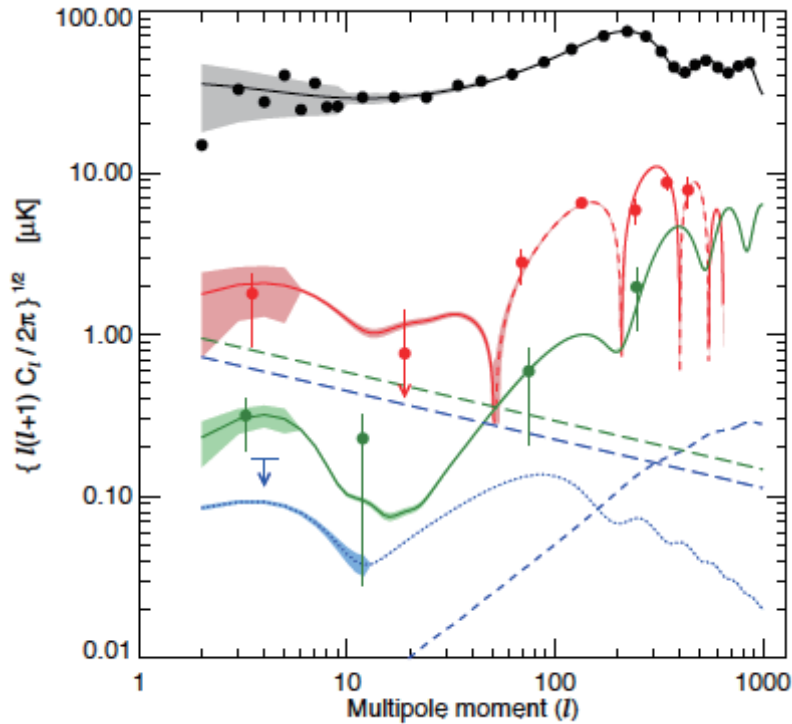


図 1.18 WMAP 測定開始から 3 年間の測定データで得られた CMB パワースペクトル。

cross correlation)、緑点が偏光自己相関 (EE correlation) である。EE に $l \sim 7$ あたりにバンプが見える。角度にして 26 度で、 $z = 20$ あたりの粒子的地平線の長さの見かけのサイズである。この結果はこの頃に宇宙が再電離し、粒子的地平線と一致した波長の揺らぎが作る偏光シグナルがバンプとして見えている事を示している。EE のバンプの大きさは、この時期の CMB 光子に対する光学的厚みの二乗に比例する。その為のこの振幅から当時の光学的厚み 0.09 程度であることが求められている。これは当時の宇宙の電離度が 20 程度であることを示している。

第2章

ダークマター

2.1 ニュートリノ

ニュートリノ振動の実験からニュートリノは質量を持っている電磁相互作用をしない粒子であることが分かっており、ダークマターの一部である。ニュートリノの分類には、3つのフレーバーにより電子ニュートリノ $|\nu_e\rangle$ ・ミューニュートリノ $|\nu_\mu\rangle$ ・タウニュートリノ $|\nu_\tau\rangle$ に E_1, E_2, E_3 に対応する3つの固有状態 $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle, |\nu_3\rangle$ による分類がある。図 2.1 に各フレーバーが

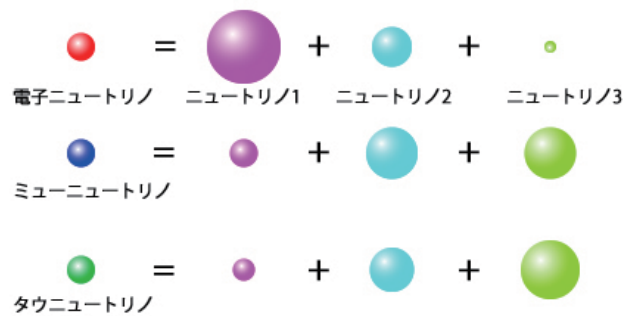


図 2.1 質量の固有状態の重ね合わせで実現されるニュートリノの各フレーバー。

質量の固有状態のどのような重ね合わせで実現されるかを示した。ニュー

トリノ振動発見の端緒となったのは、太陽ニュートリノ問題である。太陽中心部では、以下の核融合反応により大量のニュートリノが生成されている。

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e. \quad (2.1)$$

ところが実際に地上で観測される電子ニュートリノフラックスは、太陽内部で生成されたはずの電子ニュートリノフラックスの 1/3 に過ぎず足りない。これが太陽ニュートリノ問題であり、ニュートリノ振動のモデルによって解決される。簡単の為にニュートリノは2世代から構成されるとしてニュートリノ振動を解説する。自由なニュートリノのハミルトニアンを H とすると以下の固有値方程式を得る。

$$\begin{aligned} H|\nu_1\rangle &= E_1|\nu_1\rangle, \\ H|\nu_2\rangle &= E_2|\nu_2\rangle. \end{aligned} \quad (2.2)$$

電子ニュートリノ・ミューニュートリノはこれらの重ね合わせにより以下のように表される。

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos\theta_{12}|\nu_1\rangle + \sin\theta_{12}|\nu_2\rangle, \\ |\nu_\mu\rangle &= -\sin\theta_{12}|\nu_1\rangle + \cos\theta_{12}|\nu_2\rangle. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで θ をニュートリノ混合角と呼び実験から $\theta_{12} = 34^\circ$ であることが分かっている。1章で登場したカビボ角は、クォークの混合角のことである。それぞれのフレーバー解は、シュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\nu(t)\rangle = H|\nu(t)\rangle, \quad (2.4)$$

の解であり、式(2.3)から例えば $t=0$ の時ミューニュートリノであった状態の時間発展は以下のように書ける。

$$|\nu(t)\rangle = -\sin\theta_{12}|\nu_1\rangle e^{-iE_1 t/\hbar} + \cos\theta_{12}|\nu_2\rangle e^{-iE_2 t/\hbar}. \quad (2.5)$$

この状態に含まれる電子ニュートリノの割合を調べるには、エネルギー固有状態が正規直交系であることを用いて、(2.3)で表される電子ニュートリノとの内積を取れば良い。

$$\langle \nu_e | \nu(t) \rangle = (\cos\theta_{12} \langle \nu_1 | + \sin\theta_{12} \langle \nu_2 |) (-\sin\theta_{12} |\nu_1\rangle e^{-iE_1 t/\hbar} + \cos\theta_{12} |\nu_2\rangle e^{-iE_2 t/\hbar}),$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\theta_{12} (-e^{-iE_1 t/\hbar} + e^{-iE_2 t/\hbar}). \quad (2.6)$$

電子ニュートリノが現れる確率はこの内積の絶対値の自乗により以下のよう
に求まる。

$$\begin{aligned} |\langle \nu_e | \nu(t) \rangle|^2 &= \frac{1}{4} \sin^2 2\theta_{12} \left(2 - e^{\frac{i(E_1 - E_2)t}{\hbar}} - e^{-\frac{i(E_1 - E_2)t}{\hbar}} \right), \\ &= \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \frac{(E_1 - E_2)t}{2\hbar}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

ニュートリノの運動量を p とし、各エネルギー固有状態の質量エネルギー $m_1 c^2, m_2 c^2$ が運動エネルギーより十分小さく相対論的運動をしているとす
ると

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{m_1^2 c^4 + p^2 c^2} \sim pc \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2 c^2}{p^2} \right), \\ E_2 &= \sqrt{m_2^2 c^4 + p^2 c^2} \sim pc \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_2^2 c^2}{p^2} \right), \\ E_2 - E_1 &\sim \frac{(m_1^2 - m_2^2) c^3}{2p} \sim \frac{(m_2^2 - m_1^2) c^4}{2E}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

と書ける。最後の変形では $E \sim pc$ であることを用いた。2つのエネルギー
固有状態の質量差を表す以下の記号を導入する。

$$\Delta m_{21}^2 \equiv (m_2^2 - m_1^2) c^4. \quad (2.9)$$

すると初期にミューニュートリノだった状態に時刻 t に電子ニュートリノ
が現れる確率が以下のよう求まる。

$$\begin{aligned} P(t) &= \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \frac{\Delta m_{21}^2 t}{4\hbar E}, \\ &= \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4\hbar c E}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

最後の変形では、時間 t の間にニュートリノが進む距離 $L \sim ct$ を用いた。
即ちニュートリノが有限の質量を持ち、3世代間で質量差が存在すればその
飛行距離に応じて、電子ニュートリノが現れる確率が、増えたり減ったり振
動する。これがニュートリノ振動現象である。測定から求まっている質量
差を以下にまとめる。

$$\sin^2 2\theta_{12} = 0.86_{-0.04}^{+0.03},$$

$$\Delta m_{21}^2 = (8.0_{-0.3}^{+0.4}) \times 10^{-5} \text{eV}^2, \quad (2.11)$$

$$\sin^2 2\theta_{23} > 0.92,$$

$$\Delta m_{32}^2 = 1.9 \text{ to } 3.0 \times 10^{-3} \text{eV}^2, \quad (2.12)$$

$$\sin^2 2\theta_{13} < 0.19.$$

図 2.2 にニュートリノの質量固有状態の質量に関する並び順の二つの可能性を示した。 $m_2 > m_1$ であることは判明しているが、 m_2 と m_3 のどちらが

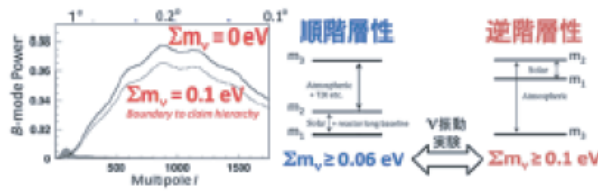


図 2.2 ニュートリノ階層性 (右)。ニュートリノ質量和と大規模構造の
パワースペクトル。

思いかはわかっていない。 $m_2 < m_3$ の場合を順階層性、逆の場合を逆階層性と呼ぶ。式 (2.11) から順階層の時、ニュートリノ質量和が最低値をとるのは $m_1 = 0$ の時であり、この時 $m_2 = 0.009 \text{eV}$ となり、 $m_3 = 0.044 \text{ to } 0.055 \text{eV}$ となる。したがって、質量総和は 0.053 以上となる。一方逆階層の時、 $m_3 = 0 \text{eV}$ が質量和の最低値を与える。この時、 $m_2 = 0.044 \text{ to } 0.055 \text{ eV}$ となり、 $m_1 = 0.043 \text{ to } 0.054 \text{eV}$ となる。したがって、質量総和は 0.087eV 以上となる。すなわち質量総和が 0.087eV 以下であることが証明されれば、逆階層の可能性が否定される。

次に宇宙背景ニュートリノの性質について解説する。現在の宇宙背景ニュートリノ温度は式 (1.129) より

$$T_{\nu 0} = 1.945 \text{K}, \quad (2.13)$$

である。ニュートリノの質量 $m_\nu c^2$ は高々 eV 程度であると思われるので、ニュートリノ脱結合期 $k_B T \sim 2.4 \text{MeV}$ の頃はニュートリノは質量ゼロの粒

子と扱って良い。脱結合以降の各ニュートリノの運動量の進化を考察する。宇宙の曲率は無視出来るとし計量は以下のように書けるとする。

$$ds^2 = -(cdt)^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.14)$$

脱結合後は、重力以外の相互作用を受けないのでニュートリノの軌跡は測地線を通り、以下の測地線方程式に従う。

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^1}{d\tau^2} &= -\Gamma_{\mu\nu}^1 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \\ &= -\Gamma_{00}^1 \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} - 2\Gamma_{10}^1 \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} - \Gamma_{11}^1 \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau}, \\ &= -2\Gamma_{10}^1 \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = -2 \frac{\dot{a}}{ca} \frac{dx^1}{d\tau} c \frac{dt}{d\tau}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

ここで $d\tau = -ds/c$ は粒子の固有時間の微小間隔であり、簡単の為に粒子の運動方向を x 軸即ち x^1 軸に取った。この式 (2.15) の両辺に $d\tau/dt$ を掛けて新しい変数 $\tilde{v} \equiv dx/d\tau$ を用いて変形すると粒子の共同座標での速度の時間発展を記述する以下の方程式を得る。

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = -2 \frac{\dot{a}}{a} \tilde{v}. \quad (2.16)$$

この方程式の解は以下のように求まる。

$$\tilde{v}(t) = \frac{\tilde{v}_0}{a^2}. \quad (2.17)$$

粒子の運動量を p とすると、自由に飛び交う粒子の運動量の宇宙膨張に伴う変化が以下のように求まる。

$$p(t) = a(t)m\tilde{v}(t) = \frac{m\tilde{v}_0}{a}. \quad (2.18)$$

即ち、重力以外の相互作用が無視出来る粒子の運動量は、宇宙膨張とのともにその大きさがスケール因子に反比例して小さくなる。この結果は、質量がゼロの粒子、例えば光子、の宇宙膨張による赤方偏移に対応している。

ニュートリノ脱結合以降、ニュートリノは、運動量が式 (2.18) にしたがって減少するが、運動量空間での準位の名前を表す運動量に変化するだけで、それぞれの準位を占有するニュートリノの数即ち占有率は変わらず脱結合

時のままで進化する。例えば、ある脱結合時 $t_{v,dec}$ に運動量 $p(t_{v,dec})$ の状態を占める占有率 $n(p(t_{v,dec}))$ と脱結合以降の任意の時刻 t における占有率は以下の関係で結ばれる。

$$n(p(t)) = n(p(t_{v,dec})) = \frac{1}{\exp\left[\frac{p(t_{v,dec})c}{k_B T_{v,dec}}\right] + 1}, \quad (2.19)$$

$$p(t) = \frac{a(t_{v,dec})}{a(t)} p(t_{v,dec}). \quad (2.20)$$

したがって、

$$n(p(t)) = \frac{1}{\exp\left[\frac{p(t)c}{k_B T(t)}\right] + 1}, \quad (2.21)$$

$$T(t) = \frac{a(t_{v,dec})}{a(t)} T(t_{v,dec}), \quad (2.22)$$

で与えられる。脱結合以降のニュートリノ温度の進化を表す式 (2.22) の関係式は、宇宙膨張に伴い運動量が減少しても占有率を不変に保つ必要性があることが導かれた。任意の時刻のニュートリノの一世代の個数密度は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} n_\nu &= \int_0^\infty \frac{4\pi p^2}{h^3} dp \frac{1}{\exp\left[\frac{p(t)c}{k_B T(t)}\right] + 1}, \\ &= \frac{4\pi}{h^3 c^3} (k_B T)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x + 1}, \\ &= 55.75 \left(\frac{k_B T_{v0}}{1.945\text{K}}\right)^3 \text{cm}^{-3}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

任意の時刻のニュートリノエネルギー密度は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \rho_\nu c^2 &= \int_0^\infty \frac{4\pi N_\nu p^2}{h^3} dp \frac{\sqrt{m_\nu^2 c^4 + p^2 c^2}}{\exp\left[\frac{p(t)c}{k_B T(t)}\right] + 1}, \\ &= \frac{8\pi N_\nu}{h^3 c^3} (k_B T)^4 f(y), \\ f(y) &\equiv \int_0^\infty \frac{x^2 \sqrt{y^2 + x^2} dx}{e^x + 1}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$y \equiv \frac{m_\nu c^2}{k_B T}.$$

ここでニュートリノは左巻き、反ニュートリノは右巻きのヘリシティーのものしか存在しない。言い換えるとニュートリノは、負ヘリシティーのみ反ニュートリノは正ヘリシティーのみ存在するとする。 N_ν はニュートリノの世代数であり、基本は3である。図 2.3 に関数 $f(y)$ を示した。質量

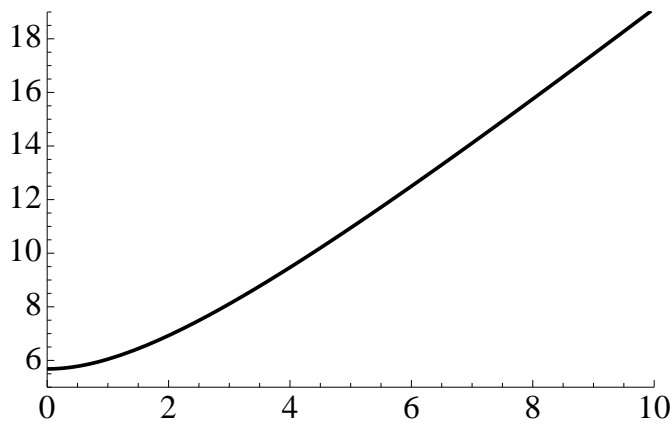


図 2.3 ニュートリノ質量と宇宙背景ニュートリノエネルギー密度。

ゼロの極限、即ち $y = 0$ の時 $f(0) = 5.6822$ である。現在の宇宙背景ニュートリノの温度は

$$k_B T_{\nu 0} = 1.67 \times 10^{-4} \text{eV}, \quad (2.25)$$

でありニュートリノ質量が 0.1eV 以上とすると

$$y > 600,$$

である。宇宙背景ニュートリノのエネルギー密度は $y \gg 1$ の極限で以下のようなになる。

$$\rho_{\nu_i} c^2 = m_{\nu_i} c^2 2n_{\nu_i}. \quad (2.26)$$

ここで $i = 1, 2, 3$ である。暗黒物質が全てニュートリノである為には、ニュートリノの総質量が

$$m_{\nu_i} c^2 = 15 \left(\frac{\Omega_{\nu} h^2}{0.1427 h^2} \right) \text{eV}, \quad (2.27)$$

であれば良い。ニュートリノの総質量が 0.1eV 程度であるとするとニュートリノが暗黒物質に占める割合は高々 0.7% 程度であることになる。

ニュートリノの質量が 1eV 程度以下とすると宇宙晴れ上がり期 $k_B T \sim 0.3\text{eV}$ 頃の熱速度は $v/c > \sqrt{\frac{0.3}{1}} = 0.55$ であり光速に近く非常に速い。その為、ニュートリノは Hot Dark Matter (HDM) と呼ばれている。

ここまでの議論ではニュートリノの化学ポテンシャルはゼロであるとして来たが、ゼロでない可能性も否定されていない。例えば、 $\mu = mc^2$, $mc^2 = 1\text{eV}$, $N_{DM} = 2$ として評価すると以下の値を得る。

$$\rho_{DM} = 6 \times 10^{-28} \text{g/cm}^3. \quad (2.28)$$

このように化学ポテンシャルが静止質量エネルギーと同程度の値を持つ暗黒物質としての役割を担う事ができる。実際の宇宙の暗黒物質候補として採用するには、まだ修正が必要である。暗黒物質が、周囲との熱平衡状態を保てなくなった時期では、暗黒物質は十分相対論的であったと考えられる。暗黒物質の脱結合後、運動量がスケール因子に反比例して減少するだけなので有限の化学ポテンシャルを持つ暗黒物質の現在のエネルギー密度を求める式は以下ようになる。

$$\rho_{DM} c^2 = \frac{4\pi N_{DM}}{h^3 c^3} (k_B T)^4 \int_0^\infty \frac{x^2 \sqrt{y^2 + x^2} dx}{e^{x-z} + 1}, \quad (2.29)$$

例えば、 $mc^2 = 0.005\text{eV}$ 、 $\mu = mc^2$, $N_{DM} = 2$, $T = 1.945\text{K}$ でニュートリノと同じ温度のフェルミオンとすると以下の値を得る。

$$\rho_{DM} = 6.2 \times 10^{-30} \text{g/cm}^3. \quad (2.30)$$

2.2 Cold Dark Matter: CDM

暗黒物質は、1936年の Zwicky により銀河団の銀河の速度分散の観測結果からピリアル定理を用いて導きだされた質量が、銀河団中の銀河の明るさから導出された星の質量を大幅に上回っていることから始めてその存在

が示唆された。その後銀河の回転曲線の観測等から存在を示す観測事実が確かなものとなってきた。しかし、この食い違いを重力理論を修正することで暗黒物質の存在を仮定することなく説明しようという修正重力理論が未だに否定されていない。修正重力理論の最も強い観測的反証を図にしめした。図 2.4 は弾丸銀河団 (bullet cluster) 1E0657-558 の X 線強度分布、銀河分布、重力レンズ効果で求めた重力質量分布である。X 線放射は銀河団中

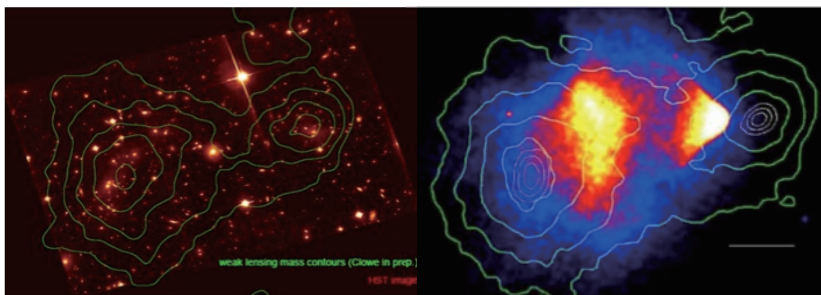


図 2.4 弾丸銀河団の重力源分布等高線・高温ガス分布（カラーコード）・銀河分布。

の高温プラズマからの熱制動放射である。銀河団のバリオンの全質量の内高温ガスが約 8 割から 9 割を占めており、銀河中の星の質量は僅か 1-2 割程度である。この図に示した結果は、重力源となる物質分布が、高温ガスの分布即ちバリオンの質量分布から大きくズレている事を示している。修正重力理論が正しければ、バリオンの分布と重力源の分布にズレが生じることはあり得ない。暗黒物質の存在は、かなりの確からしきで観測的に確証を得ていると考えてよい。

暗黒物質の有力候補の一族は、Cold Dark Matter (CDM) と呼ばれる、宇宙晴れ上がり頃の熱運動の速度が光速より十分小さい粒子である。暗黒物質も過去には、ニュートリノ同様周囲の物質と熱平衡状態にあったと考えられる。温度 T で熱平衡状態にある質量 m の暗黒物質のエネルギー密度は以下のように与えられる。

$$\rho_{DM}c^2 = \frac{4\pi N_{DM}}{h^3c^3} (k_B T)^4 \int_0^\infty \frac{x^2 \sqrt{y^2 + x^2} dx}{e^{\sqrt{y^2 + x^2} - z} \pm 1}, \quad (2.31)$$

$$y \equiv \frac{mc^2}{k_B T},$$

$$z \equiv \frac{\mu}{k_B T}.$$

ここで N_{DM} は暗黒物質粒子のスピンの自由度数であり、暗黒物質がフェルミオンかボソンかに応じて、被積分関数の分母の + あるいは - のサインを取る。また μ が化学ポテンシャルである。仮に現在まで CMB の温度で熱平衡状態にあるとし、 $mc^2 = 1\text{eV}N_{DM} = 2$, $\mu = 0$ のフェルミオンとすると、

$$\rho_{DM} = 7.5 \times 10^{-287} \text{g/cm}^3,$$

となり非常に小さな値となり必要な量にほど遠い。当然期待された結果ではあるが、暗黒物質は現在は周囲の物質との熱平衡状態には無い。過去に周囲と熱平衡状態にあった暗黒物質が現在の宇宙の物質密度の大半を占める為には二つの可能性がある。一つは大きな化学ポテンシャルを持っており、金属中の電子の分布のように縮退している可能性である。前の節で述べたように、化学ポテンシャルが静止質量エネルギーと同程度の値を持つ時は、暗黒物質は *hot dark matter* となる。もう一つの候補は、化学ポテンシャルがゼロで、素粒子物理学から挙げられている CDM の候補である。以下の節で代表的なものについて紹介する。

2.2.1 Weakly interacting massive particles (WIMPs)

ここでは WIMPs と呼ばれる暗黒物質候補粒子について解説する。ニュートリノの場合と同じように、粒子反粒子対消滅が進行する前に、WIMPs の反応が切れて脱結合すれば、それ以降粒子・反粒子数が減少することは無く現在も大量に存在し暗黒物質の主成分となりうる。Weinberg の教科書 *Cosmology* (2008) では、このような粒子を L-particles (Left-over particles) と呼んでいる。ここでは、暗黒物質の候補粒子を謎の粒子ということで X-particles と呼ぶ事にする。

X 粒子が備えているべき一般的性質について以下に列挙する。当然だが電荷を持たず電氣的に中性でなければならない。安定な粒子であり少なく

表 2.1 存在が予言されている粒子とその超対称性パートナー粒子

粒子 (表記・スピン・質量)	パートナー (表記・スピン)
electron($e^{-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.5\text{MeV}$)	selectron($\tilde{e}^{-1} \cdot 0$)
muon($\mu^{-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 105\text{MeV}$)	smuon($\tilde{\mu}^{-1} \cdot 0$)
tauon($\tau^{-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.776\text{GeV}$)	stauon($\tilde{\tau}^{-1} \cdot 0$)
neutrino($\nu_i \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - 0.01\text{eV?}$)	sneutrino($\tilde{\nu}_i \cdot 0$)
quark($u d c s t b \cdot \frac{1}{2}$ $\cdot 2, 5, 1.3 \times 10^3, 100, 1.7 \times 10^5, 4.2 \times 10^3\text{MeV}$)	squark($\tilde{u} \tilde{d} \tilde{c} \tilde{s} \tilde{t} \tilde{b} \cdot 0$)
photon($\gamma \cdot 0 \cdot 1$)	photino($\tilde{\gamma} \cdot \frac{1}{2}$)
Higgs($H^0 \cdot 0 \cdot 126\text{GeV}$)	Higgsino($\tilde{H}^0 \cdot \frac{1}{2}$)
Weak bosons($W^\pm Z \cdot 1 \cdot 80, 91\text{GeV}$)	Wino Zino($\tilde{W}^\pm \tilde{Z} \cdot \frac{1}{2}$)
gluon($g \cdot 1 \cdot 0$)	gluino($\tilde{g} \cdot \frac{1}{2}$)
axion($A^0 \cdot 0 \cdot ?$)	axino($\tilde{A}^0 \cdot \frac{1}{2}$)
graviton($G \cdot 2 \cdot 0$)	gravitino ($\tilde{G} \cdot \frac{3}{2}$)

とも現在の宇宙年齢以上の寿命を持っていなければならない。冷たい暗黒物質であるため熱運動の速度が光速に比べて十分小さくなければならない。これらを満たす候補として挙げられている粒子の一つの種族は、超対称性理論 (Super Symmetry (SUSY)) が存在を予言する超対称性パートナー粒子 (Superpartner particles) である。SUSY は、全ての粒子は、ボソンとフェルミオンが対になって組みになっていると考える理論である。テーブル 2.1 にその組みをまとめる。暗黒物質の有力な WIMP 候補として、photino, Zino, Higgsino の混合状態である Neutralino があり、質量の軽い順に $\tilde{N}_1^0, \tilde{N}_2^0, \tilde{N}_3^0, \tilde{N}_4^0$ の 4 世代の存在が予言されている。予測される質量はエネルギー換算で、30 – 5000GeV である。現在の宇宙では、これら超対称性パートナー粒子は一つも見つかっていない。これは、初期の宇宙では、超対称性が保たれていて、粒子とパートナー粒子が互いに同程度存在していたが、宇宙進化の途中で超対称性の破れ (spersymmetry breaking) を生じる真

空の相転移が発生した結果であると考えられている。

WIMP は、宇宙の温度がその粒子の質量エネルギー程度に下がるまでは、熱平衡状態にあり、粒子数は熱平衡分布により与えられる。以下で過去に熱平衡状態にあった WIMP が宇宙の進化の途中で反応が切れて現在の宇宙の暗黒物質の大半がある種類の WIMP (X 粒子) から構成されるために要求される、その粒子の反応断面積と質量を導出する。X 粒子の対消滅の反応断面積を σ_X とし、相対速度を v 、数密度を n_X とすると単位時間あたりの対消滅率は $\langle \sigma_X v \rangle n_X (n_X a^3)$ で与えられる。ここで $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表す。X 粒子の数の進化を表す方程式は以下のようになる。

$$\frac{d(n_X a^3)}{dt} = (n_{X,eq}^2 - n_X^2) a^3 \langle \sigma_X v \rangle. \quad (2.32)$$

この方程式の右辺第一項は、X 粒子の対生成率を表しており、 $n_{X,eq}$ は熱平衡状態にある時の X 粒子の数密度である。対生成率が、このように与えられる理由は、平衡状態で右辺がゼロになれという要請からくる。スピンの自由度を N_X のボーズ粒子とすると熱平衡状態にある時の粒子数は以下のように入与えられる。

$$n_{X,eq} = \frac{4\pi N_X}{h^3 c^3} (k_B T)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1}, \quad (2.33)$$

$$y \equiv \frac{m_X c^2}{k_B T}. \quad (2.34)$$

CMB 光子のエントロピー変化が無視出来るとして $n_\gamma a^3$ が保存するとして扱う。光子数と X 粒子数の比を用いて新たな変数を導入する。

$$Y \equiv \frac{n_X}{n_\gamma}. \quad (2.35)$$

また時間の代わりに以下の変数を用いる。

$$x \equiv \frac{m_X c^2}{k_B T}. \quad (2.36)$$

これらを用いて方程式 (2.32) は以下のように変形できる。

$$\frac{dY}{dx} = (Y_{eq}^2 - Y^2) \frac{\lambda}{x^2},$$

$$\lambda \equiv n_\gamma(m_X c^2) \frac{\langle \sigma_{X\nu} \rangle}{H(m_X)}. \quad (2.37)$$

ここで $H(m_X)$, $n_\gamma(m_X c^2)$ は $k_B T = m_X c^2$ の時のハッブル定数および光子数密度であり、輻射優勢期であることから $H = H(m)/x^2$ であることを用いた。

方程式 (2.37) を近似的に解き Y の凍結値がどのように決まるか調べる。 X 粒子凍結後十分時間が経った $x \gg 1$ の時、 $Y_{eq} \ll 1$ であり方程式 (2.37) は以下のように近似できる。

$$\frac{dY}{dx} \sim -Y^2 \frac{\lambda}{x^2}. \quad (2.38)$$

X 粒子の反応が切れて凍結 (freeze out) する時期の温度を T_f その時の x を x_f 、その時の Y を Y_f とし、 $x \gg 1$ の極限での Y を Y_∞ と表す。対消滅の反応率のエネルギー依存性が無視できるとして、 $x > x_f$ で方程式 (2.38) の近似が有効として解くと以下の結果を得る。

$$\frac{1}{Y_\infty} - \frac{1}{Y_f} = \frac{\lambda}{x_f}. \quad (2.39)$$

$Y_f \gg Y_\infty$ の近似を使うと、凍結後の X 粒子の数密度と凍結時の宇宙の温度との関係を与える以下の関係式を得る。

$$Y_\infty \sim \frac{x_f}{\lambda}. \quad (2.40)$$

この結果は X 粒子がフェルミオンかボソンかによらない。なぜなら $x \gg 1$ で物事が決まっており、熱平衡分布のウイーン側だけが寄与しており、マックスウエル・ボルツマン分布が良い近似を与える領域であるからである。図 2.5 に Y の進化を様々 λ の値に対して方程式 (2.37) を用いて解いた結果と熱平衡分布で求めた結果の比較を示した。これから λ の値によらず $x_f \sim 10$ までは、熱平衡分布に良く一致しているが、それより温度が下がると急激に熱平衡分布からズレが生じることが分かる。 λ の値は X 粒子の対消滅の反応率と以下のように関係している。ハッブルレート $H(m_X c^2)$ を求めるため $k_B T \sim 10 \text{ GeV}$ の宇宙の相対論的粒子の自由度 N_{rela} を求める。トップクォークのみ非相対論的であるとして扱くと、残り 5 つのクォークは、スピンの自由度は 2 で、更に 3 つの独立な color charge (赤・青・緑) を持つ。そこ

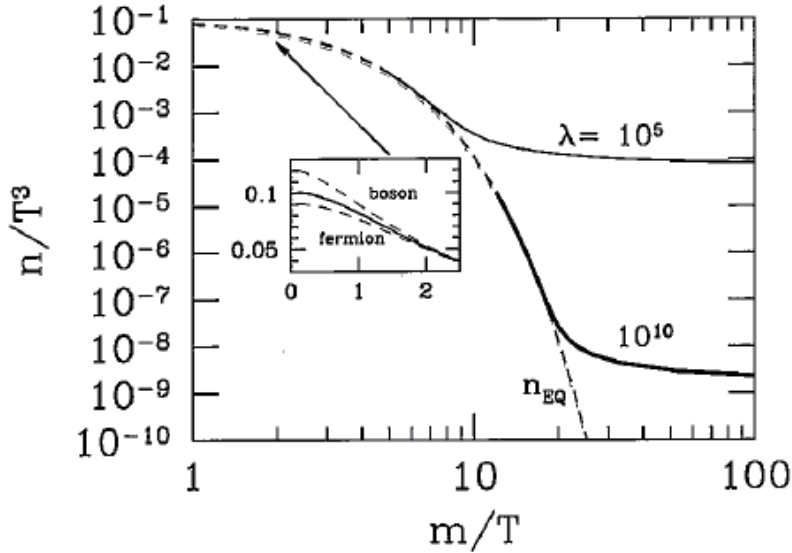


図 2.5 X 粒子の数密度と光子数密度との比の温度依存性。

で、クォーク・反クォークはそれぞれ $5 \times 2 \times 3 = 30$ の自由度を持つ質量ゼロのフェルミオンとして扱う。電子・陽電子、ミューオン・反ミューオン、タウオン・反タウオンはフェルミオンで自由度 $2 \times 6 = 12$ 、ニュートリノ・反ニュートリノはそれぞれ 3 で合計 6 の寄与を与える。ヒッグスボソン・Weak bosons は非相対論的であるとする。グルーオンは赤・青・緑とそれらの補色反赤・反青・反緑の組み合わせで 9 つの可能性があるが、赤反赤 + 青反青 + 緑反緑 = 白の制約から補色同士の組み合わせの内一つは独立ではなく、独立なグルーオンは 8 つとなる。それぞれがスピンの自由度 2 をもつので、合計 $2 \times 8 = 16$ の自由度の寄与を与える。超対称性の破れが既に起きているとし、暗黒物質候補として残った最も軽い超対称性パートナー粒子が非相対論的粒子として存在しているとする。つまり超対称性パートナー粒子は、当時の宇宙のエネルギー密度に寄与を与えないとする。以上から当時の相対論的粒子の自由は以下のように求まる。

$$N_{rela} = 2 + 16 + \frac{7}{8}(30 + 30 + 12 + 6) = 86.25. \quad (2.41)$$

以上からハッブルレートが以下のように求まる。

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \frac{N_{rela}}{2} \frac{a_B T^4}{c^2}} = 1.9 \times 10^8 \left(\frac{k_B T}{10 \text{ GeV}} \right)^2 \text{ sec}^{-1}. \quad (2.42)$$

またこの時の CMB 光子数密度は以下ようになる。

$$n_\gamma = 3.16 \times 10^{43} \left(\frac{k_B T}{10 \text{ GeV}} \right)^3 \text{ cm}^{-3}. \quad (2.43)$$

以上から反応率と X 粒子の質量および λ の値の関係式が以下のように求まる。

$$\langle \sigma_{X\nu} v \rangle = 6 \times 10^{-36} \left(\frac{\lambda}{1} \right) \left(\frac{m_X c^2}{10 \text{ GeV}} \right)^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-1}. \quad (2.44)$$

現在の宇宙に残存している X 粒子の質量密度を求める。現在の CMB 温度と当時の CMB 温度の間関係式をまず求める。ニュートリノ脱結合までの間に、電子・陽電子以外の全ての当時相対論的だった粒子が対消滅し、光子・ニュートリノ・電子・陽電子のエントロピーに変換される。ニュートリノ脱結合の時の宇宙の温度を T' としするとエントロピー保存則から当時の温度 T と T' の間の以下の関係式を得る。

$$\frac{N_{rela}}{2} a^3 T^3 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{7}{8} (3 + 3 + 2 + 2) \right) a'^3 T'^3. \quad (2.45)$$

これよりニュートリノ脱結合直前の CMB の温度は以下ようになる。

$$T' = 2 \left(\frac{a}{a'} \right) T. \quad (2.46)$$

ニュートリノ脱結合後、電子陽電子対消滅によって式 (1.129) で示したように更に光子にエントロピーが付け加わるので、現在の CMB の温度との関係式として以下の式をえる。

$$T_0 = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{a'}{a_0} \right) T' = 2.8 \left(\frac{a}{a_0} \right) T. \quad (2.47)$$

以上から現在の X 粒子の密度を現在の CMB 温度を用いて表す以下の関係式が得られる。

$$\rho_{X0} = m_X Y_\infty n_\gamma(T) a^3 = m_X Y_\infty \frac{n_\gamma(T_0)}{2.8^3} = m_X \frac{x_f}{\lambda} \frac{n_\gamma(T_0)}{2.8^3}$$

$$= m_X \frac{H(m_X)x_f n_\gamma(T_0)}{2.8^3 n_\gamma(m_X) \langle \sigma_X v \rangle}. \quad (2.48)$$

X 粒子の密度パラメータは以下のようになる。

$$\begin{aligned} \Omega_X h^2 &= m_X \frac{H(m_X)x_f n_\gamma(T_0)h^2}{2.8^3 n_\gamma(m_X)\rho_{cr} \langle \sigma_X v \rangle} = \frac{k_B^2 x_f H_0 n_\gamma(T_0)h^2}{2.8^3 0.37 c^3 \langle \sigma_X v \rangle} \sqrt{\frac{N_{rela}}{2a_B \rho_{cr}^3}} \\ &= 0.3 \left(\frac{\langle \sigma_X \rangle}{3.7 \times 10^{-38} \text{cm}^2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.49)$$

ここで $v \sim c$ とした。この結果には、X 粒子の質量が含まれず、反応断面積のみで決まる。反応断面積が大きくなると熱平衡が切れるまでに時間が掛かり、X 粒子の対消滅が進み数が少なくなる。弱い相互作用の反応断面積 (1.116) を $E = 1\text{GeV}$ の場合について評価すると $\sigma_{wk} = 5 \times 10^{-38} \text{cm}^2$ となり、宇宙の暗黒物質に要求される反応断面積と同程度になる。

2.2.2 Weakly interacting slim particles (WISPs)

WIMP 候補である superpartner 粒子が、加速器実験で見つからないことから、暗黒物質が WIMP では無い可能性も考えておく必要性が高まってきた。そのような粒子に Weakly interacting slim particles あるいは weakly interaction subelectronvolt particles、略称 WISPs と呼ばれる粒子がある。これらは、初期の熱平衡分布をしていた時期から反応が切れて残った残留物では無いため、質量が eV 以下と非常に軽いにも関わらず、CDM となりうる。WISP の代表選手が、Axion である。また、近年 Hidden photon も可能性として注目されている。

2.3 Free streaming scale of the dark matters

バリオンや光子との結合が非常に小さい粒子で構成される暗黒物質は Free streaming scale の大小によって hot DM, warm DM, cold DM と分類される。この節では、暗黒物質の宇宙論的分類の根拠になっている Free streaming scale について調べる。暗黒物質の脱結合後は、暗黒物質粒子は、

その進路を妨げる物質が存在しないため、空間を直進即ち測地線を走る。粒子の運動量は式 (2.18) にしたがって、宇宙の膨張にしたがって減少する。粒子の運動エネルギーが静止質量エネルギーより大きい時、粒子の運動は相対論的であり、速度は光速である。この時期に、宇宙の粒子的地平線より短いスケールの暗黒物質の密度が平均密度より僅かに高い領域があったとする。暗黒物質はハッブルタイム程度の中に粒子的地平線程度走れるため、ハッブルタイム以下の時間で暗黒物質が密度の高い領域から周囲の領域に走り去り始めにあった密度の高い領域は消え去ってしまい、平均密度と同化する。この現象を **Free streaming** と呼ぶ。即ち、波長が地平線の長さ以下の密度揺らぎは、均されて消えてしまう。一方、波長が地平線より十分長い密度揺らぎは、暗黒物質の移動が揺らぎのスケール内部で起きるだけのため、大きな影響を受けず存続し続ける。このように暗黒物質の **Free streaming** により消滅する揺らぎと生き残る揺らぎの境界となるスケールが存在し、これを **Free streaming scale** と呼ぶ。

ある暗黒物質が時刻 t_{nr} の時、

$$k_B T(t_{nr}) = mc^2, \quad (2.50)$$

となったとする。節 2.1 と同様に粒子の運動方向を x 軸にとる。粒子の測地線方程式の第 0 成分が以下のように与えられる。

$$\frac{du^0}{d\tau} = -\Gamma_{11}^0 u^1 u^1 = -\frac{1}{c} a \dot{a} u^1 u^1 = -\frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a^3} v_0^2 = \frac{d}{cdt} \left(\frac{v_0^2}{2a^2} \right). \quad (2.51)$$

ここで $\Gamma_{11}^0 = a\dot{a}/c$ と式 (2.17) を用いた。左辺は、次のように変形できる。

$$\frac{du^0}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{du^0}{dt} = \frac{1}{c} u^0 \frac{du^0}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{(u^0)^2}{2} \right).$$

この式と式 (2.51) より

$$(u^0)^2 = \frac{v_0^2}{a^2} + Const,$$

を得る。ここで $a \rightarrow \infty$ の極限即ち特異測度 0 の極限で $u^0 \rightarrow c$ であることから積分定数が求まり、最終的に u^0 を表す式として以下の式を得る。

$$(u^0)^2 = \frac{v_0^2}{a^2} + c^2. \quad (2.52)$$

この式の両辺に質量 m の二乗を掛け、 $mu^0 = p^0/c = \varepsilon/c$ (ここで ε は粒子のエネルギー) であることを用いると以下の結果を得る。

$$\varepsilon = (mc^2)^2 + (p(t)c)^2. \quad (2.53)$$

この結果は特殊相対論でよく知られた自由粒子のエネルギーと運動量の関係式である。式 (2.17) で扱った固有速度では無く、粒子の速度 (座標速度と呼ぶことにする) $v(t) = a(t)dx/dt$ は $v(t) = p(t)c^2/\varepsilon$ で与えられる即ち

$$v(t) = \frac{p(t)c^2}{\sqrt{(mc^2)^2 + (p(t)c)^2}} = \frac{v_0/a}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2}{c^2} \frac{1}{a^2}}}, \quad (2.54)$$

で与えられる。 $k_B T \ll mc^2$ の極限、即ち非相対論的運動の極限では座標速度は以下のようになり

$$v(t) \sim \frac{v_0}{a}, \quad (2.55)$$

固有速度と同様スケール因子に逆比例して減少する。非相対論的運動をする粒子にとって、固有時間と座標時間の差が無意味になることを考えれば当然の結果である。一方超相対論的極限、即ち $k_B T \gg mc^2$ の極限では座標速度は

$$v(t) \sim c, \quad (2.56)$$

となり光速に近づくことが確認できる。

以上の結果を用いて Free streaming scale を t_{nr} の時期によって分類し、thermal relic としての暗黒物質の hot dark matter と cold dark matter の分類について述べる。以下、暗黒物質粒子の脱結合期は、ニュートリノのように t_{nr} より十分前に起きたとする。簡単のため粒子は x 軸方向に運動するとする。粒子の座標速度を $v(t)$ とし dt 秒間の共同座標系での粒子の移動距離を dx とすると

$$v(t) = a(t) \frac{dx}{dt}$$

であり、時間進化は式 (2.54) で与えられる。時刻 t からハッブルタイム程度の期間に移動した距離を $\ell_{FS}(t)$ とすると以下のように書ける。

$$\ell_{FS}(t) = a(t_0) \int_t^{t+1/H} \frac{v(t')}{a(t')} dt'. \quad (2.57)$$

ここでは Free streaming scale を $t = t_0$ における長さ即ち共同座標で表している。波長がこのスケール以下の密度ゆらぎは、Free streaming の結果均され消え去る。このスケールが Free streaming scale である。輻射・物質エネルギー equality の時刻を t_{eq} とする。以下幾つかの場合に対して Free streaming scale を評価する。まずニュートリノを想定して $t_{nr} > t_{eq}$ の場合、即ち物質優勢の時期になってやっと非相対論的になる thermal relic について考察する。ここで簡単のため $t_{eq} < t$ で $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$ とする。この時、Free streaming scale は以下のように計算できる。

$$\ell_{FS}(t) = a(t_0) \int_t^{t+1/H} \frac{v(t')}{a(t')} \frac{dt'}{da(t')} da(t') = \frac{3}{2} a(t_0) \int_{a(t)}^{a(t+1/H)} \frac{da(t')}{a(t')^{1/2}} \frac{v_0 t_0}{\sqrt{a(t')^2 + \beta_0^2}} \quad (2.58)$$

ここで $\beta_0 = v_0/c$, $p_0 = mv_0$ であり、 $p(t) = p_0/a(t)$ である。時刻 t_{nr} では、 $pc = mc^2$ であることから $mv_0/a(t_{nr}) = mc$ 即ち $\beta_0 = a(t_{nr})$ である。式 (2.58) の計算を以下のように簡略化して行う。 $t < t_{nr}$ では、 $v(t) = c$ 、 $t > t_{nr}$ では $v(t) = v_0/a(t)$ とする。この近似の元では、 t_{nr} 以前では粒子の free streaming scale が粒子的地平線と同じになる。したがって、ニュートリノの温度が静止質量以下となりニュートリノの運動が非相対論的になる以前に horizon reentry する小さなスケールの密度揺らぎからはニュートリノが抜け出し、揺らぎの振幅の減衰が起きる。一方、この時期より以降に horizon reentry する揺らぎのニュートリノ free streaming scale は、horizon サイズより短く、horizon サイズに近い大きなスケールの揺らぎはニュートリノ free streaming による減衰を被らない。 t_{nr} 以降は、Free streaming scale が以下のようになる。

$$\ell_{FS} = \frac{3}{2} a(t_0) v_0 t_0 \int_{a(t)}^{a(t+1/H)} \frac{da}{a^{3/2}} = \frac{a(t_0)}{a(t+1/H)} 3v_0 t_0 a(t+1/H) \left[\frac{1}{a(t)^{1/2}} - \frac{1}{a(t+1/H)^{1/2}} \right]$$

$$\sim \frac{a(t_0)}{a(t)} 3v(t)t \left[1 - \left(\frac{1}{1+3/2} \right)^{1/3} \right] \sim \left(\frac{T_V}{T_{V,0}} \right)^{-1/2} \left(\frac{k_B T_V}{m_\nu c^2} \right) \frac{c}{H_0}. \quad (2.59)$$

ここで $k_B T_{V,0} = 1.7 \times 10^{-4} \text{eV}$ は現在の宇宙背景ニュートリノの温度である。以下で定義される Free Streaming mass を導入する。

$$M_{FS} = \frac{4\pi}{3} \ell_{FS}(t)^3 \rho_M(t_0) \sim \frac{4\pi}{3} \ell_{FS}(t)^3 \Omega_M h^2 \rho_{cr,0}. \quad (2.60)$$

ニュートリノの Free streaming scale および Free streaming mass は以下のようになる。

$$\ell_{FS} \sim 120 h^{-1} \left(\frac{mc^2}{0.1 \text{eV}} \right)^{-1} \left(\frac{k_B T_V}{0.1 \text{eV}} \right)^{1/2} \text{Mpc}. \quad (2.61)$$

$$M_{FS} \sim 3 \times 10^{17} \left(\frac{\Omega_M h^2}{0.1427} \right) h^{-3} \left(\frac{mc^2}{0.1 \text{eV}} \right)^{-3} \left(\frac{k_B T_V}{0.1 \text{eV}} \right)^{3/2} M_\odot. \quad (2.62)$$

ここで宇宙背景ニュートリノの温度として典型的エネルギーを持った粒子の速度が非相対論的になる温度 $k_B T_V = m_\nu c^2 = 0.1 \text{eV}$ を代入した。この結果は、大規模構造の種となる密度揺らぎの波長より短い波長の密度揺らぎを構成しているニュートリノは Free streaming して、揺らぎから逃げ出してしまふことを示している。ニュートリノが Free stream した結果、Free streaming scale 以下の密度揺らぎの振幅が減衰する。この結果は、宇宙背景ニュートリノの熱速度が光速に近い早い速度を持っていることに起因している。

図 2.6 にニュートリノ Free streaming による密度揺らぎのパワースペクトルをニュートリノ総質量がゼロの場合と 0.1eV の時について示した。ニュートリノが質量を持つことで密度揺らぎのパワースペクトルの振幅が減衰することが分かる。Hot Dark Matter (HDM) であるニュートリノは、大規模構造の発現にはある程度協力的だが銀河団や銀河といった天体の発現を妨げる言い換えると遅らせる効果を持つのである。密度揺らぎのパワースペクトルを精度良く観測できれば、この違いも用いてニュートリノ総質量の上限を与えることができる。例えば次世代 CMB B-mode 偏光観測実験 Simons Observatory では、宇宙の大規模構造による重力レンズ効果で生じる CMB B-mode 偏光のパワースペクトルの観測から密度揺らぎのパワース

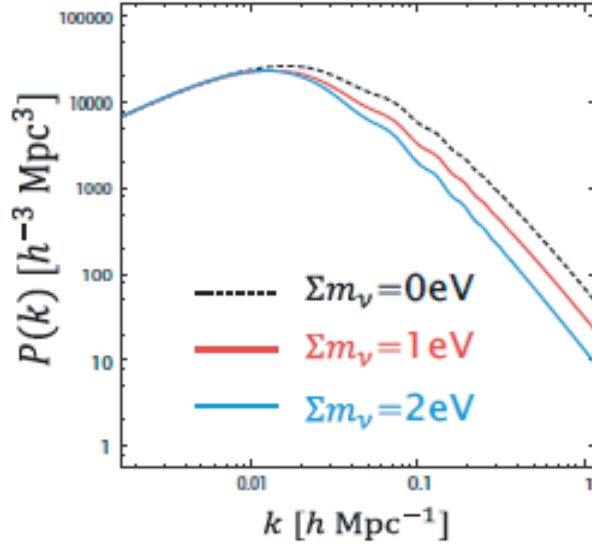


図 2.6 ニュートリノ総質量和と密度揺らぎのパワースペクトル。

ペクトルを精度良く測定することでニュートリノ質量和を 0.02eV の精度で決定できる (参図 2.7)。つまり Simons Observatory の結果によりニュートリノの総質量が決定される可能性が非常に高いということである。

次の Cold Dark Matter を意識して、 $t_{nr} \ll t_{eq}$ 、即ち輻射優勢の時期に非相対論的になった場合を扱う。違いはスケール因子の時間依存性が $a(t) \sim (t/t_{eq})^{1/2}$ に変わることで、Cold Dark Matter 候補粒子の脱結合は、前の節で議論したように $k_B T/mc^2 \sim 0.1$ 程度と非相対論的になった時に起きる可能性が高いことである。即ち $t_{dec} > t_{nr}$ である。粒子の質量が非常に大きい場合、脱結合は、輻射優勢期に起きる。Free streaming は、脱結合以降の現象であるので、 t_{dec} 以降に暗黒物質の粒子が走る事ができる距離である。脱結合期の温度と静止質量エネルギーの比を α^2 で表すと脱結合期の粒子の典型的速度は $v_{CDM} = \alpha c \sim 0.3c$ である。ここで $\alpha^2 \sim 0.1$ を用いた。細かい係数の違いを無視すれば、脱結合直後の Free streaming scale および free streaming mass は

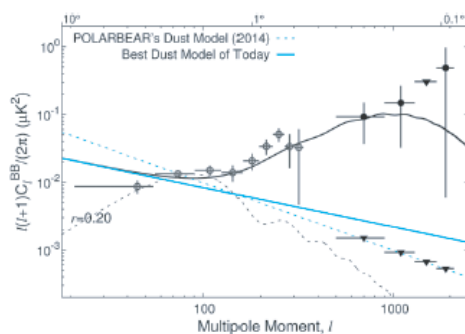
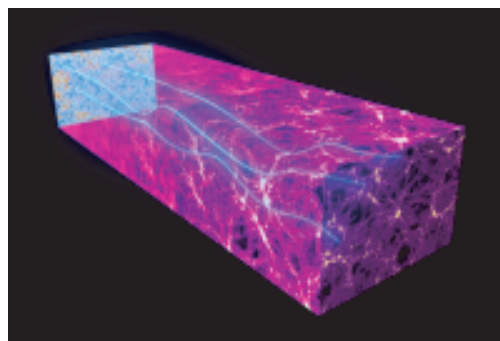


図 2.7 大規模構造の重力レンズ効果による CMB E モード偏光から B モード偏光の生成。CMB 偏光観測による lensing B mode 観測の現状。

$$\ell_{FS}(t) \sim \left(\frac{k_B T_{v,0}}{mc^2} \right)^{1/2} \alpha^{1/2} \frac{c}{H_0} = 2 \left(\frac{mc^2}{100\text{GeV}} \right)^{-1/2} \left(\frac{\alpha}{0.3} \right)^{1/2} \text{pc}. \quad (2.63)$$

$$M_{FS} \sim 1.65 \times 10^{-6} M_{\odot}. \quad (2.64)$$

となる。ここで m は暗黒物質粒子の質量である。またニュートリノの温度を時計がわり（宇宙年齢がわり）に使っている。殆ど全てのスケールの揺らぎが生き残ることが分かる。100GeV 程度の質量を持ってして宇宙の温度が 10GeV 程度の時に脱結合した粒子は、CDM の候補粒子となりうるのである。

熱的な起源では無く、宇宙の温度が非常に高い（例えば 100GeV より更に高い時期）時期に生成され脱結合して非相対論的になった粒子であり、Cold Dark Matter としての役割を担う粒子として WISP と分類される粒子の研究

が近年盛んに研究されている。Standard QCD が陽子が大きな電気双極子を持つことを予言してしまうことを解消する為導入された Peccei-Quinn 対称性の破れに関連して生成された粒子 Axion などである。最近では、オリジナルな axion にとらわれず、何らかの対称性の破れに関連して生じる可能性がある粒子を axion like particle (ALPs) と呼びなんでもありの状態で色々な暗黒物質候補粒子が提案されている。質量が 10^{-20}eV 程度かそれ以下の超軽量粒子などはそのさいたるものである。こいつらは、粒子の質量は小さいが熱的期限でない為、生まれたときから熱速度をほとんど持たない。そのため Free streaming scale が短く CDM としての役割を果たす。

第3章

インフレーション

現在の宇宙は、膨張し続けている。この途方も無く巨大な、膨張のエネルギー源は何であろうか？宇宙に端や境界はあるのだろうか？現在の宇宙に存在する天体は、初期に小さな振幅だった密度揺らぎが自己重力により集まって形成されたと考えられているが、そもそも密度揺らぎはどうやって生成されたのだろうか？これらの素朴な疑問に加えて次の節で解説する平坦性問題と地平線問題に解答を与えるのがインフレーションモデルである。インフレーション期の真空の量子揺らぎから生成されたスカラー揺らぎこそが、天体の種となった密度揺らぎの起源であり、宇宙の構造形成論の初期条件を与える。しかし、この理論的予言をフルに理解するには、面倒で遠い道のりの計算をこなさなければならない。そこでこの章では、まずインフレーション中のスカラー揺らぎの生成過程のエッセンスを抽出して解説する。その後、ゲージ不変量を導入してスカラー揺らぎの生成・進化の厳密な取り扱いを解説する。インフレーション期の時空の量子揺らぎにより原始重力波が生成される。この生成過程についてはフルに解説する。この章の最終目標は、観測的に検証可能な、インフレーション理論の予言を定量的に理解する事である。

3.1 準備

3.1.1 スカラー場の解析力学

質量 m 自由粒子のシュレディンガー方程式は、エネルギー E と運動量 p の関係式

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

をエネルギーと運動量の以下の関係で演算子に置き換えることで得られる。

$$E \rightarrow i\hbar\partial_t, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$$

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m^2}\nabla^2\psi$$

ここで ψ は粒子の波動関数である。ここで採用したエネルギーと運動量の関係式は非相対論的運動をする粒子の関係であるため、シュレディンガー方程式も非相対論的の運動をする粒子についてのみ適応可能である。相対論的な場合にも適応可能な量子力学の方程式を得るには、相対論的なエネルギーと運動量の関係式

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

を演算子に置き換える必要がある。これから以下の式を得る。

$$\square\phi - \frac{4\pi^2}{\lambda_c^2}\phi = 0 \quad \text{or} \quad (3.1)$$

$$\square\phi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0 \quad (3.2)$$

これをクライン・ゴードン方程式と呼ぶ。ここで

$$\square \equiv -\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + \nabla^2$$

はダランベルシアンで $\lambda_c \equiv h/mc$ は粒子のコンプトン波長である。以下ナチュラルユニットを用い $\hbar = c = 1$ とする。ナチュラルユニットを用いるとクライン・ゴードン方程式は以下のように書ける。

$$\square\phi - m^2\phi = 0$$

ダランベルシアン・質量ともにスカラー量であるので、場 ϕ が座標変換に対して不変即ちスカラー場であればクライン・ゴードン方程式は特殊相対論的に共変な方程式即ちローレンツ変換に対して不変な方程式となる。場 ϕ のスカラー関数 $V(\phi)$ で表わされるポテンシャルを導入しクライン・ゴードン方程式を以下のように書き換えても相対論的共変性は保たれる。

$$\square\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (3.3)$$

以後これをスカラー場の方程式として扱う。式 (3.2) は、 $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ の場合と捉える事ができる。このことからポテンシャル中場の量の二次の項を質量項 (mass term) と呼ぶ。ポテンシャルの前の符号は、場 ϕ が時間のみの関数の時式 (3.3) が以下のように書けることからポテンシャル場中の粒子の運動方程式との対応から決まっている。

$$\ddot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi}$$

スカラー場 $\phi(x)$ とその 4 次元座標微分 $\partial_\mu\phi(x)$ の関数である $L(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$ をラグランジアン密度を導入する。ここで x は $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ の 4 次元座標を表す。また $\mu = 0, 1, 2, 3$ を取る。作用積分は以下のように定義する。

$$I = \int_{V_4} d^4x L(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$$

積分領域 V_4 は 4 次元体積である。最小作用の原理は、以下のように表現できる。積分領域 V_4 をとり囲み境界を形成する 3 次元超曲面上のある固定した $\phi, \partial_\mu\phi$ に対して、場の方程式を満たす物理的場 (以下真の場と呼ぶ) は作用積分を最小にする。場が真の場の値を取るとして、境界面を除く積分領域内でそこから任意の無限小量 $\eta(x)$ ズラした場合を考える。この変分操作による作用積分のズレは以下のように書ける。

$$\delta I = \int_{V_4} d^4x (L(\phi + \eta, \partial_\mu\phi + \partial_\mu\eta) - L(\phi, \partial_\mu\phi))$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{V_4} d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \eta + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \eta \right) \\
&= \int_{V_4} d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \eta + \int_{V_4} d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \eta \right]
\end{aligned}$$

最後の等号の最後の項は、4次元のガウスの定理を用いて V_4 の境界面上の面積分に置き換えることが出来、境界面上では場の値を固定即ち変分 η がゼロであることを用いて消すことができる。最小作用の原理は、任意の変分 η に対して $\delta I = 0$ であることを主張しており、このことから

$$0 = \int_{V_4} d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \eta$$

を得る。この式が任意の変分に対して成り立つためには、ラグランジアン密度は以下の式を満たさなければならない。

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} = 0 \quad (3.4)$$

これが場のオイラー・ラグランジュ方程式である。ここでは暗黙の内にインシュタインの規約に従い、上付きと下付きの μ が同時に現れたら 0 から 3 まで縮約を取ることを仮定している。因みに $\partial_\mu \phi = \partial \phi / \partial x^\mu$ は上付き x^μ の微分であるため下付きである。一方 $\partial L / \partial \partial_\mu \phi$ は上付きである。従って、

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} = \sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi}$$

である。スカラー場のラグランジアン密度の一般的形は以下の形で与えられる。

$$L = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \quad (3.5)$$

ここで $\eta^{\alpha\beta}$ はミンコフスキー計量で対角成分のみ $(-1, 1, 1, 1)$ の値を持つ 4×4 行列である。これをオイラー・ラグランジュ方程式 (3.4) に代入すると式 (3.3) が得られることが確かめられる。ラグランジアン密度を作る上で重要な指針の一つは、導かれる物理法則が座標系の取り方に依存しない即ち相対性原理を満たすようにするため、ローレンツ変換に対してスカラー量になるように作ることである。もちろん重力場中の曲がった空間では、一

一般座標変換に対してスカラーになるようにすればよい。

場の正準運動量は以下のように定義する。

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial L}{\partial \partial_t \phi(x)} \quad (3.6)$$

3.1.2 場のネーターの定理

以下の無限小座標変換に対する作用積分の変化量を調べる。

$$x'^{\mu}(x') = x^{\mu} + \delta x^{\mu}(x)$$

ここで無限小量 $\delta x^{\mu}(x)$ は 4 次元座標の関数である。この座標変換により場 $\phi(x)$ が以下のように変換されるとする。

$$\phi'(x') = \phi(x) + \delta \phi(x) \quad (3.7)$$

場の量のリー微分は以下のように定義される。

$$\delta^L \phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x) \quad (3.8)$$

座標変換後の関数形を元の座標に持ってきてある時空点での間数値を元々の関数のさす間数値との差分をとる操作である。この式を変形する。

$$\begin{aligned} \delta^L \phi(x) &= \phi'(x) - \phi'(x') + \phi'(x') - \phi(x) \\ &= -\delta x^{\alpha} \partial_{\alpha} \phi'(x) + \delta \phi(x) \end{aligned}$$

最後の等号の第一項の $\phi'(x)$ の $\phi(x)$ からのズレは微少量の一次であり、既に微少量 δx^{α} が掛かっていることからその差を考慮することは微少量の二次以上の差を生じるのみであり無視して差し支えない。したがって以下の式を得る。

$$\delta^L \phi(x) = -\delta x^{\alpha} \partial_{\alpha} \phi(x) + \delta \phi(x) \quad (3.9)$$

座標変換による作用積分の変化量は以下の式で計算される。

$$\delta I = \int_{V'_4} d^4 x' L(\phi'(x'), \partial'_{\mu} \phi'(x')) - \int_{V_4} d^4 x L(\phi(x), \partial_{\mu} \phi(x))$$

左辺第一項の積分変数を以下の関係式を用いて x' から x に変換する。

$$d^4x' = \frac{\partial(x')}{\partial(x)} d^4x$$

$\partial(x')/\partial(x)$ はヤコビアンであり微少量の一次までで以下のように計算できる.

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)} = 1 + \partial_\nu \delta x^\nu$$

ヤコビアンは座標変換によりスケールが変化したことにより4次元空間中物理的に同じ微小領域の4次元体積の変化前後での変化率を表している. 上の式の右辺第二項は、座標変換を表す4次元微小ベクトルの発散である. この発散量は座標変換による体積変化率であり、ヤコビアンが上記の式で書ける事は物理的にも当然の結果である. 次の'系での場の量の4次元座標での微分を元の座標系の量で表わす. チェインルールを使って'系の座標微分は元の座標系の微分に次のように変換できる.

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

ここで

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu$$

より $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$ を成分とする 4×4 行列は行列 $(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu})$ の逆行列である. 座標変換の式よりこの行列の成分は以下のように計算できる.

$$\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu + \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu}$$

この行列の逆行列を求めることで微少量の一次までの精度で以下のように計算できる.

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta_\mu^\nu - \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu}$$

これらから以下の式を得る.

$$\begin{aligned} \partial'_\mu \phi'(x') &= \partial_\mu \phi(x) - \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu} \partial_\nu \phi(x) + \partial_\mu \delta \phi(x) \\ &= \partial_\mu \phi(x) + \partial_\mu \delta^L \phi(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi(x) \end{aligned}$$

以上を代入して作用積分の変化量を計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta I &= \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x (1 + \partial_\alpha \delta x^\alpha) \\
&\quad \times \left(L(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + \frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} (\partial_\mu \delta^L \phi + \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi) \right) \\
&\quad - \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x L \\
&= \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \left(\partial_\alpha \delta x^\alpha L + \frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} (\partial_\mu \delta^L \phi + \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi) \right) \\
&= \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \partial_\mu \left(\delta x^\mu L + \delta^L \phi \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) + \int_{V_4} d^4x \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi \\
&\quad + \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \delta^L \phi - \delta x^\mu \partial_\mu L \right) \\
&= \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \partial_\mu \left(\delta x^\mu L + \delta^L \phi \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) + \int_{V_4} d^4x \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi \\
&\quad + \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \delta^L \phi - \delta x^\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \partial_\mu \phi + \frac{\partial L}{\partial \nu \phi} \partial_\mu \partial_\nu \phi \right) \right) \\
&= \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \partial_\mu \left(\delta x^\mu L + \delta^L \phi \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \\
&\quad + \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta^L \phi
\end{aligned}$$

場がオイラー・ラグランジュ方程式を満たす時作用積分の変分は以下のよう
に書ける。

$$\delta I = \frac{1}{c} \int_{V_4} d^4x \partial_\mu \left(\delta x^\mu L + \delta^L \phi \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \quad (3.10)$$

以上では、ラグランジアンが陽に 4 次元座標に依存しないとした。

系がある座標変換に対して不変 (対称) である時、その座標変換による作用積分の変化量はゼロである。即ち式 (3.10) が任意の 4 次元体積 V_4 に対してゼロである。このことから系がある座標変換に対して不変であるとき次の式が成り立つことが分かる。

$$\partial_\mu N^\mu = 0 \quad (3.11)$$

$$N^\mu \equiv - \left(\delta x^\mu L + \delta^L \phi \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \quad (3.12)$$

式(3.12)で定義される4元ベクトルをネーター・カレントと呼び、式(3.11)で表わされる保存則をネーターの定理と呼ぶ。

3.1.3 スカラー場のエネルギー・運動量テンソル

スカラー場は定義より任意の座標変換に対して不変な物理量である。従って任意の無限小変換に対して、

$$\delta \phi(x) = 0$$

である。

まずスカラー場のエネルギー密度を求める。そこで無限小時間推進

$$\begin{aligned} \delta x^0 &= \varepsilon \\ \delta x^i &= 0 \end{aligned}$$

に付随したネーターカレントを求める。ここで $i = 1, 2, 3$ を取る。リー微分は次のようになる。

$$\delta^L \phi = -\varepsilon \dot{\phi}$$

従って、ネーターカレントは以下のようになる。

$$\begin{aligned} N^{00} &= -\varepsilon L + \varepsilon \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \varepsilon \left(\frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2) + V \right) \\ N^{0i} &= \varepsilon \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \partial_i \phi} = -\varepsilon \dot{\phi} \partial^i \phi \end{aligned}$$

ここでスカラー場のラグランジアンとして式(3.5)すなわち

$$L = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - V$$

を代入した。粒子の場合との対応から N^{00} がスカラー場のエネルギー密度であり、 N^{0i} がスカラー場のエネルギー流束とあると考える。

次にスカラー場の運動量密度を求める。そこで x 軸方向の無限小空間推進

$$\begin{aligned}\delta x^0 &= 0 \\ \delta x^1 &= \xi \\ \delta x^2 &= 0 \\ \delta x^3 &= 0\end{aligned}$$

に付随したネーターカレントを求める。リー微分は次のようになる。

$$\delta^L \phi = -\xi \partial_1 \phi$$

従って、ネーターカレントは以下のようになる。

$$\begin{aligned}N^{10} &= -\xi (-\partial^1 \phi \dot{\phi}) \\ N^{11} &= -\xi L + \xi \partial^1 \phi \frac{\partial L}{\partial \partial^1 \phi} = -\xi \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - V + (\partial^1 \phi)^2 \right) \\ N^{12} &= \xi \partial^1 \phi \frac{\partial L}{\partial \partial^2 \phi} = -\xi \partial^1 \phi \partial^2 \phi \\ N^{13} &= -\xi \partial^1 \phi \partial^3 \phi\end{aligned}$$

粒子の時の対応から $-N^{10}$ をスカラー場の運動量の密度の x 成分とみなすことが出来る。他成分も同様にして求められる。

以上よりスカラー場のエネルギー・運動量テンソル ($T^{\mu\nu}$) が以下のように求まる。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2) + V & -\dot{\phi}\partial^1\phi & -\dot{\phi}\partial^2\phi & -\dot{\phi}\partial^3\phi \\ -\dot{\phi}\partial^1\phi & \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - (\vec{\nabla}\phi)^2) - V + (\partial^1\phi)^2 & \partial^1\phi\partial^2\phi & \partial^1\phi\partial^3\phi \\ -\dot{\phi}\partial^2\phi & \partial^1\phi\partial^2\phi & \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - (\vec{\nabla}\phi)^2) - V + (\partial^2\phi)^2 & \partial^3\phi\partial^2\phi \\ -\dot{\phi}\partial^3\phi & \partial^1\phi\partial^3\phi & \partial^2\phi\partial^3\phi & \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - (\vec{\nabla}\phi)^2) - V + (\partial^3\phi)^2 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

ネーターの定理よりこれで定義される ($T^{\mu\nu}$) がエネルギー・運動量保存則

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

を満たすことは自明である。エネルギー・運動量テンソルは対称テンソルは以下のようにも書ける。

$$T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \eta^{\nu\beta} \partial_\beta \phi + \eta^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right) \quad (3.14)$$

明らかなように対称テンソルである。完全流体のエネルギー・運動量テンソルとの対応から非対角要素が速度に関する項ととらえることができる。従って、場が一様即ち $\vec{\nabla}\phi = 0$ が静止した完全流体に対応する。従ってスカラー場のエネルギー密度・圧力は以下のように定義される。

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \quad (3.15)$$

$$P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V \quad (3.16)$$

一般座標変換に対して不変な形への拡張は自明であろう。

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\nabla_{\alpha}\phi\nabla_{\beta}\phi + g^{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\phi\nabla_{\beta}\phi - V(\phi)\right) \quad (3.17)$$

ここで $g^{\mu\nu}$ はメトリックテンソルであり、 ∇_{μ} は共変微分である。

最後にスカラー場のハミルトニアンとエネルギー・運動量テンソルの 00 成分と比較する。場の正準運動量の定義 (3.6) とスカラー場のラグランジアン密度 (3.5) からスカラー場のハミルトニアン密度は以下のように計算される..

$$H \equiv \pi\dot{\phi} - L = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2) + V \quad (3.18)$$

これは期待通り T^{00} と等しい。

3.1.4 生成・消滅演算子、ハイゼンベルグの運動方程式

以下で定義される二つの任意の演算子 (Operator) A, B の間の演算を演算子の交換関係と呼ぶ。

$$[A, B] \equiv AB - BA \quad (3.19)$$

また以下で定義される二つの任意の演算子 A, B の間の演算を演算子の反交換関係と呼ぶ。

$$\{A, B\} \equiv AB + BA \quad (3.20)$$

以下の交換関係を満たす演算子 a とそのエルミート共役 (Hermitic Conjugate ; a を転置して複素共役を取ったもの) a^{\dagger} を定義する。

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (3.21)$$

$$[a^\dagger, a^\dagger] = [a, a] = 0 \quad (3.22)$$

これらの用いて以下の演算子を定義する.

$$N \equiv a^\dagger a \quad (3.23)$$

以下のこれらの演算子の性質調べる. 状態を $|G\rangle$ が演算子 N の固有値が G の固有状態であるとする.

$$N|G\rangle = G|G\rangle \quad (3.24)$$

状態 $|G\rangle$ は規格化されており

$$\langle G|G\rangle = 1$$

を満たす. 交換関係式 (3.21),(3.22) より N と a, a^\dagger の間の以下の交換関係式が成り立つことは容易に確かめられる.

$$[N, a] = Na - aN = -a \quad (3.25)$$

$$[N, a^\dagger] = Na^\dagger - a^\dagger N = a^\dagger \quad (3.26)$$

まず固有値 G が正の整数であることを示す. 式 (3.24) の両辺に左から状態 $|G\rangle$ のエルミート共役な状態 $\langle G|$ を作用する.

$$\langle G|a^\dagger a|G\rangle = G$$

ここで $\langle G|a^\dagger$ は $a|G\rangle$ のエルミート共役であるのでこの式の左辺は状態 $a|G\rangle$ の大きさを計算する式である. 従って左辺はゼロ以上の実数である. この事から固有値に対して以下の条件を得る.

$$G \geq 0 \quad (3.27)$$

即ち演算子 N の固有値はゼロ以上の実数である. 式 (3.24) の両辺に左から a を作用する.

$$aN|G\rangle = aG|G\rangle = Ga|G\rangle$$

固有値 G は定数、即ち任意の演算子と交換可能な C 数 (古典的な数)、なので演算子 a と交換する. 式 (3.25) を用いて $aN = Na + a$ をこの式の左辺に

代入すると

$$(Na + a)|G\rangle = Ga|G\rangle$$

を得る。これから以下の式を得る。

$$Na|G\rangle = (G-1)a|G\rangle \quad (3.28)$$

この結果は状態 $|G\rangle$ に a を作用して得られる新しい状態 $a|G\rangle$ は演算子 N の固有状態でありその固有値が $G-1$ であることを示している。この操作を m 回繰り返すことで以下の式を得る。

$$Na^m|G\rangle = (G-m)a^m|G\rangle$$

この式は $m > G$ なる m に対して $G-m < 0$ となり、条件式 (3.27) に反する可能性があることを示している。ある $m = m_0$ を境に $m_0 + 1 > G \geq m_0$ となるとする。

$$Na^{m_0}|G\rangle = (G-m_0)a^{m_0}|G\rangle$$

である。この式の両辺に左から a を作用して式変形をすると

$$Na^{m_0+1}|G\rangle = (G-m_0-1)a^{m_0+1}|G\rangle$$

となる。この式を状態 $a^{m_0+1}|G\rangle$ は演算子 N の固有値が $G-m_0-1$ の固有状態であることを示していると解釈すると条件式 (3.27) に反する。条件式 (3.27) に反しないためには

$$a^{m_0+1}|G\rangle = 0 \quad (3.29)$$

即ち固有値がゼロ以上の最低値をとる固有状態 $a^{m_0}|G\rangle$ に更に a を作用して得られる状態がゼロになる必要がある。逆にこうであれば状態 $|G\rangle$ に幾ら a を掛けても $m_0 + 1$ 回以上の場合状態がゼロになってしまい固有値が負になることを防ぐことができる。式 (3.29) に左から a^\dagger を作用すると以下の式を得る。

$$a^\dagger a^{m_0+1}|G\rangle = 0$$

左辺を変形すると以下の式を得る。

$$a^\dagger a a^{m_0} |G\rangle = N a^{m_0} |G\rangle = 0$$

正の最低固有値を持つ状態が存在するためには $a^{m_0} |G\rangle$ はゼロであってはならない。したがって、この式は状態 $a^{m_0} |G\rangle$ の固有値がゼロでなければならないこと即ち

$$G = m_0$$

でなければならないことを示している。以上より以下のことが示された。

- ・ 演算子 N の固有値は正の整数である。
- ・ 演算子 N の最低固有値は 0 であり、その固有状態に演算子 a を作用するとゼロになり状態が消える。

一つ目の性質から演算子 N は number operator と呼ばれる。演算子 N の最低固有値に対する固有状態を真空状態とよび規格化された真空状態を $|0\rangle$ で表わす。即ち

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad (3.30)$$

$$N|0\rangle = 0|0\rangle \quad (3.31)$$

$$a|0\rangle = 0 \quad (3.32)$$

式 (3.24) に左から a^\dagger を作用し交換関係式 (3.26) を用いて変形すると以下の式を得る。

$$N a^\dagger |G\rangle = (G+1) a^\dagger |G\rangle \quad (3.33)$$

この結果は状態 $|G\rangle$ に a^\dagger を作用して得られる新しい状態 $a^\dagger |G\rangle$ は演算子 N の固有状態でありその固有値が $G+1$ であることを示している。

場を量子化する章で演算子 N は場の構成量子（例、輻射場なら光子）の数を求める演算子として扱う。例えば N の固有値 n の固有状態 $|n\rangle$ は、量子が n 個存在する状態と解釈する。演算子 a は式 (3.28) から、状態 $|n\rangle$ から量子を一つ消滅させる演算子と解釈することができるため消滅演算子と呼ばれる。逆に演算子 a^\dagger は式 (3.33) から、状態 $|n\rangle$ から量子を一つ生成する演算子と解釈することができるため生成演算子と呼ばれる。更に演算子 N の固有値が正の整数であれば何でもよく上限がないことは一つのある量子状態に入ることができる量子の数に対応する。したがって、交換関

係式 (3.21)、(3.22) で定義される生成・消滅演算子はボーズ統計に従う量子の生成・消滅演算子として用いることができる。

最後に真空状態から規格化されたボーズ粒子系の n 量子状態 $|n\rangle$ を生成演算子を用いて記述する。

$$|n\rangle = C_n a^{\dagger n} |0\rangle$$

と書ける事は自明であろう。この状態の大きさは以下の式で計算される。

$$\begin{aligned} \langle n|n\rangle &= |C_n|^2 \langle 0|a^n a^{\dagger n}|0\rangle = |C_n|^2 \langle 0|a^{n-1} a a^{\dagger} a^{\dagger n-1}|0\rangle \\ &= |C_n|^2 \langle 0|a^{n-1} (1 + a^{\dagger} a) a^{\dagger n-1}|0\rangle \\ &= |C_n|^2 (\langle 0|a^{n-1} a^{\dagger n-1}|0\rangle + \langle 0|a^{n-1} a^{\dagger} a a^{\dagger} a^{\dagger n-2}|0\rangle) \\ &= |C_n|^2 (\langle 0|a^{n-1} a^{\dagger n-1}|0\rangle + \langle 0|a^{n-1} a^{\dagger} (1 + a^{\dagger} a) a^{\dagger n-2}|0\rangle) \\ &= |C_n|^2 (2 \langle 0|a^{n-1} a^{\dagger n-1}|0\rangle + \langle 0|a^{n-1} a^{\dagger 2} a a^{\dagger n-2}|0\rangle) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &= |C_n|^2 (n \langle 0|a^{n-1} a^{\dagger n-1}|0\rangle + \langle 0|a^{n-1} a^{\dagger n} a|0\rangle) \\ &= n |C_n|^2 \langle 0|a^{n-1} a^{\dagger n-1}|0\rangle \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &= n! |C_n|^2 \langle 0|0\rangle = n! |C_n|^2 = 1 \end{aligned}$$

この結果から以下の結果を得る。

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{\dagger n} |0\rangle \quad (3.34)$$

場を構成する基本量子のフェルミ統計に従う場合、ある一つの量子状態に2個以上の量子が入ることができない。フェルミ粒子系を扱う生成・消滅演算子は、以下の反交換関係により定義すればよいことを示す。

$$\{b, b^{\dagger}\} = 1 \quad (3.35)$$

$$\{b, b\} = \{b^{\dagger}, b^{\dagger}\} = 0 \quad (3.36)$$

反交換関係式 (3.36) より以下の式を得る.

$$\begin{aligned}bb &= -bb = 0 \\ b^\dagger b^\dagger &= -b^\dagger b^\dagger = 0\end{aligned}$$

ボーズ粒子径の場合と同様に number operator を $N \equiv b^\dagger b$ で定義すると以下の式を満たす.

$$NN = b^\dagger b b^\dagger b = b^\dagger (1 - b^\dagger b) b = N - b^\dagger b^\dagger b b = N$$

したがって

$$N(N-1) = 0 \tag{3.37}$$

である. この式の N の固有値が 0 または 1 であることを示している. したがって反交換関係式 (3.35)、(3.36) を満たす演算子をフェルミ統計に従う量子の生成・消滅演算子として用いることができる.

3.1.5 ハイゼンベルグの運動方程式

シュレディンガー方程式は以下のように書ける.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \tag{3.38}$$

ハミルトニアン H が時刻に依存しない時、この方程式の解は、時刻 $t=0$ の時の状態 $|\psi(0)\rangle$ を用いて以下のように書ける.

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle$$

ここで $e^{-iHt/\hbar}$ 演算子が指数の肩に乗った量であるが以下の式で定義されると考えれば計算可能であろう.

$$e^{-iHt/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{iHt}{\hbar} \right)^n$$

ハミルトニアンがエルミート演算子即ち $H^\dagger = H$ であることに注意すれば、状態ベクトルのエルミート共役は以下のように書けることが分かる.

$$\langle \psi(t) | = \langle \psi(0) | e^{iHt/\hbar}$$

ある物理量を表す時間に依存しない演算子 A の期待値は $\langle \psi(t)|A|\psi(t) \rangle$ のように計算される。この式を以下のように変形する。

$$\langle \psi(t)|A|\psi(t) \rangle = \langle \psi(0)|e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar} |\psi(0) \rangle$$

ここで A を時間に依存する演算子 $A(t)$ に以下の式によって変換する。

$$A(t) \equiv e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar}$$

すると物理量 A の期待値は $\langle \psi(0)|A(t)|\psi(0) \rangle$ と書け、時間依存性は演算子に押し付けられ状態は時間に依存しなくなる。測定量である物理量の期待値さえ同じであれば、時間依存性が状態の方であろうか（シュレディンガー描像）演算子の方であろうか（ハイゼンベルグ描像）どちらでも構わない。時間に依存する演算子 $A(t)$ を時間で微分すると以下の式を得る。

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{iH}{\hbar} A(t) - A(t) \frac{iH}{\hbar}$$

この結果を交換関係式を用いて整理した次の式をハイゼンベルグの運動方程式と呼ぶ。

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [A(t), H] \quad (3.39)$$

3.1.6 自由なスカラー場の量子化

自身及び他の場との非線形相互作用が無いスカラー場を自由粒子との対応で自由なスカラー場と呼び、運動方程式は式(3.2)で表わされる。体積 V 中の自由なスカラー場のエネルギー即ちハミルトニアンは式(3.18)を体積積分することで与えられる。

$$H = \int_V d^3x \left[\frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2 \right] \quad (3.40)$$

ここでは単位系を natural unit から cgs gauss に戻した。スカラー場のフーリエ級数表示は以下のように書ける。

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} q(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (3.41)$$

スカラー場は周期境界条件を満たすとし波数ベクトルは条件式 (B.20)~(B.22) を満たす。これをスカラー場の方程式 (3.2) に代入することで以下の結果を得る。

$$\hbar\omega_k = \sqrt{(\hbar kc)^2 + (mc^2)^2} \quad (3.42)$$

$$q(\vec{k}, t) = q_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t}. \quad (3.43)$$

角振動数 ω_k は、正負二つの値を取りうるが、ここでは正の値を採用した。またクライン-ゴードン方程式の二つの独立な解 $e^{\pm i\omega_k t}$ の内式 (3.43) では、 $e^{-i\omega_k t}$ を採用した。これは、スカラー場のフーリエ級数展開 (3.41) で $e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ を採用したことに対応して、波数ベクトルの方向が波の進行方向即ち位相一定面の進行方向と一致させるための選択である。またこれらは、あとで述べるように $\hbar\omega_k$ を粒子のエネルギーと解釈することに対応している。スカラー場が実関数即ちエルミートであるときフーリエ積分表示は以下のように書ける。

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left(q_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + q_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \quad (3.44)$$

これを式 (3.40) に代入すると以下の結果を得る。

$$H = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_k^2}{c^2} (q_{\vec{k}} q_{\vec{k}}^\dagger + q_{\vec{k}}^\dagger q_{\vec{k}}) \quad (3.45)$$

途中クロネッカーの δ 、 $\delta_{\vec{k}, -\vec{k}}$ が掛かる項が現れるがこれらは $\omega_k^2 - k^2 c^2 - (mc/\hbar)^2$ で括ることができ、分散関係式 (3.42) からゼロとなる。

スカラー場の全運動量 \vec{M} は節 3.1.3 の結果から以下のように書ける。

$$\vec{M} = \int_V d^3x \left(-\frac{1}{c^2} \dot{\phi} \vec{\nabla} \phi \right) \quad (3.46)$$

ここで natural unit を cgs gauss 単位系に戻すことで $1/c$ が一つ掛かり、更にエネルギー・運動量テンソルの単位がエネルギーであるため運動量の単位と揃えるために c で割っている。これに式 (3.44) を代入すると以下の結果を得る。

$$\vec{M} = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}} \vec{k}}{c^2} (q_{\vec{k}} q_{\vec{k}}^{\dagger} + q_{\vec{k}}^{\dagger} q_{\vec{k}}) \quad (3.47)$$

途中

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'} \omega_{\vec{k}} \vec{k}' &= \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} (-\vec{k}) \\ &= \sum_{\vec{k}'} \omega_{-\vec{k}'} \vec{k}' = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \vec{k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

を用いた。

自由なスカラー場がハイゼンベルグの運動方程式

$$\dot{\phi} = -\frac{i}{\hbar} [\phi, H] \quad (3.48)$$

を満たすためにはフーリエ係数が次の交換関係を満たせば良い。

$$[q_{\vec{k}}, q_{\vec{k}'}^{\dagger}] = \frac{\hbar c^2}{2\omega_{\vec{k}}} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (3.49)$$

$$[q_{\vec{k}}, q_{\vec{k}'}] = [q_{\vec{k}}^{\dagger}, q_{\vec{k}'}^{\dagger}] = 0 \quad (3.50)$$

次の式で $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^{\dagger}$ を定義する。

$$a_{\vec{k}} \equiv \sqrt{\frac{2\omega_{\vec{k}}}{\hbar c^2}} q_{\vec{k}} \quad (3.51)$$

$$a_{\vec{k}}^{\dagger} \equiv \sqrt{\frac{2\omega_{\vec{k}}}{\hbar c^2}} q_{\vec{k}}^{\dagger} \quad (3.52)$$

これらを交換関係式 (3.49)、(3.50) に代入すると以下の $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^{\dagger}$ の間の交換関係式を得る。

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (3.53)$$

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = [a_{\vec{k}}^{\dagger}, a_{\vec{k}'}^{\dagger}] = 0 \quad (3.54)$$

これから分かるように $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^{\dagger}$ はスカラー場を構成する量子の消滅・生成演算子である。生成消滅演算子を用いて全エネルギー・全運動量を書き表すと以下の結果を得る。

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k \left(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.55)$$

$$\vec{M} = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \quad (3.56)$$

全運動量の計算では式 (B.45) の導出時と同様の議論により

$$\sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} \frac{1}{2} = 0$$

となることを用いた。

生成消滅演算子を用いて量子化されたスカラー場は以下のように表される。

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\omega_k}} \left(a_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right). \quad (3.57)$$

式 (3.41) および (3.43) での位相の符号の選択は、以下の理由によって行われた。消滅演算子 $a_{\vec{k}}$ のハイゼンベルグ表示を $a_{\vec{k}}(t)$ とするとハイゼンベルグの運動方程式から $a_{\vec{k}}(t)$ は以下の方程式を満たす。

$$\frac{da_{\vec{k}}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [a_{\vec{k}}(t), H] = -i\omega_k a_{\vec{k}}(t). \quad (3.58)$$

ここで交換関係式 (3.25) を用いた。方程式 (3.58) の解は以下ようになる。

$$a_{\vec{k}}(t) = a_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t} \quad (3.59)$$

式 (3.43) の位相の符号の選択は、消滅演算子の時間発展 (3.59) を想定して行われたことになる。式 (3.41) の位相の符号の選択は、この結果を意識して波数ベクトルの方向が波の進行方向と一致するように行われていた。同様に生成演算子のハイゼンベルグ表示 $a_{\vec{k}}^\dagger(t)$ は、ハイゼンベルグの運動方程式から

$$\frac{da_{\vec{k}}^\dagger(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [a_{\vec{k}}^\dagger(t), H] = i\omega_k a_{\vec{k}}^\dagger(t). \quad (3.60)$$

を満たし、

$$a_{\vec{k}}^\dagger(t) = a_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t} \quad (3.61)$$

と求まる。

3.1.7 Scalar, vector, tensor decomposition of perturbation

アインシュタイン方程式のソースタームであるエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ の摂動及びメトリックテンソル $g_{\mu\nu}$ の摂動を既約分解する。簡単の為摂動量を波数ベクトルが z 軸方向を向いた平面波とする。Conformal time を用いて固有距離は一般に以下のように書ける。

$$ds^2 = a^2(\tau) \{ -(1+2A)d\tau^2 - 2B_i d\tau dx^i + [(1+2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j \}$$

メトリックテンソルを以下のように置いた事になる。

$$g_{\mu\nu} = a^2(\tau) \begin{pmatrix} -(1+2A) & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ -B_1 & 1+2D+2E_{11} & 2E_{12} & 2E_{13} \\ -B_2 & 2E_{21} & 1+2D+2E_{22} & 2E_{23} \\ -B_3 & 2E_{31} & 2E_{32} & 1+2D+2E_{33} \end{pmatrix}$$

ここで A を lapse function、 $B^i = (B_1, B_2, B_3)$ を shift vector と呼ぶ。摂動量の一次までで $\det(g_{\mu\nu}) = -a^8(\tau)(1+2A+2D \times 3)$ 従って、逆行列 $g^{\mu\nu}$ は摂動量の一次までで次の式で与えられる。

$$g^{\mu\nu} = -\frac{1-2A-6D}{a^2(\tau)} \times$$

$$\begin{pmatrix} 1+6D & B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & -1-2A-4D-2E_{22}-2E_{33} & 2E_{21} & 2E_{31} \\ B_2 & 2E_{12} & -1-2A-4D-2E_{11}-2E_{33} & 2E_{32} \\ B_3 & 2E_{13} & 2E_{23} & -1-2A-4D-2E_{11}-2E_{22} \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2(\tau)} \begin{pmatrix} -(1-2A) & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ -B_1 & 1-2D-2E_{11} & -2E_{21} & -2E_{31} \\ -B_2 & -2E_{12} & 1-2D-2E_{22} & -2E_{32} \\ -B_3 & -2E_{13} & -2E_{23} & 1-2D-2E_{33} \end{pmatrix}$$

波数ベクトルを軸とした座標回転に対する摂動量の変換性により、既約分解できる。無限小回転に対して不変な量をスピンの摂動或はスカラー摂動と呼ぶ。座標を一回転した時、元に戻る回数が一回の摂動をスピンの摂動或はベクトル摂動と呼ぶ。座標を一回転した時、元に戻る回数が二回の摂動をスピンの摂動或はテンソル摂動と呼ぶ。 A, D はスカラー摂動である。Shift vector の内、波数ベクトルと平行成分、即ち縦波成分 $\vec{k} \cdot \vec{B}/k = B_3 = -iB$ はスカラー摂動である。一方、横波成分 $(B_1, B_2, 0)$ はベクター摂動である。 E_{ij} はメトリック摂動の空間成分のトレースレス部である。次の成分はスカラー摂動である。

$$E_{ij}^S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -2E \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

次の成分はベクトル摂動である。

$$E_{ij}^V = \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_1 \\ 0 & 0 & E_2 \\ E_1 & E_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

次の成分はテンソル摂動である。

$$E_{ij}^T = \begin{pmatrix} E^+ & E^\times & 0 \\ E^\times & -E^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

エネルギー運動量テンソルは以下のように定義される。

$$T^{\mu\nu} \equiv (\rho + P)U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu} + \Sigma^{\mu\nu}. \quad (3.65)$$

ゼロ次では $\rho = \rho_0$ 、 $P = P_0$ 、 $\Sigma_{\mu\nu} = 0$ 、 $U^\mu = dx^\mu/d\lambda = (1/a, 0, 0, 0)$ 。非等方ストレス $\Sigma_{\mu\nu}$ は空間成分のみ持ち、これと速度の空間成分は摂動量としてのみ現れる。速度の摂動は以下の式で定義される。

$$v^i = \frac{dx^i}{d\tau}$$

流体の固有時間を λ とすると摂動の一次で次の式を得る。

$$\begin{aligned} d\lambda^2 &= -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -a^2(\tau)d\tau^2\{-(1+2A) - 2B_iv^i + [(1+2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}]v^i v^j\} \\ &\sim a^2(\tau)d\tau^2(1+2A+2B_iv^i - v^2) \end{aligned}$$

よって

$$d\lambda = a(\tau)\sqrt{1+2A+2B_iv^i - v^2}d\tau = a(\tau)\left(1+A+B_iv^i - \frac{1}{2}v^2\right)d\tau$$

Conformal time の刻み巾即ちラップを決定づける量が A なので lapse function と呼ばれる。ここで B_iv^i および v^2 の項を残した理由は、以下の通りである。Newtonian gauge のメトリックと比較することで A は、弱い重量場の重力ポテンシャルに対応することが分かる。速度場の摂動が重力場の摂動によって起因するとすると運動エネルギー v^2 は $|A|$ 程度の大きさを持つことが期待される。したがって、 $v^2 \sim |A|$ であると考えるのが妥当である。以下の議論から明らかになるように $B_i \sim v^i$ である。したがって、 $B_iv^i \sim |A|$ と考えられる。摂動一次で $U^i = dx^i/d\lambda = v^i/a, U^0 = (1-A-B_iv^i + v^2/2)/a$ である。ここで $v_i \equiv v^i$ と定義する。また $U_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu$ より

$$U_i = a(\tau)(-B_i + v_i) \quad (3.66)$$

$$U_0 = -a(\tau)\left(1+A - v^i B_i + \frac{1}{2}v^2\right) \sim -a(\tau). \quad (3.67)$$

この空間成分の式から Shift vector の存在は、時間軸が空間座標と直行していないため、時間軸と一緒に移動する観測者から観測すると shift vector との相対速度が速度として観測されることが分かる。片側の添字を下ろしたエネルギー-運動量テンソルは $T_\nu^\mu = g_{\nu\alpha}T^{\mu\alpha}$ で定義される。従って以下の式を得る。

$$T_\nu^\mu = (\rho_0 + \delta\rho + P_0 + \delta P)U^\mu U_\nu + (P_0 + \delta P)\delta_\nu^\mu + \Sigma_\nu^\mu \quad (3.68)$$

$$T_0^0 = -(\rho_0 + \delta\rho) - (\rho_0 + P_0)(-B_iv^i + v^2) \sim -(\rho_0 + \delta\rho) \quad (3.69)$$

$$T_i^0 = (\rho_0 + P_0)(v_i - B_i) \quad (3.70)$$

$$T_0^i = -(\rho_0 + P_0)v_i \quad (3.71)$$

$$T_j^i = (P_0 + \delta P)\delta_{ij} + \Sigma_j^i \quad (3.72)$$

$\delta\rho, \delta P$ はスカラー摂動である。速度の摂動の内、波数ベクトルと平行成

分、即ち $\vec{k} \cdot \vec{v}/k = -iV$ はスカラー摂動である。一方速度ベクトルの内横波成分、 $\vec{v} = (V_1, V_2, 0)$ はベクトル摂動である。非等方ストレステンソルは、トレースレスである。共変テンソルは $T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} T_{\nu}^{\alpha}$ で定義され各成分は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} T_{00} &= g_{00} T_0^0 = a^2(1+2A)(\rho_0 + \delta\rho) = a^2(\rho_0 + 2A\rho_0 + \delta\rho) \\ T_{0i} &= g_{00} T_i^0 + g_{0j} T_i^j = -a^2(\rho_0 + P_0)(v_i - B_i) - a^2 B_j P_0 \delta_{ij} \\ T_{ij} &= g_{i0} T_j^0 + g_{ik} T_j^k = a^2[(1+2D)\delta_{ik} + 2E_{ik}][(\rho_0 + \delta P)\delta_j^k + \Sigma_j^k] \\ &= a^2(P_0 \delta_{ij} + (2DP_0 + \delta P)\delta_{ij} + 2P_0 E_{ij} + \Sigma_{ij}) \end{aligned}$$

次の成分はスカラー摂動である。

$$\Sigma_{ij}^S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & -2\Sigma \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

次の成分はベクトル摂動である。

$$\Sigma_{ij}^V = \frac{-i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Sigma_1 \\ 0 & 0 & \Sigma_2 \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

次の成分はテンソル摂動である。

$$\Sigma_{ij}^T = \begin{pmatrix} \Sigma^+ & \Sigma^\times & 0 \\ \Sigma^\times & -\Sigma^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

3.1.8 重力場の正準形式

局所慣性系 (\tilde{x} 系) における物質のラグランジアンが L_M であるとする。作用積分は以下のように書ける。

$$I = \int d^4 \tilde{x} L_M. \quad (3.76)$$

局所慣性系から一般座標 x 系へ変換に伴う微小体積要素の変換は

$$d^4\bar{x} = \frac{\partial(\bar{x})}{\partial(x)} d^4x = \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.77)$$

と書ける。これは以下のように証明できる。ミンコフスキーメトリック $\eta_{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}$ は以下の変換公式で結ばれる。

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial\bar{x}^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (3.78)$$

ここでは、右辺が三つの行列のかけ算である事を意識して係数の順番を調整した。座標変換時のテンソルの成分の変換係数を行列 Λ を用いて表す。この行列の成分は以下のように定義される。

$$\Lambda_\mu^{\bar{\alpha}} \equiv \frac{\partial\bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}. \quad (3.79)$$

変換公式 (3.78) は、以下の行列の積の形で表す事ができる。

$$(g_{\mu\nu}) = \Lambda(\eta_{\mu\nu})\Lambda^t. \quad (3.80)$$

ここで Λ^t は Λ の転置行列である。式 (3.80) からメトリックテンソルの行列式 $g = \det g_{\mu\nu}$ が以下のように書ける事が分かる。

$$g = -(\det(\Lambda))^2. \quad (3.81)$$

ここで $\eta_{\mu\nu}$ の行列式が-1 であること、転置行列の行列式が元の行列の行列式と等しいこと、行列の積の行列式は各行列の行列式の積に等しいことを用いた。ここで $\det(\Lambda)$ は、ヤコビアン $\frac{\partial(\bar{x})}{\partial(x)}$ そのものである。式 (3.81) より以下の結果を得る。

$$\frac{\partial(\bar{x})}{\partial(x)} = \det(\Lambda) = \sqrt{-g}. \quad (3.82)$$

式 (3.77) が証明できた。ラグランジアンが一般座標変換に対してスカラーであることを用いると作用 (3.76) は一般座標において以下のように書ける。

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} L_M. \quad (3.83)$$

作用積分 (3.83) が、無限小時間推進・空間座標推進に対して不変であることから物質場のエネルギー・運動量テンソルを導出する。座標 x と座標 \bar{x}

が以下の無限小変換で結ばれるとする。

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu. \quad (3.84)$$

要するにゲージ変換を施して新しい座標系に移ったのである。変換後のメトリックテンソルを $\bar{g}_{\mu\nu}$ とすると微量量に一次で以下の変換則で結ばれる。

$$\begin{aligned} \bar{g}^{\mu\nu}(\bar{x}) &= \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}(x) \sim g^{\mu\nu}(x) + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} g^{\alpha\nu}(x) + \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} g^{\mu\beta}(x) \\ &= g^{\mu\nu}(x) + \xi^\mu{}_{,\alpha} g^{\alpha\nu}(x) + \xi^\nu{}_{,\beta} g^{\mu\beta}(x). \end{aligned} \quad (3.85)$$

ここで上付きのメトリックテンソルは下付きのメトリックテンソルの逆行列である。以上の結果を用いるとメトリックのリー微分が以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \delta^L g^{\mu\nu}(x) &\equiv \bar{g}^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\nu}(x), \\ &= \bar{g}^{\mu\nu}(\bar{x}) - g^{\mu\nu}(x) - (\bar{g}^{\mu\nu}(\bar{x}) - \bar{g}^{\mu\nu}(x)), \\ &\sim \xi^\mu{}_{,\alpha} g^{\alpha\nu}(x) + \xi^\nu{}_{,\beta} g^{\mu\beta}(x) - g^{\mu\nu}{}_{,\gamma}(x) \xi^\gamma. \end{aligned} \quad (3.86)$$

この式は、以下の手続きを経て更に整理できる。

$$\begin{aligned} \xi^\mu{}_{,\alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^\nu{}_{,\beta} g^{\beta\mu} &= (\xi^\mu{}_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \xi^\gamma) g^{\alpha\nu} + (\xi^\nu{}_{,\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\nu \xi^\gamma) g^{\beta\mu} \\ &= \xi^\mu{}_{,\alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^\nu{}_{,\beta} g^{\beta\mu} \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\alpha,\gamma} + g_{\sigma\gamma,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\sigma}) g^{\alpha\nu} \xi^\gamma \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} (g_{\sigma\beta,\gamma} + g_{\sigma\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\sigma}) g^{\beta\mu} \xi^\gamma \\ &= \xi^\mu{}_{,\alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^\nu{}_{,\beta} g^{\beta\mu} \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\alpha,\gamma} + g_{\sigma\gamma,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\sigma}) g^{\alpha\nu} \xi^\gamma \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} (g_{\alpha\sigma,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\sigma} - g_{\sigma\gamma,\alpha}) g^{\sigma\mu} \xi^\gamma \\ &= \xi^\mu{}_{,\alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^\nu{}_{,\beta} g^{\beta\mu} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\alpha} g_{\sigma\alpha,\gamma} \xi^\gamma \\ &= \xi^\mu{}_{,\alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^\nu{}_{,\beta} g^{\beta\mu} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\alpha}{}_{,\gamma} g_{\sigma\alpha} \xi^\gamma \\ &= \xi^\mu{}_{,\alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^\nu{}_{,\beta} g^{\beta\mu} - g^{\nu\mu}{}_{,\gamma} \xi^\gamma \end{aligned} \quad (3.87)$$

三つ目の等号では、最後の項のダミーの添字を σ を α に β を α に置き

換えた。五つ目の等号では $(g^{\nu\alpha}g_{\sigma\alpha})_{,\gamma} = (\delta_{\sigma}^{\nu})_{,\gamma} = 0$ を使って、下付きのメトリックの微分を上付きのメトリックの微分に置き換えた。式 (3.86) と式 (3.87) よりメトリックのリー微分の以下の表式を得る。

$$\delta^L g^{\mu\nu}(x) = \xi^{\mu}_{;\alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^{\nu}_{;\beta} g^{\beta\mu}. \quad (3.88)$$

準備が整ったので作用積分 (3.83) の座標変換 (3.84) に対する変化量 δI を微量の一次までで計算する。

$$\begin{aligned} \delta I &= \int d^4\bar{x} \sqrt{-\bar{g}(\bar{x})} \bar{L}_M(\bar{x}) - \int d^4x \sqrt{-g(x)} L_M(x) \\ &= \int d^4x ((1 + \xi^{\mu}_{;\mu})(\sqrt{-\bar{g}(\bar{x})} \bar{L}_M(\bar{x})) - \sqrt{-g(x)} L_M(x)) \\ &= \int d^4x \xi^{\mu}_{;\mu} \sqrt{-g(x)} L_M(x) \\ &+ \int d^4x [(\sqrt{-\bar{g}(\bar{x})} \bar{L}_M(\bar{x}) - \sqrt{-\bar{g}(\bar{x})} \bar{L}_M(x)) + (\sqrt{-\bar{g}(\bar{x})} \bar{L}_M(x) - \sqrt{-g(x)} L_M(x))] \\ &= \int d^4x [\xi^{\mu}_{;\mu} \sqrt{-g(x)} L_M(x) + (\sqrt{-g(x)} L_M(x))_{;\mu} \xi^{\mu}] \\ &+ \int d^4x \left[\frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}} \delta^L g^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}, \gamma} \delta^L g^{\mu\nu}, \gamma \right] \\ &= \int d^4x \left[\xi^{\gamma} \sqrt{-g} L_M + \frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}, \gamma} \delta^L g^{\mu\nu} \right]_{,\gamma} \\ &+ \int d^4x \left[\frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}, \gamma} \right] \delta^L g^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}, \gamma} \right] \delta^L g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

最後の等号では、一つ上の式の第一項がガウスの定理を用いて表面積分に置き換える事ができる。この領域の境界を表す表面をメトリックの変分を行った領域の、十分遠方にとれば、そこでは $\delta^L g_{\mu\nu}$ 及び ξ^{μ} はゼロであり、表面積分の寄与がゼロとできることを使った。ここで以下で定義される二階のテンソルを導入する。

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}, \gamma} \right]. \quad (3.90)$$

これを用いると作用積分の変分は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
\delta I &= - \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta^L g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = - \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g} (\xi^\mu_{;\alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^\nu_{;\beta} g^{\beta\mu}) T_{\mu\nu} \\
&= - \int d^4x \sqrt{-g} \xi^\mu_{;\alpha} g^{\alpha\nu} T_{\mu\nu} = - \int d^4x \sqrt{-g} [(\xi^\mu T_\mu^\alpha)_{;\alpha} - \xi^\mu T_{\mu;\alpha}^\alpha] \quad (3.91)
\end{aligned}$$

ここで以下の公式を用いる。メトリックテンソルの余因子行列 $\Delta_{\mu\nu}$ を用いて、逆行列 $g^{\mu\nu}$ は以下のように書ける。

$$g^{\mu\nu} = \frac{|\Delta_{\nu\mu}|}{g}. \quad (3.92)$$

これから

$$(\sqrt{-g})_{;\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} g_{\mu\nu;\alpha} \Delta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu;\alpha} g^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \Gamma_{\alpha\mu}^\mu, \quad (3.93)$$

が求まり、これから以下の式変形ができる。

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} U_{;\alpha}^\alpha &= \sqrt{-g} \left(U^\alpha_{;\alpha} + \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\alpha;\gamma} + g_{\sigma\gamma;\alpha} - g_{\gamma\alpha;\sigma}) U^\gamma \right) \\
&= \sqrt{-g} \left(U^\alpha_{;\alpha} + \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\alpha;\gamma} U^\gamma \right) = (\sqrt{-g} U^\alpha)_{;\alpha}. \quad (3.94)
\end{aligned}$$

この公式を用いて式 (3.91) の最後の等号の第一項は、ベクトルの発散の体積積分に還元でき、ガウスの定理を用いて無限遠の表面積分に変形でき、その表面は変分を行った領域の十分外にあるとすればゼロとできる。したがって、作用積分の変分は以下のようにまとめられる。

$$\delta I = \int d^4x \sqrt{-g} \xi^\mu T_{\mu;\alpha}^\alpha. \quad (3.95)$$

系が座標推進および時間推進変換に対して不変であるとき、作用積分の変分量はゼロ $\delta I = 0$ となる。任意の ξ^μ に対して $\delta I = 0$ が成り立つ為には、

$$T_{\mu;\alpha}^\alpha = 0, \quad (3.96)$$

が満たされなければならない。この式は、エネルギー・運動量保存則に他ならない。これをネーターの第2定理とよぶ。したがって、式 (3.90) で定義される $T_{\mu\nu}$ が物質場のエネルギー・運動量テンソルである。

例としてスカラー場を取り上げる。スカラー場のラグランジアンは以下のように書ける。

$$L_M = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - V.$$

また $g^{\mu\nu}$ の余因子行列 $\Delta^{\mu\nu}$ を用いて $g_{\mu\nu}$ を $g^{\mu\nu}$ の逆行列として表すと $\det(g^{\mu\nu}) = 1/g$, $\frac{\partial \det(g^{\mu\nu})}{\partial g^{\mu\nu}} = |\Delta^{\nu\mu}|$, $g_{\mu\nu} = |\Delta^{\nu\mu}|/\det(g^{\mu\nu}) = g|\Delta^{\nu\mu}|$ であること用いると

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}g g_{\mu\nu} = \frac{-1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}, \quad (3.97)$$

であることを用いて式 (3.90) からエネルギー・運動量テンソルを求めると以下のようなになる。

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} + V\right). \quad (3.98)$$

節 3.1.3 でネーターの定理から求めた結果と確かに一致している。

物質場 L_M が作る重力場の作用積分は以下の与えられる。

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left(L_M + \frac{c^4}{16\pi G} R \right). \quad (3.99)$$

ここで R は、スカラー曲率であり、右辺第二項を Einstein-Hilbert action とよぶ。この作用の第一項の変分からエネルギー・運動量テンソルが導出される事は既に示した。第二項の変分を計算する。リッチテンソル・リッチスカラー以下のように表される。

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma}, \\ R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

以下 (3.99) の第二項の変分を計算する。

$$\begin{aligned} \delta^L \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= \int d^4x [\delta^L(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta^L \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \delta^L \Gamma_{\alpha\mu,\nu}^{\alpha} \\ &\quad + \delta^L \Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha} \delta^L \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \delta^L \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \delta^L \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma})] \\ &= \int d^4x [\delta^L(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \\ &\quad - (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\alpha} \delta^L \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\nu} \delta^L \Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} \\ &\quad + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta^L \Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha} \delta^L \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \delta^L \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \delta^L \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma})] \\ &= \int d^4x [\delta^L(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\sqrt{-g}g^{\mu\nu},_{\alpha} + \sqrt{-g}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\gamma}g^{\mu\nu})\delta^L\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \\
& +(\sqrt{-g}g^{\mu\nu},_{\nu} + \sqrt{-g}\Gamma_{\nu\gamma}^{\gamma}g^{\mu\nu})\delta^L\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} \\
& +\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta^L\Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha}\delta^L\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \delta^L\Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\delta^L\Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma})) \\
& =\int d^4x[\delta^L(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} \\
& -\sqrt{-g}(g^{\mu\nu},_{\alpha}\delta^L\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + g^{\mu\nu}\delta^L\Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma} + g^{\mu\nu}\Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\delta^L\Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma}) \\
& +\sqrt{-g}(g^{\mu\nu},_{\nu}\delta^L\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} + g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\gamma}^{\gamma}\delta^L\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} + g^{\mu\nu}\delta^L\Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma})] \\
& =\int d^4x[\delta^L(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} \\
& -\sqrt{-g}(g^{\mu\nu},_{\alpha} + g^{\sigma\nu}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\mu} + g^{\mu\sigma}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\nu})\delta^L\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \\
& +\sqrt{-g}(g^{\mu\nu},_{\nu} + g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\gamma}^{\gamma} + g^{\sigma\nu}\Gamma_{\sigma\nu}^{\mu})\delta^L\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha}] \\
& =\int d^4x[\delta^L(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} - \sqrt{-g}(g^{\mu\nu},_{\alpha}\delta^L\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\nu},_{\nu}\delta^L\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha})] \\
& =\int d^4x\delta^L(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} \\
& =\int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\delta^L g^{\alpha\beta}R + \delta^L g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right). \tag{3.101}
\end{aligned}$$

二つ目の等号では、クリストッフエル記号の変分の偏微分の項の部分積分を行って、領域の表面での変分がゼロであることを用いた。三つ目の等号では式(3.93)を用いた。四つ目の等号は式を整理しただけである。五つ目の等号ではダミーの添字の付け替えを行って整理した。六つ目の等号では、二階の反変テンソルの共変微分の定義式を用いた。七つ目の等号では、メトリックテンソルの共変微分がゼロであることを用いた。最後の変形では、式(3.97)を用いた。式(3.101)と(3.91)を用いると作用積分(3.99)の変分が以下のように計算できる。

$$\delta I = \int d^4x \frac{1}{2}\sqrt{-g} \left[-T_{\mu\nu} + \frac{c^4}{8\pi G} \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu} \right) \right] \delta^L g^{\mu\nu} \tag{3.102}$$

作用積分が任意の変分に対して一次のオーダーでゼロ、即ち停留値を取れ($\delta I = 0$)という条件から以下の微分方程式を得る。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{3.103}$$

これはアインシュタイン方程式に他ならない。

3.1.9 テンソルモードのラグランジアン

平坦の時空を伝搬するテンソルモードのラグランジアンを導出する。簡単の為、伝搬方向は z 軸方向とし、偏光の $+$ モードのみ扱う。メトリックテンソルは以下のように書ける。また計算を楽にするため光速を 1 として扱う。

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.104)$$

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.105)$$

ここで $h_{22} = -h_{11} = -h$ である。以下リッチスカラーを微小の二次までの精度で計算する。クリストッフエル記号の内、ゼロでない成分は以下のものである。

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= -\frac{1}{2}g^{00}g_{11,0}, & \Gamma_{22}^0 &= -\frac{1}{2}g^{00}g_{22,0}, & \Gamma_{10}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}g_{11,0}, \\ &= \frac{1}{2}h_{11,0} & &= \frac{1}{2}h_{22,0} & &= \frac{1}{2}g^{11}h_{11,0} \\ \Gamma_{13}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}g_{11,3}, & \Gamma_{20}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}g_{22,0}, & \Gamma_{23}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}g_{22,3}, \\ &= \frac{1}{2}g^{11}h_{11,3} & &= \frac{1}{2}g^{22}h_{22,0} & &= \frac{1}{2}g^{22}h_{22,3} \\ \Gamma_{11}^3 &= -\frac{1}{2}g^{33}g_{11,3}, & \Gamma_{22}^3 &= -\frac{1}{2}g^{33}g_{22,3}, \\ &= -\frac{1}{2}h_{11,3} & &= -\frac{1}{2}h_{22,3} \end{aligned} \quad (3.106)$$

リッチスカラーを計算する式はクリストッフエル記号を用いて以下のように書ける。

$$R = g^{\beta\nu}(\Gamma_{\nu\beta,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha\beta,\nu}^\alpha + \Gamma_{\rho\alpha}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\rho - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\rho). \quad (3.107)$$

まずこの式の第一、二項のクリストッフエルの微分が現れる項を計算する。

$$\begin{aligned}
12 &= \eta^{00}(\Gamma_{00,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha 0,0}^\alpha) + g^{11}(\Gamma_{11,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha 1,1}^\alpha) + g^{22}(\Gamma_{22,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha 2,2}^\alpha) + \eta^{33}(\Gamma_{33,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha 3,3}^\alpha) \\
&= \frac{1}{2} [-(-g^{11}h_{11,0} - g^{22}h_{22,0})_{,0} + g^{11}(h_{11,00} - h_{11,33}) \\
&\quad + g^{22}(h_{22,00} - h_{22,33}) - (g^{11}h_{11,3} + g^{22}h_{22,3})_{,3}] \\
&= g^{11}h_{11,00} + g^{22}h_{22,00} - g^{11}h_{11,33} - g^{22}h_{22,33} \\
&\quad + \frac{1}{2} [-(h_{11,0})^2 - (h_{22,0})^2 + (h_{11,3})^2 + (h_{22,3})^2] \\
&= (g^{11}h_{11,0} + g^{22}h_{22,0})_{,0} - (g^{11}h_{11,3} + g^{22}h_{22,3})_{,3} \\
&\quad + \frac{1}{2} [(h_{11,0})^2 + (h_{22,0})^2 - (h_{11,3})^2 - (h_{22,3})^2]. \tag{3.108}
\end{aligned}$$

この項の4次元体積積分を行う。ヤコビアンは $\sqrt{-g} \sim 1 - h_{11}^2/2$ であり、1からのズレは作用積分に3次以上の高次の寄与しか与えない。したがって、ヤコビアンは1として扱う。項12の最後から二行目の式の体積積分は以下のようにガウスの定理を用いて時間及び空間の境界での重力波の領域への出入りの差に還元でき、重力波が減衰せずに伝搬しているとすれば、差し引きゼロとなる。

$$\begin{aligned}
&\int d^4x [(g^{11}h_{11,0} + g^{22}h_{22,0})_{,0} - (g^{11}h_{11,3} + g^{22}h_{22,3})_{,3}] \\
&= \int d^3x [(g^{11}h_{11,0} + g^{22}h_{22,0})]_{t=-\infty}^{t=\infty} - \int d^3x [(g^{11}h_{11,3} + g^{22}h_{22,3})]_{z=-\infty}^{z=\infty} \\
&= 0. \tag{3.109}
\end{aligned}$$

したがって、この項は作用積分への寄与を与えない。

次にリッチスカラー (3.107) の第3、4項目を計算する。ここでクリストッフェル記号は一次の微少量であるメトリックの一階微分を含み、これらの項はクリストッフェル記号が二つ掛かっているため、メトリックの微分以外に生に現れるメトリックは0次の量として扱って良い。

$$\begin{aligned}
34 &= \eta^{00}(\Gamma_{\rho\alpha}^\alpha \Gamma_{00}^\rho - \Gamma_{\rho 0}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\rho) + g^{11}(\Gamma_{\rho\alpha}^\alpha \Gamma_{11}^\rho - \Gamma_{\rho 1}^\alpha \Gamma_{\alpha 1}^\rho) \\
&\quad + g^{22}(\Gamma_{\rho\alpha}^\alpha \Gamma_{22}^\rho - \Gamma_{\rho 2}^\alpha \Gamma_{\alpha 2}^\rho) + \eta^{33}(\Gamma_{\rho\alpha}^\alpha \Gamma_{33}^\rho - \Gamma_{\rho 3}^\alpha \Gamma_{\alpha 3}^\rho) \\
&= - \left(- \left(\frac{1}{2} h_{11,0} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} h_{22,0} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} h_{11,0} \frac{1}{2} (h_{11,0} + h_{22,0}) \\
&\quad - \frac{1}{2} h_{11,3} \frac{1}{2} (h_{11,3} + h_{22,3}) - 2 \times \frac{1}{2} h_{11,0} \frac{1}{2} h_{11,0} + 2 \times \frac{1}{2} h_{11,3} \frac{1}{2} h_{11,3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} h_{22,0} \frac{1}{2} (h_{11,0} + h_{22,0}) - \frac{1}{2} h_{22,3} \frac{1}{2} (h_{11,3} + h_{22,3}) - 2 \times \frac{1}{2} h_{22,0} \frac{1}{2} h_{22,0} \\
& + 2 \times \frac{1}{2} h_{22,3} \frac{1}{2} h_{22,3} - \left(\frac{1}{2} h_{11,3} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} h_{22,3} \right)^2 \\
& = \frac{1}{2} [h_{11,0} h_{22,0} - h_{11,3}^2 h_{22,3}] \\
& = \frac{1}{2} [-(h_{11,0})^2 + (h_{11,3})^2]. \\
& = -\frac{1}{4} [(h_{11,0})^2 + (h_{22,0})^2 - (h_{11,3})^2 - (h_{22,3})^2]. \tag{3.110}
\end{aligned}$$

最後の変形では $h_{22} = -h_{11}$ を用いた。

以上から作用積分に寄与を与えるリッチスカラーは以下ようになる。

$$R = \frac{1}{4} [(h_{11,0})^2 + (h_{22,0})^2 - (h_{11,3})^2 - (h_{22,3})^2]. \tag{3.111}$$

ここで以下のように定義されるテンソルプラスモードの振幅 Δ_+ を導入する。

$$\Delta_+ \equiv \sqrt{h_{11}^2 + h_{22}^2} = \sqrt{2}h. \tag{3.112}$$

これを用いて、平坦な時空に重力波のプラスモードのみが存在する場合のアインシュタイン・ヒルベルト作用 (3.99) は以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
I & = - \int d^4x \frac{c^4}{16\pi G} \frac{1}{4} (-(\Delta_{+,0})^2 + (\Delta_{+,3})^2) \\
& = - \int d^4x \frac{\tilde{M}_{pl}^2}{4} \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Delta_+ \partial_\nu \Delta_+. \tag{3.113}
\end{aligned}$$

最後の変形では、共変な形即ちスカラー量であることが一目で分かる形に整理した。以上からテンソルモードのラグランジアン密度は以下のように与えられる事が分かる。

$$L_{GW} = -\frac{\tilde{M}_{pl}^2}{4} \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Delta_+ \partial_\nu \Delta_+. \tag{3.114}$$

オイラーラグランジ方程式から以下の発展方程式を得る。

$$\square \Delta_+ = 0. \tag{3.115}$$

正準共役な運動量 Π_Δ は、以下のように定義される。

$$\Pi_{\Delta} = \frac{\partial L_{GW}}{\partial \dot{\Delta}} = \frac{\tilde{M}_{pl}}{4} \dot{\Delta}. \quad (3.116)$$

したがって、ハミルトニアン密度すなわち重力波のエネルギー密度は以下のように与えられる。

$$H_{GW} = \Pi_{\Delta} \dot{\Delta} - L = \frac{\tilde{M}_{pl}}{4} \left(\frac{1}{2} \dot{\Delta}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Delta)^2 \right). \quad (3.117)$$

3.1.10 重力波の量子化

重力波は幾何学的スピン 2 のテンソル波なので、量子化を行うとスピン $\pm 2\hbar$ のボーズ粒子である重力子の集まりとして表現される。重力波のラグランジアンをスカラー場のラグランジアン (3.5) と比較すると、 $V = 0$ 即ち自由なスカラー場のラグランジアンに対応している。テンソルモードの強度に

$$\tilde{\Delta}_+ \equiv \frac{\tilde{M}_{pl}}{2} \Delta_+, \quad (3.118)$$

の変数変換を施してラグランジアンを書き換えると以下のようになり

$$L_{GW} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \tilde{\Delta}_+ \partial_{\nu} \tilde{\Delta}_+. \quad (3.119)$$

自由なスカラー場のラグランジアンと一致する。自由なスカラー場の量子化の手順にしたがって、重力波の量子化を行うと、 $\tilde{\Delta}_+$ は式 (3.57) と全く同じ式で生成消滅演算子を用いて表される。したがって、重力波の強度 Δ_+ は、重力子の生成消滅演算子を用いて以下のように書ける。

$$\Delta_+ = \frac{2}{\tilde{M}_{pl}} \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2k}} (a_{\vec{k}} e^{-i\omega t} + a_{-\vec{k}}^{\dagger} e^{i\omega t}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (3.120)$$

$$\omega = k.$$

3.2 プランク時間・プランクエネルギー・プランク質量

宇宙膨張を記述する Friedmann 方程式は以下のように書ける。

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

ここで $H = \dot{a}/a$ はハッブル定数、 a はスケールファクター、 ρ は宇宙の平均密度である。宇宙の地平線サイズの指標は Hubble length $\ell_H = c/H$ で与えられる。地平線は情報交換可能な領域のサイズであるから、Hubble length はその時の宇宙のサイズとみなすこともできる。Hubble length 内の物質の総質量は Friedmann 方程式を用いて以下のように書ける。

$$M_H = \frac{4\pi}{3} \ell_H^3 \rho = \frac{c^2}{2G} \ell_H$$

従って、Hubble length は、Hubble length 内の物質によって決まる Schwarzschild 半径、

$$\frac{2GM_H}{c^2}$$

と等しい。ある半径の領域内の全物質が形成する Schwarzschild 半径は、半径の3乗に比例して増加する。したがって、Hubble length を境に大きなスケールでは Schwarzschild 半径が領域の半径より大きくなる物理的意味を持つようになる。一方、小さなスケールでは Schwarzschild 半径が領域の半径より小さく物理的意味を持たない。Schwarzschild 半径が天体の半径より大きい場合、天体の重力場は一般相対論を用いて記述しなければならない。従って、Hubble length 以上のサイズをもった構造の進化を記述するには一般相対論を用いる必要がある。つまり Hubble length は一般相対論的效果が必要となるかどうかの目安を与えるスケールと考えることもできる。

宇宙の全静止質量エネルギーは $M_H c^2$ である。宇宙の質量が意味を持つためには、宇宙のエネルギーの不確定さが高々宇宙の全質量エネルギー程度、即ち $\Delta E < M_H c^2$ でなければならない。ハイゼンベルグの不確定性原理から宇宙の時間の不確定さ Δt は以下の式で与えられる。

$$\Delta t \geq \frac{\hbar}{2 M_H c^2}$$

宇宙年齢の指標は Hubble length まで光速で宇宙が広がるまでに掛る時間 $t_{\text{age}} \sim \ell/c = 1/H$ で与えられる。この時間尺度を Hubble time と呼ぶ。宇宙

年齢が意味を持つためには、量子力学的な宇宙の時間の不確定さが宇宙年齢以下でなければならない。このためには宇宙の全質量が以下の条件を満たさなければならない。

$$\frac{1}{H} = H^2 \left(\frac{c}{H} \right)^3 \frac{1}{c^3} = \frac{2GM_H}{c^3} \geq \frac{\hbar}{2M_H c^2}$$

$$M_H \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

そこで以下の式で定義される Planck mass を導入する。

$$M_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.1767 \times 10^{-5} \text{g} = 1.22 \times 10^{19} \frac{1}{c^2} \text{GeV} \quad (3.121)$$

従って、量子力学的な時間の不確定さが宇宙年齢以下であるためには、宇宙の全質量が Planck 質量より大きい必要がある。この条件を宇宙の平均密度を用いて書き換えると以下のようなになる。

$$\rho c^2 < \frac{3}{32\pi(\hbar c)^3} \left(\sqrt{\frac{\hbar c}{G}} c^2 \right)^4 = \frac{3}{32\pi(\hbar c)^3} (M_{pl} c^2)^4 \quad (3.122)$$

この式の右辺を以下の黒体輻射のエネルギー密度と比較する。

$$\frac{\pi^2}{15(\hbar c)^3} (k_B T)^4$$

上記の条件は、宇宙の温度がプランクエネルギー以下即ち $k_B T < M_{pl} c^2$ であると書きかえることができる。逆に宇宙の温度がプランクエネルギー以上になると宇宙年齢が量子力学的な時間の不確定さ以下になる。即ち古典的な理論で進化をたどれる限界が宇宙の温度がプランクエネルギーになるまでである。Planck time :

$$t_{pl} = 5.39 \times 10^{-44} \text{sec} \quad (3.123)$$

Reduced Planck mass

$$\tilde{M}_{pl} \equiv \frac{M_{pl}}{\sqrt{8\pi}} = 2.435 \times 10^{18} \frac{1}{c^2} \text{GeV} \quad (3.124)$$

3.3 平坦性問題・地平線問題

平坦性問題について説明する。曲率は密度が $\rho_K = -\frac{3Kc^2}{8\pi G a_0^2} (1+z)^2$ で宇宙膨張とともに進化する物質と解釈することもできる。従ってある z の時の曲率の密度パラメータは以下のように書ける。

$$\Omega_K = \frac{\rho_K}{\rho_{cr}} = -\frac{Kc^2}{\dot{a}^2} = \frac{\dot{a}_0^2}{\dot{a}^2} \Omega_{K0} \quad (3.125)$$

輻射や物質のみから構成される宇宙では、これらの重力が引力であるため宇宙膨張は必ず減速膨張となる。従って過去に遡るほど \dot{a} が大きな値を持つ。式 (3.125) から、過去に遡るほど Ω_K が小さくなることが分かる。宇宙がプランクタイムから現在までずっと輻射優勢であったとすると $a = (t/t_0)^{0.5}$ であるので $\dot{a}_0^2/\dot{a}^2 = t/t_0 = (a/a_0)^2$ となる。また輻射の温度はプランクタイムから現在まで $Ta = T_0 a_0$ の関係で進化したとしてオーダーで間違わないのでこれを使うと

$$\Omega_K(t_{pl}) \sim \left(\frac{k_B T_0}{M_{pl} c^2} \right)^2 \Omega_{K0} \sim 4 \times 10^{-64} \Omega_{K0} \quad (3.126)$$

となり、観測から $0 < |\Omega_{K0}| < O(1)$ であることを考慮するとプランクタイムにおいて宇宙の曲率を 62 桁以上の精度で 0 に近い値にファインチューニングされてなければ、宇宙は現在の姿でいられなかったことになる。即ちプランクタイムの頃とくらべて現在までに何桁も宇宙の半径が大きくなったにも関わらず未だ観測的に宇宙が平坦であるように見えるためにはプランクタイム時に非常に高い精度で曲率が 0 に近い値になっていなければならないという問題である。表現を変えると $\Omega_K = 0$ の宇宙は、宇宙内の物質の重力で膨張が引き留められ何時か収縮に転じる場合と物質の重力が十分で無く永遠に膨張し続ける場合の境目の状態にあることになる。即ち、プランクタイムから十分時間がたったにも関わらずいまだ宇宙が永遠に膨張し続けるか何時か収縮に転じるのか判別不能であることは、プランクタイム時の膨張速度のファインチューニングを要求するという問題である。地

球以外の天体が存在しない宇宙空間での地上からのロケットの打ち上げに例えると、ロケットが地球から非常に遠くまで到達したにも関わらずそこで測定したロケットの速度からロケットが脱出速度を超えているかいないのか判別が出来ないような測定結果になるためには打ち上げ時にロケットの速度を非常に高い精度で脱出速度に一致させて打ち上げなければならない、という問題である。

次に地平線問題について説明する。スタンダードビッグバンモデルでは宇宙は減速膨張していると考えられているので過去に行くほど粒子的地平線が小さくなる。一方観測的には、例えば宇宙の全ての方向から CMB の 2.73K の黒体放射であることなど地平線を越えたスケールで宇宙初期に情報が伝搬していないと説明できない事実が多数存在する。CMB は宇宙年齢が 38 万年の宇宙の晴れ上がり時に放射されたものである。このころの粒子的地平線は我々から見込む角度にして高々 2 度である。したがって、2 度以上に離れた空からの CMB が同じ温度であるためには宇宙の晴れ上がり時に粒子的地平線を越えたスケールで既に情報交換がされていなければならない。これが地平線問題である。

これらの問題は、宇宙初期に加速度膨張する時期が存在すれば解決する。時刻 t_i から加速度膨張の時期が始り十分長い時間が加速度膨張が継続したとすると、粒子的地平線は $\ell_p \sim ct_i^{1-n}/(n-1)$ となり $t_i = 0$ の極限で発散する。即ち過去に全ての宇宙空間と情報交換できたこととなり地平線問題が解決する。また式 (3.125) から加速膨張の時は、過去ほど \dot{a} が小さいことになるので過去ほど Ω_K がでかくなり初期のファインチューニングの必要がなくなり平坦性問題が解ける。地平線問題がどうやって加速度膨張する宇宙で解決するのかは、節 1.1 の図 1.5 に分かり易く解説してある。

3.4 インフレーション

宇宙開闢間も無い初期にインフラトンと呼ばれるスカラー場 ϕ の真空のエネルギーが宇宙のエネルギー密度が優勢の時代があったとする。スカラー場の真空のエネルギー密度を $V(\phi)$ とする。第零近似でスカラー場のエ

エネルギー密度は $V(\phi)$ で時間的に一定であると考え、宇宙の体積変化によらずエネルギー密度が不変というのが真空のエネルギーの特徴である。するとフリードマン方程式は以下ようになる。

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{V(\phi)}{c^2}. \quad (3.127)$$

解はド・ジッターモデルと同じ $a \propto e^{Ht}$ となる。この指数関数的膨張期がインフレーション期である。図 3.1 にインフラトンの真空のエネルギーの模

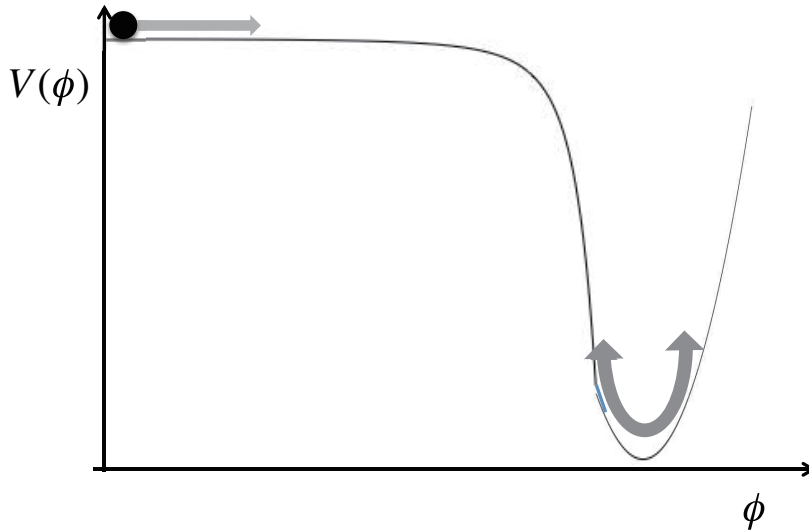


図 3.1 インフラトンポテンシャル（真空のエネルギー）とインフレーション中のインフラトン場の進化。

式図をインフラトン場の真空期待値 ϕ の関数として描いた。インフラトンポテンシャルは ϕ の単調減少関数だが 0 付近では、傾斜がなだらかでユックリ図の右方向に移動していく。この間は、 $V(\phi)$ の値はほぼ一定と見なして良く、 ϕ がこのポテンシャルの平坦な部分にいる間に指数関数的膨張即ちインフレーションが起きる。移動を続けると最後ポテンシャルの谷底に落ち単振動を始める。単振動時は、運動エネルギーの平均とポテンシャルエネルギーの平均が等しい。スカラー場の圧力は、運動エネルギーからポテ

ンシャルエネルギーを引いたものであるから単振動時スカラー場の圧力はゼロとなる。したがって、スカラー場がポテンシャルの谷底に落ちると減速膨張に転じる。この振動をしている間に真空のエネルギーから様々な粒子が生成され火の玉宇宙が実現される。この期間を宇宙の再加熱期と呼ぶ。この後の宇宙はスタンダードビッグバンモデルにしたがって進化する。研究者によって意見が異なる部分ではあるがこの教科書では、宇宙の再加熱終了時はホットビッグバンの始まりと呼ぶ事にする。即ちインフレーション期はビッグバン以前の宇宙ということになる。

インフラトン場のポテンシャルが ϕ^4 に比例するような形をしているとし、プランク時間の時の量子揺らぎで宇宙の各部分が様々な ϕ を値を取っているとするモデルをカオティックインフレーションモデルと呼ぶ。たまたま初期に大きな値を ϕ が持ったのが現在私達が暮らす宇宙であり、それ以外にも色々な宇宙が存在することを仮定する。このモデルでは、インフラトンはゼロに向かってポテンシャルを転げ落ちて進化する。

3.5 Slow roll inflation

プランクタイム頃にスカラー場 ϕ が存在しそのエネルギーにより加速度膨張が引き起こされインフレーションが起きたとする。このスカラー場をインフラトンと呼ぶ。スカラー場は空間的に一様とするとスカラー場のエネルギー密度は $\rho c^2 = \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 + V$ と書ける。スカラー場のエネルギー密度が優勢であるとするフリードマン方程式は以下のように書ける。

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2c^4} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{c^2} V \right] = \frac{\hbar c}{3\tilde{M}_{pl}^2} \left[\frac{1}{2c^4} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{c^2} V \right] \quad (3.128)$$

ここで $\tilde{M}_{pl} \equiv \sqrt{\hbar c / 8\pi G}$ は reduced Planck mass であり、曲率の効果は無視できるとした。この時、スカラー場の運動方程式以下のように書ける。スカラー場のエネルギー密度の内第1項が第2項より十分小さいとして扱える時、スカラー場の状態方程式を $P = w\rho c^2$ と書いた時の $-1 < w < -1/3$ であり加速度膨張が実現される。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (3.129)$$

Slow roll 近似とは、エネルギー密度の中の $\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2$ の項がポテンシャルに対して十分小さく、さらにスカラー場の運動方程式中の第1項 $\ddot{\phi}$ が他の項に比べて十分小さいとする近似である。以下のように二つの slow roll parameters を定義し、slow roll 近似が成立するための条件を議論する。

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{2}\tilde{M}_{pl}^2 \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \quad (3.130)$$

$$\eta \equiv \tilde{M}_{pl}^2 \frac{V''}{V} \quad (3.131)$$

ここで V', V'' はそれぞれ ϕ による一回微分及び2回微分である。Slow roll 近似の元ではフリードマン方程式、スカラー場の方程式は以下のように近似できる。

$$H^2 \sim \frac{1}{3\tilde{M}_{pl}^2} V \quad (3.132)$$

$$3H\dot{\phi} \sim -V' \quad (3.133)$$

スカラー場のエネルギー密度の第1項と第二項の比を計算する。

$$\frac{\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2}{V} \sim \frac{1}{2} \frac{1}{V} \frac{V'^2}{9H^2} \sim \frac{1}{3} \frac{1}{2} \tilde{M}_{pl}^2 \left(\frac{V'}{V}\right)^2 = \frac{1}{3}\varepsilon \quad (3.134)$$

したがって、 ε が十分1より小さければスカラー場のエネルギー密度の第1項が第2項に比べて十分小さいとして扱える。式(3.132)を時間で微分すると以下の式を得る。

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3\tilde{M}_{pl}^2} V' \dot{\phi}$$

両辺に H を掛けて2で割ると以下の式を得る。

$$H^2 \dot{H} = \frac{1}{6\tilde{M}_{pl}^2} V' H \dot{\phi} \sim -\frac{1}{18\tilde{M}_{pl}^2} V'^2$$

最後の等号では式(3.133)を用いた。この式の両辺を H^4 で割ると以下の式を得る。

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = \varepsilon \quad (3.135)$$

式 (3.133) の両辺を時間で微分すると以下の式を得る。

$$3H\ddot{\phi} + 3\dot{H}\dot{\phi} = -V''\dot{\phi}$$

これからスカラー場の方程式 (3.129) の第 1 項と第 2 項の比が以下のように計算できる。

$$\frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} \sim -\frac{V''}{9H^2} + \frac{1}{3}\varepsilon = -\frac{1}{3}\tilde{M}_{pl}^2 \frac{V''}{V} + \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{1}{3}(-\eta + \varepsilon) \quad (3.136)$$

したがって、 ε, η が共に十分 1 より小さければスカラー場の方程式の第 1 項を他の項と比べて十分小さいとして扱える。

3.6 インフレーションによる膨張率

インフレーション期間中に宇宙の半径が最低何倍拡大されなければいけないか求める。以下の式で e-folding を定義する。

$$N(t) = \ln \frac{a(t_{end})}{a(t)} = \int_{a(t)}^{a(t_{end})} \frac{da}{a} \quad (3.137)$$

これはインフレーション中のある時刻 t からインフレーションが終了する時刻 t_{end} までの間のスケールファクターの膨張率を指数で表現したものである。式 (3.127),(3.133) を用いて式 (3.137) の右辺を評価する。

$$N(t) = \int_t^{t_{end}} \frac{\dot{a}}{a} dt = \int_{\phi(t)}^{\phi(t_{end})} \frac{H^2}{H\dot{\phi}} d\phi = - \int_{\phi(t)}^{\phi(t_{end})} \frac{V}{V'} \frac{d\phi}{\tilde{M}_{pl}^2} \quad (3.138)$$

ここでインフレーションの終了時刻を

$$\varepsilon(\phi(t_{end})) = 1 \quad (3.139)$$

で定義する。

ここまでの議論でスローロールパラメータが 1 程度になる時期をインフレーションの終了時期とした。インフレーションの終了時期について少し議論する。スローロールパラメータが 1 程度になるとスカラー場のエネルギー

ギー密度及び圧力の内第一項が無視できなくなり、圧力はほぼゼロになる。従って、宇宙は減速膨張となる。つまりインフラトン場のエネルギーが支配的であってもこの時期は加速膨張をしていないためインフレーションが終了したと考えるのである。インフレーション終了後、スカラー場のエネルギーが全て物質・輻射に変換されると考えている。スカラー場のエネルギーが全て物質や輻射に転換されると宇宙は非常に高温になるためこの時期を宇宙の再加熱 (reheating) 期と呼ぶ。

以下の式で事象の地平線 (event horizon) を定義する。

$$\ell_H = a(t) \int_t^{\infty} \frac{cdt}{a} \quad (3.140)$$

事象の地平線とはこれから無限の時間を掛けて情報交換を行うことが可能な距離のことである。スケールファクターの時間依存性を $a \propto t^n$ とすると加速膨張の時は $n > 1$ であるから $\ell_H = 1/(n-1)ct$ となり有限の値をとる。即ち加速膨張する宇宙では情報交換可能な範囲が限られることになる。比較のため減速膨張の場合の事象の地平線を求めると $n < 1$ であるため無限大となり、無限の時間をかければ無限の範囲と情報交換が可能であるという常識的な結果となる。加速膨張の時の時を事象の地平線はハッブル半径 $c/H = ct/n$ を使って

$$\ell_H = \frac{n}{n-1} \frac{c}{H} \sim \frac{c}{H}$$

と書ける。即ち事象の地平線はハッブル半径程度である。また、事象の地平線を共動座標で書くと

$$r_H \equiv \frac{\ell_H}{a} \propto t^{1-n}$$

となり加速膨張の宇宙では時間と共に減少する。即ち加速膨張の宇宙では、観測できる領域言い換えると情報交換ができる領域が時間とともに狭くなることを示している。ある領域が共動座標上で静止しているとするとこの領域の共動座標上の半径は一定値をとることとなる。従って、ある時刻では地平線内にあった領域もいつかは地平線の外にでることになる。

以下では、インフレーション中の時刻 t_λ の時に丁度地平線より長くなる

スケール λ (共同スケール) を考える。したがって

$$a(t_\lambda)\lambda = \frac{c}{H(t_\lambda)}$$

である。ここで λ として現在の宇宙のハッブル半径を取ると

$$\lambda = \frac{1}{a_0} \frac{c}{H_0}$$

である。ここで a_0 は現在のスケールファクターでありこの教科書では 1 としているが便宜のためあらわに残した。これらの式から以下の式を得る。

$$\frac{a(t_\lambda)H(t_\lambda)}{a_0H_0} = 1$$

インフレーション終了と同時に宇宙再加熱が終了したとすると、この式の左辺はインフレーションが終了した時のスケールファクターを使って以下のように書ける。

$$\frac{a(t_\lambda)H(t_\lambda)}{a_0H_0} = \frac{a(t_\lambda)}{a(t_{end})} \frac{a(t_{end})H(t_\lambda)}{a_0H_0}$$

第ゼロ近似で再加熱後現在までの間輻射のエンタロピーが保存しているとしてよいので $a(t_{end})T_{end} = a_0T_0$ である。ここで $k_B T_0 \sim 2.73/(1.16 \times 10^4)\text{eV}$, $k_B T_{end} \sim 10^{16}\text{GeV}$ である。インフレーション中はスローロール近似が非常に良い精度で成り立っているとすると

$$H(t_\lambda)^2 = \frac{8\pi}{3} G \frac{V}{c^2} \sim \frac{8\pi}{3} G \frac{aT_{end}^4}{c^2}$$

である。一方現在のハッブル定数は以下のように書ける。

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3} G \frac{aT_0^4}{\Omega_\gamma c^2}$$

ここで $\Omega_\gamma = 5.4 \times 10^{-5} h_{0.73}^{-2}$, $a = 8\pi^5 k_B^4 / 15c^3 h^3$ であり、現在の宇宙は平坦であるとした。また輻射のエネルギー密度が $\rho a^4 = \text{一定}$ であることを使った。以上から e-folding 数が次のようにもとまる。

$$N(t_\lambda/a(t_\lambda)=c/H_0) = 61 \quad (3.141)$$

即ち、現在の宇宙のハッブル半径がインフレーション時にハッブル半径

を超えてからインフレーションが終了するまでにスケールファクターは Exponential の 61 乗倍膨張したことになる。

図 3.2 にプランク時間 t_{pl} から現在 t_0 に至るまでの地平線と様々な構造のスケールの進化を示した。縦軸が各宇宙年齢におけるある構造の物理的な固有長さを示している。例えば、 l_0 は現在の宇宙の粒子的地平線であり、 t_0 の時 l_0 となる実線は、

$$l_0(t) = a(t)l_0,$$

を表しており、現在の宇宙の果てまでの距離のプランク時間から現在に至までの進化を表している。プランク時間からインフレーション期が始まる時刻 t_i までの間は、減速膨張か或は全くの真空中で加速も減速もせず膨張していたと考えられる。この期間の、粒子的地平線は宇宙年齢にほぼ比例する形で増加する。その様子を破線でしめした。 $t = t_i$ にインフレーション期突入後インフレーション終了時 t_e までの期間は、事象の地平線が出現しその値は c/H でほぼ一定である。その様子を一点鎖線で示した。インフレーション終了後現在までは、殆どの期間減速膨張なので（現在の宇宙は加速度膨張しているが、ここでの議論の本質には無関係なので常に減速膨張とした）宇宙年齢に比例する形で粒子的地平線が伸びる。その様子を破線で示している。図から明らかなように、 $l_0(t)$ はインフレーション期に一旦事象の地平線より大きくなる。別の言い方をすると現在の宇宙のサイズが、インフレーション期に事象の地平線の外にでる。これを地平線脱出 horizon exit と呼ぶ。インフレーション終了後は、粒子的地平線の増加率の方が $l_0(t)$ の増加率より大きく、 t_0 の時ついに $l_0(t)$ が粒子的地平線以下になる。これを地平線再突入 horizon reentry と呼ぶ。現在の宇宙で観測される全ての天体のサイズは、当然 l_0 より小さい。全ての宇宙の構造物は t_0 以降に horizon exit し、 t_0 より以前に horizon reentry する。例として、銀河のサイズに対応するスケールの時間進化を t_0 の時 l_{gal} となる実線で示した。ここで l_{gal} は現在の宇宙の平均物質密度 ρ_{gal} と銀河の質量 M_{gal} を用いて

$$M_{gal} = \frac{4\pi}{3} l_{gal}^3 \rho_{M0},$$

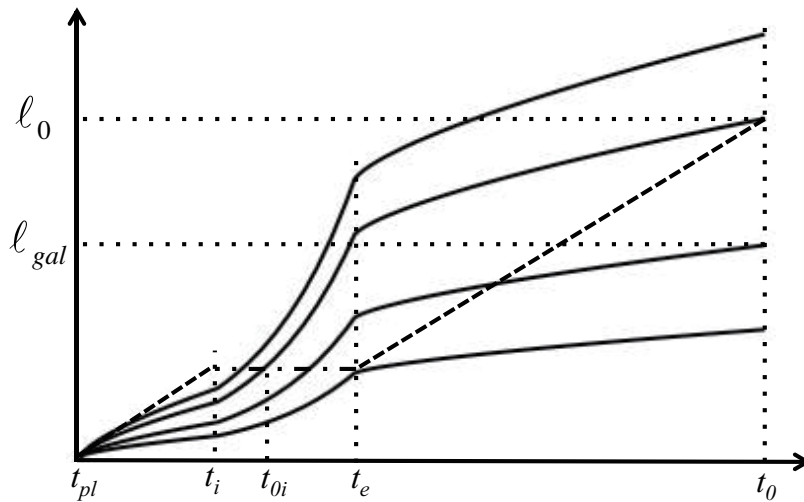


図 3.2 地平線脱出と地平線再突入。

のように定義され、実際に観測されている銀河のサイズ $\sim 10\text{kpc}$ とは異なる。銀河の材料となった物質が分布している領域のサイズである。小さいスケールほどより後に horizon exit し、より早く horizon reentry する。式 (3.141) で示したインフレーション期間中の宇宙の膨張率は、 t_{i0} から t_e までの期間の宇宙の膨張率である。現在観測されている宇宙は、ハッブルサイズ程度でならしてみると一様等方であり、それを実現するために一度は全ての領域が情報交換できる領域内に存在していた時期があることが必要である。その為にインフレーション開始時に現在の宇宙のサイズがその時の地平線より小さい必要がある。丁度地平線サイズと等しいとして導いた膨張率が式 (3.141) で示した膨張率である。言い換えるとインフレーション期の膨張率が式 (3.141) 以上であれば、地平線問題が解決される。インフレーション開始時に丁度現在の宇宙サイズがその時の地平線サイズと等しかったとするのは不自然であり、 $l_0(t)$ の horizon exit 以前にインフレーションが始まっていたと考えるのが自然である。そのような場合、現在観測出来る宇宙の果てより外にも我々の宇宙と同じ進化を続ける領域が存在することになる。一方でインフレーション期の経過時間は有限と考えられるので、

我々の宇宙と同じ姿をした宇宙のサイズも有限である。つまり我々の宇宙には果てがあることになる。インフレーションの経過時間を観測的に測定することが出来れば宇宙の果てまでの距離を知る事ができる。

式 (3.125) をインフレーション開始時と終了時に適応し、式 (3.141) を用いるとインフレーション終了時の宇宙の曲率の密度パラメータ Ω_{Ke} が以下のように求まる。

$$\Omega_{Ke} = e^{2H(t_i - t_e)} \Omega_{Ki} < 10^{-53} \Omega_{Ki}. \quad (3.142)$$

ここで Ω_{Ki} はインフレーション開始時の曲率の密度パラメータでありオーダー1程度の値を持つと考えられるので、インフレーションは非常に高い精度で曲率がゼロ即ち宇宙が平坦であることを予言する。

3.7 インフレーション期の揺らぎの生成

インフレーション期間中に宇宙の半径は e^{61} 倍以上に広がる。結果としてインフレーション終了時は、宇宙はシワ一つないのっぺりしたほぼ一様な密度分布になっていることが期待される。そのままでは、現在の宇宙の物質分布の非一様性が説明出来ない。インフレーション期のインフラトン場の真空の量子ゆらぎによる粒子・反粒子つい生成つい消滅の過程を考える。つい生成されたインフラトン場のエネルギーの揺らぎを $\Delta\phi$ とすると対消滅するまでの寿命 Δt は不確定性関係から以下のように評価できる。

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta\phi}. \quad (3.143)$$

つい生成された揺らぎのペアの存在する範囲の不確定さは $c\Delta t$ 程度である。不確定さから決まるペアの存在領域の範囲が事象の地平線を超えていると対消滅することが出来ず実在かしてしまう。この条件は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} c\Delta t &> \frac{c}{H}, \\ \Delta\phi &< \hbar H. \end{aligned} \quad (3.144)$$

エネルギーが $\hbar H$ 以下のインフラトン場の揺らぎ実在化することになる。これが物質分布のエネルギー密度の揺らぎになり、宇宙の構造形成の物質分布の揺らぎの起源である。

3.8 スカラー揺らぎ

3.8.1 フーリエスペクトル

任意のスカラー量 $g(\vec{x}, t)$ のフーリエスペクトルは以下のように定義する。

$$g(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \hat{g}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (3.145)$$

ここで \vec{x} は共同座標での位置ベクトルで、物理的な距離で定義される位置ベクトル \vec{r} とは、スケールファクター $a(t)$ を介して $\vec{r} = a(t)\vec{x}$ で結ばれる。インフレーションを駆動するスカラー場を以下ではインフラトンと呼ぶ。

インフラトンの零次パート $\phi_0(t)$ の進化の詳細は前章で述べた。零次パートは、空間的に一様等方である。インフラトンの揺らぎ $\delta\phi(\vec{x}, t)$ が満たす方程式は以下の方程式から得られる。

$$\square(\phi_0 + \delta\phi) - V'(\phi_0 + \delta\phi) = 0. \quad (3.146)$$

ゼロ次が $\square\phi_0 - V'(\phi_0) = 0$ を満たす事を用いいると以下の方程式を得る。

$$\square\delta\phi - V''(\phi_0)\delta\phi = 0. \quad (3.147)$$

ここで

$$\square\delta\phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\delta\phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\delta\phi \quad (3.148)$$

$$= g^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\nu\delta\phi - \partial_\alpha\delta\phi\Gamma_{\mu\nu}^\alpha). \quad (3.149)$$

インフラトンに揺らぎが存在すれば、それに伴うエネルギー密度の揺らぎによりメトリックにも揺らぎが生じる。しかし、以下では簡単のため、メトリックの揺らぎは無視し、メトリックは以下の形で与えられるとする。

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3.150)$$

従って、ダランベルシアンを計算するのに必要なクリストッフエル記号の

値は以下のようになる。

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \Gamma_{00}^i = 0, \Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\delta_{ij}. \quad (3.151)$$

これからインフラトン場の揺らぎが満たす方程式は以下のようになる。

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\delta\phi + V''\delta\phi = 0. \quad (3.152)$$

ここで得た方程式を断熱過程におけるエネルギー保存則からも導く事ができる。断熱過程におけるエネルギー保存則は次の式で表される。

$$\frac{dU}{dt} = -P\frac{dV}{dt}.$$

ここで $U = \rho V$ は体積 V 内の全エネルギー、 P は圧力である。スカラー場をゼロ次と摂動の一次に分けると摂動量の一次まででエネルギー保存則は次のように書ける。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2 + \dot{\phi}_0\delta\dot{\phi} + V(\phi) \right) = -(\dot{\phi}_0^2 + 2\dot{\phi}_0\delta\dot{\phi}) \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}.$$

微小体積は $V = a^3 d^3x$ と書けるから、体積変化はスケールファクターの時間変化によるものと peculiar velocity の存在による固有体積の変化によるもの重ね合わせである。したがって体積変化率は

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 3\frac{\dot{a}}{a} + \text{div}\vec{v}$$

である。ここで $\text{div}\vec{v}$ の意味について考察してみる。問題をイメージしやすいように速度場が $\vec{v}(\vec{x}, t)$ で与えられる流体を考える。時刻 t において $\vec{x}(t) \sim \vec{x}(t) + d\vec{x}(t)$ の微小領域で囲まれる微小体積 $d^3\vec{x}(t)$ が微小時間 dt 後にどのようなようになるか考察する。流体要素の位置の変化は以下のように書ける。

$$\vec{x}(t+dt) = \vec{x}(t) + \vec{v}(\vec{x}(t), t)dt$$

$$\vec{x}(t+dt) + d\vec{x}(t+dt) = \vec{x}(t) + d\vec{x}(t) + \vec{v}(\vec{x}(t) + d\vec{x}(t), t)dt$$

よって

$$d\vec{x}(t+dt) = d\vec{x}(t) + (\vec{v}(\vec{x}(t) + d\vec{x}(t), t) - \vec{v}(\vec{x}(t), t))dt$$

右辺第二項に現れた位置による速度変化が体積の増加、減少の原因になる。

従って微小体積の変化率は以下のように計算される

$$\frac{\partial(\vec{x}(t+dt))}{\partial(\vec{x}(t))} = \begin{vmatrix} 1 + \partial_x v_x dt & \partial_y v_x dt & \partial_z v_x dt \\ \partial_x v_y dt & 1 + \partial_y v_y dt & \partial_z v_y dt \\ \partial_x v_z dt & \partial_y v_z dt & 1 + \partial_z v_z dt \end{vmatrix} \\ \sim 1 + \text{div} \vec{v} dt$$

最後の式変形では微量量の一次まで取った。従って、体積変化率は $\text{div} \vec{v}$ で与えられる。スカラー場のエネルギー運動量テンソルの結果から peculiar velocity は次のように与えられる。

$$a\vec{v} = \frac{-\dot{\phi}_0 \frac{1}{a} \vec{\nabla} \delta\phi}{\rho_0 + P_0} = -\frac{\frac{1}{a} \vec{\nabla} \delta\phi}{\dot{\phi}_0}$$

ここで \vec{v} は comoving peculiar velocity である。さらに

$$\frac{dV(\phi_0 + \delta\phi)}{dt} = (V'(\phi_0) + V''(\phi_0)\delta\phi)(\dot{\phi}_0 + \delta\dot{\phi}) \\ = V'\dot{\phi}_0 + V'\delta\dot{\phi} + V''\delta\phi\dot{\phi}_0$$

を用いるとエネルギー保存則から次の式を得る。

$$\dot{\phi}_0(\ddot{\phi}_0 + 3H\dot{\phi}_0 + V') \\ + \delta\dot{\phi}_0(\ddot{\phi}_0 + 3H\dot{\phi}_0 + V') \\ + \dot{\phi}_0(\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\Delta\delta\phi + V''\delta\phi) = 0$$

一行目の式からゼロ次解の満たす方程式が得られ、3行目の式から一次の摂動量が満たす方程式が得られる。一次の摂動量の方程式にラプラシアンが入ってくる理由は、縦波なので摂動量の振幅が圧縮率、膨張率に関係していることから来る。

3.8.2 Massless scalar field

以下では、簡単のため massless free field として扱い $V'' = 0$ とする。インフラトン場の揺らぎのフーリエ成分 $\delta\phi_k(t)$ が満たす方程式は

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_k = 0. \quad (3.153)$$

となる。ここで $\delta\phi(t)$ は実関数であることから $\delta\phi_k$ は以下のように書ける。

$$\delta\phi_k = w_k(t)a_{\vec{k}} + w_k^*(t)a_{-\vec{k}}^\dagger. \quad (3.154)$$

ここで $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^\dagger$ は生成消滅演算子であり、 w_k も $\delta\phi_k$ と同じ方程式を満たす。

ハッブル定数が時間によらず一定、即ち指数関数的に宇宙膨張が起きる時、その解は以下の様になる。

$$w_k = A \left(i + \frac{k}{aH} \right) e^{i\frac{k}{aH}t}. \quad (3.155)$$

インフラトンの揺らぎ成分の振幅 A を、揺らぎの波長が Hubble horizon サイズより十分短い時、すなわち $a/k \ll 1/H$ の時、フラット時空での量子化されたスカラー場の式と一致せよ、という条件から求める。揺らぎの波長が subhorizon scale の任意の時刻を t_1 とする。この時刻からの経過時間が Hubble time より十分短い時刻 t を扱う。すなわち $H(t-t_1) \ll 1$ である。この時、スケールファクターは以下のように展開できる。

$$a(t) \sim a_1 + \dot{a}_1(t-t_1) = a_1(1 + H(t-t_1)). \quad (3.156)$$

ここで $a_1 = a(t_1)$ でそれぞれ時刻 t_1 のスケールファクターである。これから w_k の指数部を以下のように展開できる。

$$\frac{k}{a(t)H} \sim \frac{k}{a_1H} - \frac{k}{a_1}(t-t_1). \quad (3.157)$$

また subhorizon scale では $k/aH \gg 1$ であることに注意して w_k の漸近形が以下のようになる。

$$w_k \sim \frac{k}{a_1H} A e^{i\frac{k}{a_1H} + i\frac{k}{a_1}t_1} e^{-i\frac{k}{a_1}t}. \quad (3.158)$$

一方、フラット時空での量子化された mass less free scalar field は 3.1.6 節から以下のように書けた。

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_p}} (a_{\vec{p}} e^{-i\omega_p t} + a_{-\vec{p}}^\dagger e^{i\omega_p t}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}. \quad (3.159)$$

ここで V は考えている領域の物理的体積、 \vec{r}, \vec{p} は物理的な位置ベクトル及び波数ベクトルであり共動座標形での量と $\vec{r} = a(t)\vec{x}, \vec{p} = \vec{k}/a(t)$ で結ばれる。また分散関係式は $\omega_p = p = k/a(t)$ である。インフレーション時の subhorizon scale のインフラトン場の揺らぎがこの式と一致するという条件から

$$A = \frac{H}{\omega_{1p}} e^{-i\delta_{1p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{1p}}}. \quad (3.160)$$

を得る。ここで、 $H(t-t_1) \ll 1$ から指数以外に現れる時間に依存する物理量は時刻 t_1 での量で近似し、下付きの添字 1 を付けた。この式に現れた位相は次の式で与えられる。

$$\delta_{1p} = \frac{k}{a_1 H} + \frac{k}{a_1} t_1. \quad (3.161)$$

求まった振幅 A を代入し、物理体積と共動体積の間に $V = a(t)^3 V_c$ の関係がある事を利用するとインフラトン場の揺らぎが以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \delta\phi(\vec{x}, t) = & \frac{H}{\sqrt{2V_c}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^{3/2}} \left[\left(i + \frac{k}{aH} \right) e^{i\frac{k}{aH} - i\delta_{1p}} a_{\vec{k}} \right. \\ & \left. + \left(-i + \frac{k}{a(t)H} \right) e^{-i\frac{k}{aH} + i\delta_{1p}} a_{-\vec{k}}^\dagger \right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \end{aligned} \quad (3.162)$$

インフレーション中は激しい宇宙膨張により宇宙はほぼ真空状態にあると思われる。そこでインフレーション中の真空 $|0\rangle$ を

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0. \quad (3.163)$$

を満たす状態とする。すると当然だが

$$\langle 0|\delta\phi(\vec{x}, t)|0\rangle = 0. \quad (3.164)$$

で揺らぎの振幅の真空期待値はゼロである。ここで $\langle 0|a_{\vec{k}}^\dagger = 0$ を使った。インフラトンの揺らぎの分散値は以下のように与えられる。

$$\langle 0|\delta\phi(\vec{x}, t)^2|0\rangle = \frac{H^2}{2V_c} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{k^3} \left(1 + \frac{k^2}{a^2 H^2} \right). \quad (3.165)$$

次に和から積分への置き換えを行う。それには以下の操作を行えば良い。

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{V_c}{(2\pi)^3} d^3k. \quad (3.166)$$

興味あるスケールの揺らぎはインフレーション末期には、全て Hubble horizon より十分波長が長くなっている。そこで super horizon limit $a/k \gg 1/H$ すなわち $k/aH \ll 1$ を取る。その結果、興味あるスケールのみ含むインフラトンの揺らぎは以下のように書ける。

$$\langle 0 | \delta\phi(\vec{x}, t)^2 | 0 \rangle = \frac{H^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k^3} = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k}. \quad (3.167)$$

ここで一般に平均値がゼロの物理量 g の分散値をフーリエ成分の積分で表した時パワースペクトルを以下の式で定義する。

$$\langle g^2 \rangle = \int_0^\infty P_g(k) \frac{dk}{k}. \quad (3.168)$$

ここでフーリエ成分の振幅は波数ベクトルの方向には依存しないとした。すなわちパワースペクトルとは、単位対数波数あたりに含まれるモードのパワーの分散値である。したがって、インフラトン場の揺らぎのパワースペクトルは以下の様に与えられ、

$$P_\phi = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2. \quad (3.169)$$

揺らぎの波長によらず一定となる。

次に、ハッブル定数の時間依存性をスローロールパラメータの一次まで考慮した場合を扱う。共形時間 (Conformal time) を以下のように定義する。

$$d\tau = \frac{dt}{a}. \quad (3.170)$$

Conformal time は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \tau - \tau_1 &= \int_{t_1}^t \frac{dt}{a} = \int_{a_1}^a \frac{da}{a^2 H} \\ &= \left[-\frac{1}{aH} \right]_{a_1}^a + \int_{a_1}^a \frac{da}{a} \frac{d}{da} \left(\frac{1}{H} \right) \\ &= -\frac{1}{aH} + \frac{1}{a_1 H_1} + \int_{a_1}^a \frac{da}{a\dot{a}} \left(-\frac{\dot{H}}{H^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{aH} + \frac{1}{a_1 H_1} + \int_{a_1}^a \frac{da}{a^2 H} \varepsilon \\
&= -\frac{1}{aH} + \frac{1}{a_1 H_1} - \frac{\varepsilon}{aH} + \frac{\varepsilon_1}{a_1 H_1} + \int_{a_1}^a \frac{da}{a^2 H} \left(-\frac{\dot{H}}{H^2} \varepsilon + \frac{\dot{\varepsilon}}{H} \right)
\end{aligned}$$

二行目の等号では、部分積分を行った。また、 $\varepsilon = -\dot{H}/H^2$ を使った。時間微分を $d/dt = \dot{\phi}_0 d/d\phi_0$ を用いてスカラー場のゼロ次の量の微分に置き換え、 ε の定義式的时间微分を行うと以下の式を得る。

$$\dot{\varepsilon} = \tilde{M}_{pl}^2 \left(\frac{V''}{V^2} - \frac{V'^2}{V^3} \right) V' \dot{\phi}_0$$

ここでフリードマン方程式 $H^2 \sim V/3\tilde{M}_{pl}^2$ を時間微分することで得る以下の式 $V' \dot{\phi}_0 = 6\tilde{M}_{pl}^2 H \dot{H}$ を上の式に代入し変形すると以下の式を得る。

$$\dot{\varepsilon} = 2H(2\varepsilon - \eta)\varepsilon. \quad (3.171)$$

従って、上で得られた τ の式の最後の積分の項は、スローロールパラメータの二次以上の寄与しか与えない。従ってスローロールパラメータの一次までの近似では Conformal time の時間変化は無視でき上の式は以下のように書ける。

$$\tau - \tau_1 = -\frac{1}{aH} + \frac{1}{a_1 H_1} + \varepsilon(\tau - \tau_1)$$

よって

$$\tau = -\frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{1}{aH}. \quad (3.172)$$

スカラー場の揺らぎの満たす方程式に $w_k = u_k/a$ を代入すると u_k の満たす方程式は ε の一次までの近似で以下ようになる。以下では、conformal time での微分を ' で表す。

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{2+3\varepsilon}{\tau^2} \right) u_k = 0. \quad (3.173)$$

ここで更に $\xi = -k\tau$ 、 $u_k = \sqrt{\xi} H_k(\xi)$ と置いてこの式に代入すると以下の方程式を得る。

$$\frac{d^2 H_k}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dH_k}{d\xi} + \left(1 - \frac{9/4 + 3\varepsilon}{\xi^2} \right) H_k = 0. \quad (3.174)$$

これはベッセルの微分方程式である。その次数 ν は $\nu = \sqrt{9/4 + 3\varepsilon} \sim 3/2 + \varepsilon$ である。この方程式の解は Bessel 関数 J_ν 、Neumann 関数 N_ν 、第一種、第二種の Hankel 関数 $H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$ である。従って、 w_k の一般解は以下のように書ける。

$$w_k = \frac{1}{a} [\alpha(k) \sqrt{\xi} H_\nu^{(1)}(\xi) + \beta(k) \sqrt{\xi} H_\nu^{(2)}(\xi)]. \quad (3.175)$$

上記一般解に現れた不定定数を揺らぎの波長が十分 Hubble horizon より短い極限で、スカラー場の揺らぎが flat space time での量子化されたスカラー場の式と一致するという条件から決定する。Subhorizon limit では $\xi = -k\tau \sim k/aH \gg 1$ である。Hankel 関数は $\xi \rightarrow \infty$ の極限で以下のような漸近形を持つ。

$$H_\nu^{(1)}(\xi) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \exp\left[i\left(\xi - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (3.176)$$

$$H_\nu^{(2)}(\xi) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \exp\left[-i\left(\xi - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (3.177)$$

Subhorizon limit が適応できるある時刻 t_1 の近傍の時刻 t に於ける ξ は以下のように近似できる。

$$\xi \sim \frac{k}{a_1 H_1} - \frac{k}{a_1} (t - t_1)$$

これらを w_k の式に代入すると subhorizon limit で以下の式を得る。

$$w_k \sim \frac{1}{a_1} [\alpha(k) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{k}{a_1}(t-t_1)} e^{i(\frac{k}{a_1 H_1} - \frac{\pi}{4}(2\nu+1))} + \beta(k) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{k}{a_1}(t-t_1)} e^{-i(\frac{k}{a_1 H_1} - \frac{\pi}{4}(2\nu+1))}]$$

Flat space time での量子化された mass less scalar field の式と比較することで以下の式を得る。

$$\beta(k) = 0 \quad (3.178)$$

$$\alpha(k) = \frac{1}{\sqrt{V_c}} \sqrt{\frac{\pi}{4k}} e^{-i(\frac{k}{a_1 H_1} + \frac{k}{a_1} t_1 - \frac{\pi}{4}(2\nu+1))}. \quad (3.179)$$

ここで $V_c = v/a_1^3$ は共動体積、 $\omega_p = p = k/a_1$ 、 $\vec{p} \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{x}$ を用いた。以上から w_k は以下のようになる。

$$w_k = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{V_c}} \sqrt{\frac{\pi}{4k}} e^{-i\left(\frac{k}{a_1 H_1} + \frac{k}{a_1} t_1 - \frac{\pi}{4}(2\nu+1)\right)} \sqrt{\xi} H_\nu^{(1)}(\xi). \quad (3.180)$$

インフレーション中、揺らぎの波長は宇宙膨張によって horizon より十分長い波長まで引き延ばされる。super horizon limit $\xi = -k\tau \sim -k/aH \ll 1$ では以下のようになる。

$$H_\nu^{(1)} \rightarrow -i \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{-\nu}$$

従って

$$w_k \rightarrow \frac{H}{\sqrt{V_c}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{k^{3/2}} 2^{\nu-2} e^{i\left(\frac{-k}{a_1 H_1} - \frac{k}{a_1} t_1 + \frac{\pi}{2}(\nu-1/2)\right)} \left(\frac{aH}{k}\right)^\varepsilon. \quad (3.181)$$

ここで $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ で $\Gamma(\nu)/\Gamma(3/2) \sim 1$ である。以上から massless スカラー場の揺らぎのパワースペクトルは以下のように求まる。

$$P_{\delta\phi_k}(k) = \left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{a2H}{k}\right)^{2\varepsilon} \propto k^{-2\varepsilon}. \quad (3.182)$$

パワースペクトルの波数依存性を別の方法で導くことでその物理的理解を深める。Super horizon limit で w_k の方程式は以下のようになる。

$$\ddot{w}_k + 3H\dot{w}_k \sim 0$$

宇宙はどの時代も膨張しているので $H > 0$ である。従ってこの方程式の解は、減衰解と $w_k = \text{const.}$ である。即ち、揺らぎは horizon exit 後、振幅は一定のまま保たれる。波数ベクトル k の揺らぎが、Horizon exit する時刻を t_* は

$$\frac{a(t_*)}{k} = \frac{1}{H(t_*)}. \quad (3.183)$$

即ち $a_* H_*/k = 1$ で定義される。揺らぎの振幅が super horizon で一定になるので、良い近似で horizon exit 時の値でほぼ一定になるとしてよいだろう。従ってパワースペクトルは以下のように書ける。

$$P_{\delta\phi_k}(k) = \left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \right)^2 \left(\frac{H_*}{2\pi} \right)^2. \quad (3.184)$$

ここで H_* は horizon exit 時ハッブル定数である。実際 $H(t)^2 \sim (H_* + \dot{H}_*(t-t_*))^2 = H_*^2(1 - 2H_*\varepsilon(t-t_*))$ 、 $(a(t)/a_*)^{2\varepsilon} \sim e^{2\varepsilon H_*(t-t_*)} \sim 1 + 2H_*\varepsilon(t-t_*)$ からスローロールパラメーターの一次までで $H^2 a^{2\varepsilon} \sim H_*^2 a_*^{2\varepsilon}$ でパワースペクトルの値は horizon exit 時の値でほぼ一定である。

パワースペクトルインデックス n は以下の式で計算できる。

$$n = \frac{d \ln P_{\delta\phi_k}(k)}{d \ln k}. \quad (3.185)$$

ここで式 (3.183) から、comoving wave number を微量 δk 増加させると、horizon exit の時期が δt_* だけ遅れることを用いて、波数での微分を t_* での微分に変換することで以下の関係式を得る。

$$\frac{d}{d \ln k} = \frac{\dot{\phi}_0}{H_*} \frac{d}{d\phi_0} \sim -\tilde{M}_{pl}^2 \frac{V'}{V} \frac{d}{d\phi_0}. \quad (3.186)$$

これらから

$$\frac{d \ln H_*^2}{d \ln k} \sim -2\varepsilon$$

が得られ $n \sim -2\varepsilon$ となり上で求めたものと一致する。この導出法から massless scalar field の揺らぎのパワースペクトルの波数依存性は、以下の理由で生じると考えられる。インフラトン場のポテンシャルに有限の負の傾き ($\varepsilon > 0$) が存在するため、より大きな波数の即ちより短い波長の揺らぎが horizon exit する時のスカラー場のポテンシャル即ちハッブル定数の値が小さくなる。その為、 k の大きな揺らぎに対してパワースペクトルの値が小さくなる。

3.8.3 Scalar field with non zero mass simplified treatment

スカラー場の質量が有限の場合即ち $V'' \neq 0$ の場合を考える。この項は u_k の満たす方程式で $3a^2 H^2 \eta u$ の寄与を与える。スローロールパラメーターの一次の近似で以下の寄与を与える。

$$\frac{3\eta}{\tau^2} u_k. \quad (3.187)$$

従って、 H_k は $v = \sqrt{9/4 + 3\varepsilon - 3\eta} \sim 3/2 + \varepsilon - \eta$ のベッセルの微分方程式を満たす。このことからパワースペクトルの波数依存性は以下のようになる。

$$P_{\delta\phi_k}(k) \propto k^{-2\varepsilon+2\eta}. \quad (3.188)$$

スカラー場のポテンシャルの二回微分が正即ち $\eta > 0$ の時、一階微分の効果を打ち消す方向に働く。二回微分が正ということは、ポテンシャルが下に凸ということである。ポテンシャルの一階微分が負つまりポテンシャルが下り坂の時は、二回微分が正ということは、坂の傾きが段々緩やかになって行く事になる。ようするにより短い波長の揺らぎが horizon exit する時のポテンシャルの減少量が減り、波長の違いによる差が小さくなる。一方、一階微分が正の時、スカラー場のゼロ次量は、初期に大きな値を持ちそこから小さな値に変化するように進化する。有限な正の値から原点に近づくように動くと考えればよい。この時、二回微分が正ということは、スカラー場が原点に近づくに従って減少するポテンシャルの値の減少率を少なくする方向に働く。やはり一階微分の効果を打ち消す効果を持つ。このような状況はカオティックインフレーションモデルで実現される。

3.8.4 Generation of random Gaussian field

インフレーション中の真空の量子揺らぎにより生成されるスカラー場の揺らぎの振幅分布が正規分布すなわちガウシアンで与えられる事を示す。インフレーション中の量子化されたスカラーが式 (3.162) で書けることから揺らぎの真空期待値がゼロで、分散が式 (3.165) で書けること示した。スカラー場の揺らぎの奇数次のベキ乗の真空期待値がゼロであることは自明である。4乗平均は以下のように計算できる。以下の計算では、 $C_k = \frac{H}{\sqrt{2V_c}} \frac{1}{k^{3/2}} [(i + \frac{k}{aH}) e^{i\frac{k}{aH} - i\delta_{ip}}$ と置いて計算を行う。

$$\langle 0 | \delta\phi(x)^4 | 0 \rangle = 3 \sum_k (|C_k|^2)^2 = 3 (\langle 0 | \delta\phi(x)^2 | 0 \rangle)^2. \quad (3.189)$$

これは $\delta\phi(x)$ が、平均ゼロ、分散 $\langle 0|\delta\phi(x)^2|0\rangle$ で正規分布するとした時に得られる結果と一致している。例としてある物理量 x の確率分布が、平均ゼロ・標準偏差 σ の正規分布 $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ で与えられるとする。分散・ x^4 平均は以下ようになる。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x) dx &= \sigma^2, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^4 P(x) dx &= 3\sigma^4.\end{aligned}\quad (3.190)$$

確かに、式 (3.189) の結果がガウシアン確率分布の結果と一致している。更に高次の真空期待値を計算することで正確に $\delta\phi$ の分布が正規分布であること即ち真空の量子揺らぎで生成されるスカラー場の振幅の分布がガウシアンで与えられるが示される。

真空の揺らぎが random Gaussian 分布に従うことは、以下のように示す事もできる。ある波数 \vec{k} のモードを取り上げる。このモードの量子の生成消滅演算子を $a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}}$ とし個数演算子を $N_{\vec{k}} = a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}$ で定義する。すると位相演算子 $\hat{\phi}_{\vec{k}}$ を用いて生成消滅演算子は以下のように粒子数演算子をもちいて書き表せる。

$$\begin{aligned}a_{\vec{k}} &= e^{i\hat{\phi}_{\vec{k}}} \sqrt{N_{\vec{k}}}, \\ a_{\vec{k}}^\dagger &= \sqrt{N_{\vec{k}}} e^{-i\hat{\phi}_{\vec{k}}}.\end{aligned}\quad (3.191)$$

ここで位相演算子はエルミートであるとした。生成消滅演算子の交換関係から位相と粒子数演算子の交換関係を導出する。

$$\begin{aligned}[a, a^\dagger] &= e^{i\hat{\phi}} N e^{-i\hat{\phi}} - N \\ &= \left(N + i[\hat{\phi}, N] + \frac{i^2}{2!} [N, [N, \hat{\phi}]] + \dots \right) - N \\ &= i[\hat{\phi}, N] + \frac{i^2}{2!} [N, [N, \hat{\phi}]] + \dots\end{aligned}$$

これが $[a, a^\dagger] = 1$ に等しくなるためには

$$[\hat{\phi}, N] = -i, \quad (3.192)$$

で無ければならない。したがって、位相と粒子数は互いに共役な物理量であり、それぞれの不確定さを σ_ϕ 、 σ_N とするとこれらは

$$\sigma_\phi \sigma_N \geq \frac{1}{2}. \quad (3.193)$$

の不確定性関係を満たす。真空は粒子数がゼロで確定した状態であり、粒子数の不確定さはゼロである。したがって、不確定性関係式 (3.193) より、位相の不確定さは無限大即ち、位相は $0 \sim 2\pi$ の間の値を一様ランダムに取る。位相が一様ランダムに分布する波を重ね合わせると中心極限定理により振幅の分布はガウシアンとなる。ここで二つの非可換な演算子 A, B に対して以下の式が成り立つことを用いた。

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = B + \lambda [A, B] + \frac{\lambda^2}{2!} [A, [A, B]] + \frac{\lambda^3}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots, \quad (3.194)$$

この式は以下のように証明することができる。

$$f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$$

によって関数 $f(\lambda)$ を定義する。この関数の λ による導関数を計算する。

$$f'(\lambda) = A e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} - e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} A = [A, f(\lambda)]$$

$$f''(\lambda) = A f'(\lambda) - f'(\lambda) A = [A, [A, f(\lambda)]]$$

$$f'''(\lambda) = [A, [A, [A, f(\lambda)]]]$$

ここで $f(\lambda)$ を $\lambda = 0$ のまわりでテイラー展開すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= f(0) + f'(0)\lambda + \frac{1}{2!} f''(0)\lambda^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)\lambda^3 + \dots \\ &= B + [A, B]\lambda + \frac{1}{2!} [A, [A, B]]\lambda^2 + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]]\lambda^3 + \dots \end{aligned}$$

したがって与式が証明された。

3.8.5 Generation of Adiabatic perturbation via Inflation

インフレーション期に生成される密度揺らぎが主に断熱揺らぎであることを示す。インフレーション期に生成されたスカラー場の揺らぎは興味あ

るスケールは全てスーパーホライズンスケールとなり、その振幅を凍結したままインフレーション終了時即ち宇宙再加熱の時期を待つ。インフレーション期間中にどのようなスケールの揺らぎがホライズンの外に出るのか調べるため、インフレーション終了直前に丁度その時のホライズンサイズだった波長が、現在ではどの程度の大きさになっているか調べる。インフレーションが起こるエネルギースケールを $T_{Inf} = 10^{15} \text{GeV}$ とする。不定ではあるが大きく外れていないと思われる。この時のハッブルホライズンは、

$$\frac{c}{H} \sim 1.6 \times 10^{-25} \text{cm}$$

従って、インフレーション終了直前に'ホライズンサイズと等しかったスケールの現在のスケールは、

$$\frac{c}{H} \frac{T_{Inf}}{T_0} = 2.4 \times 10^{-27} \frac{10^{16} \times 10^9}{3.0 \times 10^{-4}} \sim 600 \text{cm}$$

となり非常に小さい。天文学的に興味ある全てのスケールが、インフレーション中にホライズンエクジットして、一度はスーパーホライズンスケールになり、後にホライズン再エントリーしたと考えてよい。

スカラー場の揺らぎの存在は、各場所毎のインフレーション終了時刻即ち宇宙再加熱の時刻の揺らぎ δt_{reh} を生じる。

$$\delta t_{reh} = -\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}_0}$$

で与えられる。マイナス符号は、正の揺らぎがある時、平均より先に進んでおり早くインフレーションが終了することを反映している。宇宙再加熱時にインフレーションを引き起こしたスカラー場、インフラトン場から光、ニュートリノ、暗黒物質、バリオン等現在宇宙に存在する全ての物質が生成されたと考える。簡単のためその期間は一瞬とする。平均的な場所でのインフレーション終了時刻を \tilde{t}_{reh} とする。宇宙再加熱が終了した場所は、輻射優勢の宇宙として進化を始める。エネルギー密度 g_i のある物質が再加熱後 \dot{g}_i の割合で断熱的にエネルギー密度を減少させて行くとする。平均的な宇宙でインフレーション終了直後の減少率を \dot{g}_i と書く。インフレーション終了時刻が平均より δt_{reh} 遅れている場所では、周りが膨張によるエネルギー

密度の減少を始めているのにまだ、エネルギー密度一定のままインフレーションを続けている事になる。従って、その場所が再加熱した後、周りより密度の高い領域として観測される。その大きさは以下の式で書ける。

$$\delta g_i = -\dot{g}_i \delta t_{reh} \quad (3.195)$$

ここで i は物質の種類の違いを表しており、この時全ての物質が一斉に生成されるため、

$$\frac{\delta g_1}{\dot{g}_1} = \frac{\delta g_2}{\dot{g}_2} = \dots = \frac{\delta g_n}{\dot{g}_n} \quad (3.196)$$

を満たす。これは、生成される揺らぎが断熱揺らぎであることを示している。断熱とは、ある物質を基準として選んだ時、その物質の単位エントロピーあたりの他の物質のエントロピーが場所によらず一定という意味である。言い方を変えると基準となる物質の粒子一個あたりの他の物質の粒子数が場所によらず一定という意味である。これは、再加熱が必ず同じ割合で物質を生成すると仮定している以上必ず成り立つ。エネルギー密度の揺らぎが場所によっては観測されるのは、偶々再加熱の時刻が、平均とズレていたためである。

上記の断熱揺らぎの条件を物質と輻射で具体的に調べてみる。物質と輻射の density contrast をそれぞれ δ_m, δ_r とする。 $\dot{\rho}_m = -3H\rho_m$ であり、 $\dot{\rho}_r = -4H\rho_r$ であるから

$$\frac{\rho_m \delta_m}{\dot{\rho}_m} = \frac{\rho_r \delta_r}{\dot{\rho}_r}$$

より

$$\frac{\delta_m}{3} = \frac{\delta_r}{4} \quad (3.197)$$

が物質と輻射の間の断熱揺らぎの条件となる。

3.8.6 スカラー揺らぎのパワースペクトル

密度揺らぎ $\delta\rho$ が生成する重力ポテンシャルの揺らぎ ϕ_N は、ニュートンの万有引力の法則の微分形式であるポアソン方程式は以下のように書

ける。

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi_N &= 4\pi G\delta\rho \\ -\frac{k^2}{a^2}\phi_N &= \frac{3}{2}H^2\delta \\ \delta &\equiv \frac{\delta\rho}{\rho}\end{aligned}\tag{3.198}$$

ここで k は揺らぎの共動座標系の波数であり、フリードマン方程式 $H^2 = 8\pi G/3\rho$ を用いた。この式はハッブルホライズン $\ell_H = c/H$ を用いて以下のように変形できる。

$$\frac{\phi_N}{c^2} = -\frac{3}{8\pi^2} \left(\frac{\lambda}{\ell_H}\right)^2 \delta.\tag{3.199}$$

ここで $\lambda = (a/k)2\pi$ は揺らぎの波長の物理的長さである。この式から分かる事は、揺らぎの波長がサブホライズンサイズ ($\lambda < \ell_H$) の時は、 $\delta \gg \phi_N/c^2$ であり、スカラー揺らぎは本質的に密度揺らぎであり、逆にスーパーホライズンスケール ($\lambda > \ell_H$) のスカラー揺らぎは本質的に重力ポテンシャル言い方を変えるとメトリックのスカラー揺らぎである。このことがスーパーホライズンスケールのスカラー揺らぎの進化を扱うのに一般相対論的扱いが必要となる理由である。

スカラー揺らぎの進化を扱う方程式の導出には、ゲージ不変な量を扱う必要があり、面倒な計算を要する。この教科書では、これら面倒な計算を省き物理的考察からスカラー揺らぎのパワースペクトルの導出を試みる。正確な取り扱いが知りたい方は例えば http://www.astr.tohoku.ac.jp/~hattori/hattori_cosmo.pdf を参照してください。

波数 k の揺らぎの存在に起因する空間曲率の摂動を $R_k^{(3)}$ と書くと、定義に従って計算することで次の結果を得る。

$$R_k^{(3)} = \frac{4k^2}{a^2} \left(D + \frac{E}{3}\right)\tag{3.200}$$

以下では

$$\varphi \equiv D + \frac{1}{3}E \quad (3.201)$$

と置く。インフレーション中はスカラー場 ϕ の値が幾らであるかが時計代わりとして使える。TM ゲージに設定するとは、 ϕ の値が同じになるように各場所の時計の進み具合を調整するように取りなさいという意味である。正のスカラー場の揺らぎ $\delta\phi$ が存在する場所を考える。 δt 間の宇宙膨張 $\Delta a = a\delta t$ だけ揺らぎが存在した場所は宇宙の半径が大きくなっている。ここで $\delta t < 0$ に注意すると $\Delta a < 0$ であり、宇宙の半径は $|\Delta a|$ だけ小さくなっている。正の揺らぎが存在する場所では、宇宙の半径が平均的な場所が達する予定の a よりまだ $|\Delta a|$ だけ小さい内に同じ時刻になってしまうのである。その結果、空間曲率 $\Delta a/a$ が発生する。これを式で表すと以下のようになる。

$$\varphi = \frac{\dot{a}\delta t}{a} = -H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}_0} \quad (3.202)$$

インフラトンのパワースペクトル式 (3.169) を用いるとスカラー曲率のパワースペクトルが以下のように求まる。

$$P_\varphi(k) = \left(\frac{H_*}{\dot{\phi}_0}\right)^2 P_\phi(k) = \left(\frac{H_*}{\dot{\phi}_0}\right)^2 \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2. \quad (3.203)$$

ここで H_* は波数 k の揺らぎがホライズンの外に出た直後、即ち horizen exit の時のハッブル定数であり、波数と関係式 (3.183) で結ばれる。スローロール近似でのゼロ次のスカラー場の温度変化率とインフラトンポテンシャルの関係式 (3.133) とフリードマン方程式 (3.132) およびスローロールパラメータ ε の定義式 (3.130) から $(H/\dot{\phi}_0)^2$ は以下のように変形できる。

$$\left(\frac{H}{\dot{\phi}_0}\right)^2 = \frac{1}{\tilde{M}_{pl}^4} \left(\frac{V}{V'}\right)^2 = \frac{1}{2\tilde{M}_{pl}^2} \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.204)$$

以上からスカラー曲率のパワースペクトルは以下のように書ける。

$$P_\varphi(k) = \frac{1}{2\tilde{M}_{pl}^2} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2. \quad (3.205)$$

パワースペクトル (3.205) が Horizen exit 時のハッブル定数で与えられる事

から波数と波数の微分をスカラー場の微分に変換する関係式 (3.186) を用いてこの式を $\ln k$ で微分することで以下の手続きでスカラー揺らぎのパワースペクトルインデックス n の波数依存性が導出できる。

$$\frac{d\varepsilon}{d\ln k} = -\frac{\tilde{M}_{pl}^4 V'}{2V} \left(\frac{2V'V''}{V^2} - \frac{2V'^2}{V^2} \right) = -2\eta\varepsilon + 4\varepsilon^2. \quad (3.206)$$

$$\frac{d\ln H_*^2}{d\ln k} = -2\varepsilon. \quad (3.207)$$

$$n-1 \equiv \frac{d\ln P_\Phi}{d\ln k} = 2\eta - 6\varepsilon. \quad (3.208)$$

これは、ゲージ不変な揺らぎの発展方程式から導いた結果と一致している。ところでスカラー曲率のスペクトルインデックスをわざわざ $n-1$ で定義した理由は以下のことによる。宇宙論では、伝統的に構造形成の密度揺らぎのパワースペクトルを

$$|\delta\rho_k|^2 \propto k^n \quad (3.209)$$

と定義する習慣がある。この定義と矛盾しないようにするため上記のように $n-1$ で定義したのである。ポアソン方程式から

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_N &= 4\pi G a^2 \delta\rho_k \\ \Phi_N &\propto k^{-2} \delta\rho_k \end{aligned}$$

となる。したがって、空間曲率のパワースペクトルは

$$\int d\ln k P_\Phi(k) \propto \int d\ln k k^3 k^{-4} |\delta\rho_k|^2 \propto \int d\ln k k^{n-1}$$

となり、 $n=1$ の時、空間曲率がスケールによらないスケール不変な量になる。インフレーションが考案される以前に密度揺らぎの初期条件として、空間曲率がスケール不変になるのが自然と考えて $n=1$ を提案した二人の物理学者の名前をとって $n=1$ のスペクトルを Harrison-Zel'dovich spectrum との呼ばれる。

3.9 テンソルモードの生成とパワースペクトル

節 3.1.12 および節 3.1.13 で述べたようにテンソルモードは、質量ゼロの自由なスカラー場と同じダランベールの方程式により発展が記述される。したがって、膨張宇宙でのテンソルモードの発展は、free mass-less scalar field の発展方程式 (3.153) と同じ形即ち以下の方程式に従う。

$$\ddot{\Delta}_+(k) + 3H\dot{\Delta}_+(k) + \frac{k^2}{a^2}\Delta_+(k) = 0. \quad (3.210)$$

$$\Delta_+(k) = \sum_k \Delta_+(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}.$$

ハッブル定数が時間によらず一定として、インフレーション中の解を求めると以下のようなになる。

$$w_k(t) = A \left(i + \frac{k}{aH} \right) e^{i\frac{k}{aH}t},$$

$$\Delta_+(k) = w_k(t) a_{\vec{k}} + w_k^*(t) a_{-\vec{k}}. \quad (3.211)$$

自由なスカラー場の時と同様、サブホライズン極限 $k/aH \gg 1$ で平坦な宇宙を伝搬する重力波の量子化表現 (3.120) と一致せよという条件から比例定数 A が以下のように求まる。

$$A = \frac{2}{\tilde{M}_{pl}} H \frac{1}{\sqrt{V}} \sqrt{\frac{\hbar}{2k^3}}. \quad (3.212)$$

質量ゼロの自由なスカラー場の結果をファクター $2/\tilde{M}_{pl}$ 倍すれば良い事が分かる。テンソルモードには、プラスモードとクロスモードの二つの偏光が存在することを考慮するとテンソルモードのパワースペクトルは以下のように分かる。

$$P_T(k) = 2 \times \frac{4}{\tilde{M}_{pl}^2} \left(\frac{H_*}{2\pi} \right)^2. \quad (3.213)$$

因子 2 は、重力波がプラスとクロス二つの偏光の自由度を持つことに起因している。テンソルモードの振幅は、インフラトンポテンシャルの大きさに比例している。したがって、テンソルモードの振幅が測定できれば、イ

インフレーションが起きた時期のエネルギースケール言い換えるとインフラトン場のエネルギースケールが測定できる。スカラーモードのパワースペクトル (3.205) との比 tensor-to-scalar ratio を r で表すと以下ようになる。

$$r = \frac{P_T(k)}{P_\phi} = 16\epsilon. \quad (3.214)$$

式 (3.207) からテンソルモードスペクトルの波数依存性は $n_T = -2\epsilon$ である。テンソル・スカラー比は文献により、何同士の比を取るかまちまちであるが、WMAP 以来、WMAP の論文で採用された定義を用いるのがスタンダードになっている。式 (3.214) の定義が、WMAP Standard のテンソル・スカラー比である。ハッブル定数の時間依存性を考慮して方程式を解くことでテンソルモードのスペクトルとして slow roll parameter の一次までの近似で以下の解を得る。

$$\begin{aligned} P_T(k) &= 2 \times \frac{4}{\tilde{M}_{pl}^2} \left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \right)^2 \left(\frac{H_*}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{aH}{k} \right)^{2\epsilon} \\ &\propto k^{-n_T} \\ n_T &\equiv -2\epsilon. \end{aligned} \quad (3.215)$$

これらの結果からテンソルモードのパワースペクトルインデックスとスカラーテンソル比の間に成り立つ以下の関係が得られる。

$$r = -8n_T. \quad (3.216)$$

この関係式を Inflationary consistency equation と呼び、インフレーションモデルの観測的検証に使える関係式である。

3.10 ゲージ不変なスカラー摂動の発展方程式

以下ではゲージ不変なスカラー摂動の時間発展を述べる。以下の計算の土台となるクリストッフェル記号の全ての成分を導出する。

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}(g^{00}g_{00,0} + g^{0i}(g_{i0,0} + g_{i0,0} - g_{00,i})) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}(1-2A)(2aa'(1+2A) + a^2 2A')\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a'}{a} + A' \\
\Gamma_{i0}^0 &= \frac{1}{2}(g^{00}g_{00,i} + g^{0j}(g_{ji,0} + g_{j0,i} - g_{i0,j})) \\
&= A_{,i} - \frac{a'}{a}B_i = i\delta_{i3}(kA + \frac{a'}{a}B) \\
\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}(g^{00}(g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}) + g^{0k}(g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k})) \\
&= \frac{a'}{a}\delta_{ij} + \frac{1}{2}(B_{i,j} + B_{j,i}) - 2\frac{a'}{a}A\delta_{ij} + \frac{a'}{a}(2D\delta_{ij} + 2E_{ij}) + D'\delta_{ij} + E'_{ij}, \\
&= \frac{a'}{a}\delta_{ij} + kB\delta_{i3}\delta_{j3} - 2\frac{a'}{a}A\delta_{ij} + \frac{a'}{a}(2D\delta_{ij} + 2E_{ij}) + D'\delta_{ij} + E'_{ij} \\
\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2}(g^{i0}g_{00,0} + g^{ij}(2g_{j0,0} - g_{00,j})) \\
&= -\frac{a'}{a}B_i - B'_i + A_{,i} = i\delta_{i3}(\frac{a'}{a}B + B' + kA) \\
\Gamma_{j0}^i &= \frac{1}{2}(g^{i0}g_{00,j} + g^{ik}(g_{kj,0} + g_{k0,j} - g_{j0,k})) \\
&= \frac{a'}{a}\delta_{ij} - \frac{1}{2}(B_{i,j} - B_{j,i}) + D'\delta_{ij} + E'_{ij} = \frac{a'}{a}\delta_{ij} + D'\delta_{ij} + E'_{ij} \\
\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}(-g^{i0}g_{jk,0}) + \frac{1}{2}g^{i\ell}(g_{\ell j,k} + g_{\ell k,j} - g_{jk,\ell}) \\
&= \frac{a'}{a}B_i\delta_{jk} + (D_{,j}\delta_{ik} + D_{,k}\delta_{ij} - D_{,i}\delta_{jk}) + (E_{ik,j} + E_{ij,k} - E_{jk,i}) \\
&= -i\frac{a'}{a}B\delta_{jk}\delta_{i3} + (D_{,j}\delta_{ik} + D_{,k}\delta_{ij} - D_{,i}\delta_{jk}) + (E_{ik,j} + E_{ij,k} - E_{jk,i}) \quad (3.217)
\end{aligned}$$

良く出てくる縮約も以下にまとめておく。

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0\mu}^\mu &= 4\frac{a'}{a} + A' + 3D' \\
\Gamma_{i\mu}^\mu &= A_{,i} + 3D_{,3}\delta_{i3} = ik(A + 3D)\delta_{i3} \quad (3.218)
\end{aligned}$$

3.10.1 Gauge transformation of scalar perturbations

次の式で定義される座標の無限小変換をゲージ変換とよぶ。

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu. \quad (3.219)$$

ここで ξ^μ は微少量である。摂動量のゲージ変換性をしらべる。簡単のため扱うモードの波数ベクトルが z 軸を向いているとする。ゲージ変換の内 $\xi^\mu = (\delta\tau, 0, 0, 0), (0, 0, 0, -i\delta x)$ はスカラーモードである。一方、 $\xi^\mu = (0, \delta x_1, \delta x_2, 0)$ はベクトルモードである。ゲージ変換にはテンソルモードは存在しない。スカラー、ベクトル、テンソルは独立なモードであり、スカラー摂動量は、ゲージ変換のスカラーモードにのみ、ベクトル摂動量は、ゲージ変換のベクトルモードにのみ影響を受ける。ゲージ変換のテンソルモードは存在しないため、摂動量のテンソルモードは、全てゲージ不変である。

摂動量を扱う上でゲージ変換性が重要である理由を説明する。例として密度揺らぎ $\delta\rho$ を取り上げる。密度 $\rho(t)$ で一様で膨張する宇宙を考える。ここで以下のようなゲージ変換を施す。

$$\tilde{t} = t + \xi^0(x^i)$$

即ち場所毎に時計を遅らせたり進ませたりする。この操作により密度分布が $\tilde{\rho}(\tilde{t}(x^i))$ に変化する。ゲージ変換後は、場所場所で時計が狂っているわけだが、狂った時計を持たされた人々は、自分の時計が正しいと過程して密度分布の測定を行う。彼らが $\tilde{t}(x^i) = t$ の同時刻で密度分布を測定したとしよう。すると密度分布は一様では無く、揺らぎが発生して見える。即ち、 $\tilde{t} = t$ と設定するという事は、狂う前の時計で $t - \xi^0$ の時刻での密度を狂った時計をもった観測者は時刻 t の密度と取る事になる。

$$\tilde{\rho}(\tilde{t}(x^i) = t) = \rho(t - \xi^0(x^i)) \sim \rho(t) - \xi^0(x^i)\dot{\rho}(t). \quad (3.220)$$

ここで宇宙膨張に密度は減少しているので $\dot{\rho} < 0$ 、したがって $\xi^0(x^i) > 0$ の時狂った時計を持たされた観測者は自分の場所の密度が平均密度 $\rho(t)$ より大きいと観測する。即ち、正の密度揺らぎが存在するという測定結果をだす。このように場所によって時計の狂いがまちまちであるだけで本来密度揺らぎが存在しないのを見かけ上密度揺らぎが存在するように観測されています。このように結果が観測者即ち座標系に依存しないようにするためにゲージ変換に対して不変な量を定義し、扱うひつようがある。発生した

見かけの密度揺らぎが $-\xi^0 \dot{\rho}$ になるのは、物理的にも明らかである。膨張による密度の減少率は $\dot{\rho}$ である。ゲージ変換によって $\tilde{t} = t + \xi^0$ とすることは、時計を ξ^0 だけ進めるということであり、新しい時計では時刻 t は以前の時計の $t - \xi^0$ を指す事になる。従って、密度は ξ^0 だけ前の密度を指す事になり、その間に宇宙膨張で減少した $-\xi^0 \dot{\rho}$ だけ高い密度になり、これが見かけの密度揺らぎとなる。ここで以下で定義される差分を Lie 微分と呼ぶ。

$$\delta^L \rho = \tilde{\rho}(t) - \rho(t) \quad (3.221)$$

即ち Lie 微分は、ゲージ変換で発生する見かけの物理量の揺らぎである。

以下ではエネルギー運動量テンソルやメトリックテンソルのゲージ変換性を扱うのでまずは一般の二階のテンソル $B_{\mu\nu}$ のゲージ変換性を求める公式を導く。ゲージ変換 $\tilde{x}^\sigma = x^\sigma + \xi^\sigma$ によって $\tilde{B}_{\mu\nu}$ に変換されたとする。二階の共変テンソルの変換性から以下の式を得る。

$$\tilde{B}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\sigma) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} B_{\alpha\beta}(x^\sigma) \quad (3.222)$$

ゲージ変換の定義式から以下の式を得る。

$$\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\alpha + \partial_\mu \xi^\alpha \quad (3.223)$$

$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}$ は $\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}$ の逆行列である。従って

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} = (1 - \partial_\mu \xi^\mu) \begin{pmatrix} 1 + \partial_i \xi^i & -\partial_0 \xi^1 & -\partial_0 \xi^2 & -\partial_0 \xi^3 \\ -\partial_1 \xi^0 & 1 + \partial_0 \xi^0 + \partial_2 \xi^2 + \partial_3 \xi^3 & -\partial_1 \xi^2 & -\partial_1 \xi^3 \\ -\partial_2 \xi^0 & -\partial_2 \xi^1 & 1 + \partial_0 \xi^0 + \partial_1 \xi^1 + \partial_3 \xi^3 & -\partial_2 \xi^3 \\ -\partial_3 \xi^0 & -\partial_3 \xi^1 & -\partial_3 \xi^2 & 1 + \partial_0 \xi^0 + \partial_1 \xi^1 + \partial_2 \xi^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \partial_0 \xi^0 & -\partial_0 \xi^1 & -\partial_0 \xi^2 & -\partial_0 \xi^3 \\ -\partial_1 \xi^0 & 1 - \partial_1 \xi^1 & -\partial_1 \xi^2 & -\partial_1 \xi^3 \\ -\partial_2 \xi^0 & -\partial_2 \xi^1 & 1 - \partial_2 \xi^2 & -\partial_2 \xi^3 \\ -\partial_3 \xi^0 & -\partial_3 \xi^1 & -\partial_3 \xi^2 & 1 - \partial_3 \xi^3 \end{pmatrix}$$

であり、

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} = \delta_\mu^\alpha - \partial_\mu \xi^\alpha \quad (3.224)$$

である。以上から二階のテンソルの Lie 微分は以下ようになる。

$$\delta^L B_{\mu\nu}(x^\sigma) = \tilde{B}_{\mu\nu}(x^\sigma) - B_{\mu\nu}(x^\sigma) \quad (3.225)$$

$$= -\xi^\sigma \partial_\sigma B_{\mu\nu}(x^\sigma) - \partial_\mu \xi^\alpha B_{\alpha\nu}(x^\sigma) - \partial_\nu \xi^\beta B_{\mu\beta}(x^\sigma) \quad (3.226)$$

以下では、スカラー摂動量のゲージ変換性を調べる。ゲージ変換のスカラーモードのみ扱う。即ち、 $\xi^\mu = (\delta\tau, 0, 0, -i\delta x)$ である。まずメトリックテンソルのスカラー摂動の変換性を成分毎に調べる。

g_{00}

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{00} &= g_{00} - \partial_0 \xi^\beta g_{0\beta} - \partial_0 \xi^\alpha g_{0\alpha} - \xi^\sigma \partial_\sigma g_{00} \\ &= -a^2(1+2A) + 2\delta\tau' a^2(1+2A) + 2i\delta x' a^2(-B_3) + \delta\tau(a^2(1+2A))' - i\delta x(a^2(1+2A))_{,3} \end{aligned}$$

$$\tilde{A} = A - \delta\tau' - \frac{a'}{a} \delta\tau = A - \delta\tau' - aH\delta\tau \quad (3.227)$$

ここで ∂_0 は τ での微分でありプライムで表した、 $_{,3}$ は x_3 での偏微分を表す。最後の等号では、 $\partial_0 a = a^2 H$ を用いた。

g_{0i}

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{03} &= g_{03} - \partial_0 \xi^\beta g_{3\beta} - \partial_3 \xi^\alpha g_{0\alpha} - \xi^\sigma \partial_\sigma g_{03} \\ &= g_{03} - \partial_0 \xi^3 g_{33} - \partial_3 \xi^0 g_{00} \\ \tilde{B} &= B + \delta x' + k\delta\tau \end{aligned} \quad (3.228)$$

ここで $\partial_3 \delta \tau = ik \delta \tau$ を使った。

g_{ij}

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij} &= g_{ij} - \partial_i \xi^\beta g_{j\beta} - \partial_j \xi^\alpha g_{i\alpha} - \xi^\sigma \partial_\sigma g_{ij} \\ &= g_{ij} - \partial_i \xi^k g_{jk} - \partial_j \xi^k g_{ik} - \xi^0 \partial_0 g_{ij}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^2[(1+2\tilde{D})\delta_{ij} + 2\tilde{E}_{ij}] &= a^2[(1+2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}] \\ &\quad - \partial_i(-i\delta x)a^2\delta_{j3} - \partial_j(-i\delta x)a^2\delta_{i3} - \delta\tau 2aa'\delta_{ij} \\ &= a^2[(1+2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}] \\ &\quad - k\delta xa^2\delta_{i3}\delta_{j3} - k\delta xa^2\delta_{j3}\delta_{i3} - \delta\tau 2aa'\delta_{ij}\end{aligned}$$

$$\tilde{E} = E + k\delta x \quad (3.229)$$

$$\tilde{D} = D - \frac{k}{3}\delta x - aH\delta\tau \quad (3.230)$$

次にエネルギー運動量テンソルのゲージ変換性を調べる。

T_{00}

$$2\tilde{A}\rho_0 + \delta\tilde{\rho} = 2A\rho_0 + \delta\rho - 2\delta\tau'\rho_0 - 2\delta\tau aH\rho_0 - \delta\tau\rho'_0$$

$$\delta\tilde{\rho} = \delta\rho - \rho'_0\delta\tau \quad (3.231)$$

T_{0i}

$$-a^2(\rho_0 + P_0)(\tilde{v}_3 - \tilde{B}_3) - a^2 P_0 \tilde{B}_3 = -a^2(\rho_0 + P_0)(v_3 - B_3) - a^2 P_0 B_3 - \delta x'_3 a^2 P_0 - \delta\tau_{,3} a^2 \rho_0$$

$$\tilde{V} = V + \delta x' \quad (3.232)$$

ゲージ変換の定義から \tilde{x} 系の原点 $\tilde{x} = 0$ は $x = -\xi^3$ であり、 x 系に対して速度 $-\xi^{3'}$ で運動していることになる。速度のスカラーモードは、相對運動の方向と一致しており、速度のスカラーモードのゲージ変換の変換式は、相對速度 $-\xi^{3'}$ で運動する座標系に移ったときの速度の変換則そのものになっている。

T_{ij}

$$a^2(P_0\delta_{ij} + (2\tilde{D}P_0 + \delta\tilde{P})\delta_{ij} + 2P_0\tilde{E}_{ij} + \tilde{\Sigma}_{ij}) = a^2(P_0\delta_{ij} + (2DP_0 + \delta P)\delta_{ij} + 2P_0E_{ij} + \Sigma_{ij}) \\ - \partial_i \xi^k a^2 P_0 \delta_{kj} - \partial_j \xi^k a^2 P_0 \delta_{ik} - \xi^0 (2aa'P_0 + a^2P_0')\delta_{ij}$$

$$(2\tilde{D}P_0 + \delta\tilde{P})\delta_{ij} + 2P_0\tilde{E}_{ij} + \tilde{\Sigma}_{ij} = (2DP_0 + \delta P)\delta_{ij} + 2P_0E_{ij} + \Sigma_{ij} \\ - k\delta_x P_0 \delta_i^3 \delta_{kj}^3 - k\delta_x P_0 \delta_j^3 \delta_{ik}^3 - \delta\tau(2aHP_0 + P_0')\delta_{ij}$$

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma \quad (3.233)$$

$$\delta\tilde{P} = \delta P - \delta\tau P_0' \quad (3.234)$$

$\delta\phi$

$\rho = 1/2\dot{\phi}^2 + V = 1/2a^2\phi'^2 + V$ および $P = 1/2\dot{\phi}^2 - V = 1/2a^2\phi'^2 - V$ と置き $\phi = \phi_0 + \delta\phi$ を代入して微少量の一次までとり $\delta\rho$ と δP のゲージ変換性を用いると次の式を得る。ここでスカラー場のエネルギーにはスカラー場の空間微分の二乗の項が含まれているが、スカラー場のゼロ次項は空間的に一様なのでこの項は微少量の二次からしか寄与しない。その為この項の存在を無視して扱った。

$$\delta\tilde{\phi} = \delta\phi - \phi_0'\delta\tau \quad (3.235)$$

波数 k の揺らぎの存在に起因する空間局率の摂動を $R_k^{(3)}$ と書くと、定義に従って計算することで次の結果を得る。

$$R_k^{(3)} = \frac{4k^2}{a^2} \left(D + \frac{E}{3} \right) \quad (3.236)$$

以下では

$$\varphi \equiv D + \frac{1}{3}E \quad (3.237)$$

と置く。この量のゲージ変換性は次のようになる。

$$\tilde{\varphi} = \varphi - aH\delta\tau \quad (3.238)$$

3.10.2 Gauge invariant variables

スカラー摂動量のゲージ不変変数の組み合わせをまとめる。

Bardeen variable ζ

$$\zeta \equiv \varphi + \frac{1}{3} \frac{\delta\rho}{\rho_0 + P_0} \quad (3.239)$$

ここでエネルギー保存則 $\rho'_0 = -3aH(\rho_0 + P_0)$ を用いた。

Entropy perturbation ΔP

$$\Delta P \equiv \delta P - \frac{P'_0}{\rho'_0} \delta\rho \quad (3.240)$$

これがエントロピー摂動と呼ばれる理由を説明する。考えている物質が状態方程式 $P = P(\rho)$ を満たすとする。密度と圧力を断熱的に変化させた時

$$\dot{P} = \frac{dP}{d\rho} \dot{\rho}$$

となる。これを用いてエントロピー摂動は以下のように書ける。

$$\Delta P = \left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - \frac{dP}{d\rho} \right) \delta\rho \quad (3.241)$$

従って、扱っている摂動が断熱的であれば、 $\frac{\delta P}{\delta\rho} = \frac{dP}{d\rho}$ であれば $\Delta P = 0$ である。一方 $\Delta P \neq 0$ の時は、摂動はエントロピー一定を保たずに与えられたことになる。即ちエントロピーに摂動が与えられたことになる。

Velocity perturbation V_s

$$V_s \equiv V - \frac{E'}{k} \quad (3.242)$$

Scalar field perturbation $\Delta\phi$

$$\Delta\phi \equiv \delta\phi + \frac{1}{k} \left(B - \frac{E'}{k} \right) \phi'_0 \quad (3.243)$$

Sasaki-Mukhanov variable Q

$$Q \equiv \delta\phi - \frac{\phi'_0}{aH} \varphi = \delta\phi - \frac{\dot{\phi}_0}{H} \varphi \quad (3.244)$$

3.10.3 良く扱われるゲージ

以下では、時間軸を *threading* と呼び、時間一定面を *slicing* と呼ぶ。

Conformal Newtonian gauge

$$ds^2 = a^2[-(1+2\Psi_N)d\tau^2 + (1-2\Phi_N)\delta_{ij}dx^i dx^j] \quad (3.245)$$

即ち

$$A_N \equiv \Psi_N \quad (3.246)$$

$$D_N \equiv -\Phi_N \quad (3.247)$$

$$B_N = E_N = 0 \quad (3.248)$$

$$R_{kN}^{(3)} = -4 \frac{k^2}{a^2} \Phi_N \quad (3.249)$$

このゲージでは、*slicing* と *threading* が直行している。

Spatially flat gauge (*slicing*) $D = E = 0$

この時 $\varphi = 0$ であり

$$Q = \delta\phi \quad (3.250)$$

メトリックテンソルは以下ようになる。

$$ds^2 = a^2[-(1+2A)d\tau^2 - 2B_i d\tau dx^i + \delta_{ij} dx^i dx^j] \quad (3.251)$$

よって

$$\begin{aligned} g_{00} &= -a^2(1+2A) & g_{0i} &= -a^2 B_i & g_{ij} &= a^2 \delta_{ij} \\ g^{00} &= -\frac{1}{a^2}(1-2A) & g^{0i} &= -\frac{B_i}{a^2} & g^{ij} &= \frac{1}{a^2} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.252)$$

Total matter gauge $\delta\phi = 0$

Conformal Newtonian gauge から出発し、scalar 場の comoving gauge に移行する過程を考える。Threading を Conformal Newtonian gauge のまま保存して、slicing を調整して thread のむきがスカラー場の運動方向と一致させる座標系に変形する。シフトベクトルが有限値をとる場合の流体の速度は式 (3.67) より、 $v_i = B_i$ である。したがって、conformal Newtonian gauge から $V_N - B_{TM} = 0$ となるように以下のゲージ変換を施せば良い。

$$\delta x = 0 \quad (3.253)$$

$$\delta\tau = \frac{V_N}{k} \quad (3.254)$$

この結果 total matter gauge ではメトリックは以下ようになる。

$$\Psi_{TM} = \Psi_N - \frac{V_N'}{k} - aH \frac{V_N}{k} \quad (3.255)$$

$$B_{TM} = V_N \quad (3.256)$$

$$D_{TM} = -\Phi_N - aH \frac{V_N}{k} \quad (3.257)$$

$$E_{TM} = 0 \quad (3.258)$$

当然だがゲージ不変な変数はこのゲージ変換前後で関数系を変えない。物質のストレステンソルがこのゲージ変換でどのように変換されるか調べる。

$$V_{TM} = V_N \quad (3.259)$$

$$\delta\rho_{TM} = \delta\rho_N - \rho_0' \frac{V_N}{k} \quad (3.260)$$

$$\delta P_{TM} = \delta P_N - P_0' \frac{V_N}{k} \quad (3.261)$$

スカラー場の場合に適応してみる。特にスカラー場の場合 Newtonian gauge では、

$$\begin{aligned} V_N &= i \frac{T_3^0}{\rho + P} = -i \frac{1}{a} \frac{\partial_3 \delta\phi}{\dot{\phi}_0} \\ &= \frac{1}{a} \frac{k\delta\phi}{\dot{\phi}} = \frac{k\delta\phi}{\phi'} \end{aligned} \quad (3.262)$$

である。ここで $v_3 = -iV_N$ を使った。これからゲージ変換 (3.254) は以下の

ようになる。

$$\delta x = 0 \quad (3.263)$$

$$\delta \tau = \frac{\delta \phi}{\dot{\phi}'} \quad (3.264)$$

この式をスカラー場のゲージ変換則 (3.235) に代入すると

$$\delta \phi_{TM} = 0 \quad (3.265)$$

となる。スカラー場の速度が、スカラー場の揺らぎの勾配に比例するので、スカラー場の速度がゼロになるようなゲージに移るという事は、 $\partial_i \delta \phi_{TM} = 0$ つまりスカラー場の揺らぎが空間的に一様となるゲージを選んだことになる。空間的な凸凹成分を揺らぎと定義しているの、このゲージでは $\delta \phi_{TM} = 0$ となるのは当然である。このゲージでは、

$$Q = -\frac{\dot{\phi}_0}{H} \varphi_{TM} \quad (3.266)$$

となる。以上から Spatially flat ゲージでのスカラー場の揺らぎ $\delta \phi_{SPF}$ と TM ゲージでの空間曲率の揺らぎ φ_{TM} の間に次の関係がある事がわかる。

$$\varphi_{TM} = -H \frac{\delta \phi_{SPF}}{\dot{\phi}_0} = \frac{\dot{a} \delta t}{a} \quad (3.267)$$

ここで $\delta t = -\delta \phi_{SPF} / \dot{\phi}_0$ である。インフレーション中はスカラー場 ϕ の値が幾らであるかが時計代わりとして使える。TM ゲージに設定するとは、 ϕ の値が同じになるように各場所の時計の進み具合を調整するように取りなさいという意味である。これは TM ゲージとは、 $\delta \phi = 0$ となるように選択したゲージであるという定義の別の言い方であることは自明と思われる。Spatially flat ゲージにおいて、正のスカラー場の揺らぎ $\delta \phi$ が存在する場所を考える。Spatially flat ゲージに於いて、0 次解通りに時計が進行する場所と比べて時計の遅れ δt は負である。つまり時計は進んでいる事になる。Spatially flat ゲージでは by definition で空間曲率はゼロである。TM ゲージに移るとこの δt 間の宇宙膨張 $\Delta a = \dot{a} \delta t$ だけ揺らぎが存在した場所は宇宙の半径が大きくなっている。ここで $\delta t < 0$ に注意すると $\Delta a < 0$ であり、宇宙の半径は $|\Delta a|$ だけ小さくなっている。つまり TM ゲージでは、正の揺

らぎが存在する場所では、宇宙の半径が平均的な場所が達する予定の a よりまだ $|\Delta a|$ だけ小さい内に同じ時刻になってしまうのである。その結果、TM ゲージでは空間曲率 $\Delta a/a$ が発生する。

3.10.4 佐々木ームハノフ変数の発展方程式

Spatially flat gauge では、ゲージ不変量即ち佐々木ームハノフ変数 Q が、スカラー場の揺らぎのみとなる。従って、spatially flat ゲージでのスカラー場の揺らぎの発展方程式を求めれば、それが佐々木ームハノフ変数の発展方程式となる。そこで以下 spatially flat ゲージでのスカラー場の揺らぎの発展方程式を求める。エネルギー運動量保存則からスカラー場の揺らぎの発展方程式を導く。

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\beta}^\mu T_\nu^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\beta T_\beta^\mu = 0 \quad (3.268)$$

$$T_\nu^\mu = g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \phi \partial_\nu \phi + \delta_\nu^\mu \left(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V \right) \quad (3.269)$$

を用いる。エネルギー運動量テンソルの各成分を求める。

$$T_0^0 = - \left[\frac{1}{2a^2} \phi_0'^2 + V(\phi_0) - \frac{A}{a^2} \phi_0'^2 + \frac{\phi_0'}{a^2} \delta\phi' + V' \delta\phi \right] \quad (3.270)$$

$$T_i^0 = -\frac{1}{a^2} \phi_0' \partial_i \delta\phi = -ik \frac{1}{a^2} \phi_0' \delta\phi \delta_{i3} \quad (3.271)$$

$$T_0^i = -\frac{B_i}{a^2} \phi_0'^2 + \frac{1}{a^2} \phi_0' \partial_i \delta\phi = \frac{i}{a^2} (B\phi_0'^2 + k\phi_0' \delta\phi) \delta_{i3} \quad (3.272)$$

$$T_j^i = \delta_j^i \left(\frac{\phi_0'^2}{2a^2} - V(\phi_0) + \frac{\phi_0'}{a^2} \delta\phi' - \frac{A}{a^2} \phi_0'^2 - V' \delta\phi \right) \quad (3.273)$$

したがって

$$\delta\rho_\phi = -\frac{A}{a^2} \phi_0'^2 + \frac{\phi_0'}{a^2} \delta\phi' + V' \delta\phi \quad (3.274)$$

$$\delta P_\phi = \frac{\phi_0'}{a^2} \delta\phi' - \frac{A}{a^2} \phi_0'^2 - V' \delta\phi \quad (3.275)$$

保存則の第ゼロ成分は次のようになる。

$$(T_0^0)' + \partial_i T_0^i + \Gamma_{0\mu}^\mu T_0^0 + \Gamma_{i\mu}^\mu T_0^i - \Gamma_{00}^0 T_0^0 - \Gamma_{0i}^0 T_0^i - \Gamma_{00}^i T_i^0 - \Gamma_{0j}^i T_i^j = 0$$

$$0 = -(\rho_0 + \delta\rho)' - \frac{k}{a^2}(B\phi_0'^2 + k\phi_0'\delta\phi) - (4\frac{a'}{a} + A')(\rho_0 + \delta\rho) \\ + (\frac{a'}{a} + A')(\rho_0 + \delta\rho) - 3\frac{a'}{a}(P_0 + \delta P)$$

摂動一次量の満たす方程式は以下のようになる。

$$0 = -\delta\rho' - \frac{k}{a^2}(B\phi_0'^2 + k\phi_0'\delta\phi) - 3\frac{a'}{a}(\delta\rho + \delta P)$$

ここで

$$\delta\rho' = -\frac{A'}{a^2}\phi_0'^2 - \frac{2A}{a^2}\phi_0''\phi_0' + \frac{2a'}{a^3}A\phi_0'^2 \\ + \frac{\phi_0''}{a^2}\delta\phi' + \frac{\phi_0'}{a^2}\delta\phi'' - \frac{2a'}{a^3}\phi_0'\delta\phi' \\ + V''\phi_0'\delta\phi + V'\delta\phi'$$

ゼロ次解が満たす方程式は以下のように求まる。

$$\phi_0'' + 2aH\phi_0' + a^2V' = 0 \quad (3.276)$$

以上より

$$0 = \delta\phi'' + 2aH\delta\phi' + (a^2V'' + k^2)\delta\phi \\ - A'\phi_0' + 2a^2AV' + kB\phi_0' \quad (3.277)$$

次にアインシュタイン方程式から spatially flat gauge でのメトリックのスカラ成分の満たす方程式を導出する。エネルギー運動量テンソルの縮約を求める。

$$T = T_{\mu}^{\mu} = -\rho_0 + 3P_0 - \delta\rho + 3\delta P$$

リッチテンソルをクリストッフエルから計算する公式を挙げておく。

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma}$$

R_{00}

$$R_{00} = \Gamma_{00,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{0\alpha,0}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\sigma}^{\alpha}\Gamma_{00}^{\sigma} - \Gamma_{0\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 0}^{\sigma} \\ = \left(\frac{a'}{a} + A'\right)' + i\partial_3 \left(\frac{a'}{a}B + B' + kA\right) - \left(4\frac{a'}{a} + A'\right)'$$

$$\begin{aligned}
& + \left(4\frac{a'}{a} + A'\right) \left(\frac{a'}{a} + A'\right) + iA_{,3} \left(\frac{a'}{a}B + B' + kA\right) \\
& - \left(\frac{a'}{a} + A'\right)^2 - \left(\frac{a'}{a}\delta_{ij}\right)^2 \\
& = -3\frac{a''}{a} + 3\frac{a'^2}{a^2} \\
& \quad + 3aHA' - k^2A - kaHB - kB'
\end{aligned} \tag{3.278}$$

アインシュタイン方程式の右辺を求める。

$$\begin{aligned}
T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00} &= g_{0\mu}T_0^\mu - \frac{1}{2}Tg_{00} \\
&= -a^2(1+2A)(-\rho_0 - \delta\rho) \\
&\quad + \frac{1}{2}a^2(1+2A)(-\rho_0 - \delta\rho + 3P_0 + 3\delta P) \\
&= \frac{a^2}{2}(\rho_0 + 3P_0) + \frac{a^2}{2}(\delta\rho + 3\delta P) + a^2A(\rho_0 + 3P_0) \\
&= \frac{a^2}{2}(\rho_0 + 3P_0) + 2\phi'_0\delta\phi' - a^2V'\delta\phi - 2a^2VA
\end{aligned} \tag{3.279}$$

アインシュタイン方程式の 00 成分から以下の方程式を得る。ゼロ次

$$-3\frac{a''}{a} + 3\frac{a'^2}{a^2} = \frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2} \frac{a^2}{2}(\rho_0 + 3P_0) \tag{3.280}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho_0 + 3P_0) \tag{3.281}$$

一次

$$\begin{aligned}
& 3aHA' - k^2A - kaHB - kB' \\
& = \frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2}(2\phi'_0\delta\phi' - a^2V'\delta\phi - 2a^2VA)
\end{aligned} \tag{3.282}$$

R_{0i}

$$R_{0i} = \Gamma_{0i,\alpha}^\alpha - \Gamma_{0\alpha,i}^\alpha + \Gamma_{\alpha\sigma}^\alpha \Gamma_{0i}^\sigma - \Gamma_{i\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\sigma$$

$$= i\delta_{i3} \left[2k \frac{a'}{a} A + \frac{a''}{a} B + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 B \right] \quad (3.283)$$

$$\begin{aligned} T_{0i} - \frac{1}{2} T g_{i0} &= g_{00} T_i^0 + g_{0j} T_i^j - \frac{1}{2} T g_{0i} \\ &= -a^2 (1 + 2A) \left(-\frac{1}{a^2} ik \phi'_0 \delta\phi \delta_{i3} \right) - a^2 B_i P_0 + \frac{1}{2} a^2 B_i (-\rho_0 + P_0) \\ &= ik \phi'_0 \delta\phi \delta_{i3} + \frac{a^2}{2} B_i (-\rho_0 + P_0) \\ &= ik \phi'_0 \delta\phi \delta_{i3} - i \frac{a^2}{2} B (-\rho_0 + P_0) \delta_{i3} \\ &= ik \phi'_0 \delta\phi \delta_{i3} + ia^2 BV \delta_{i3} \end{aligned} \quad (3.284)$$

Spatially flat gauge では $D = E = 0$ であることを使って、アインシュタイン方程式から以下の式を得る。

$$2ik \frac{a'}{a} A + i \frac{a''}{a} B + i \left(\frac{a'}{a} \right)^2 B = \frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2} (ik \phi'_0 \delta\phi + ia^2 BV) \quad (3.285)$$

ここでアインシュタイン方程式の ij 成分のゼロ次で得られる次の方程式と

$$3 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 = \frac{a^2}{\tilde{M}_{pl}^2} \rho_0 \quad (3.286)$$

と式 (3.281) から次の式を得る。

$$\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 = \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2} (\rho_0 - P_0) = \frac{a^2}{\tilde{M}_{pl}^2} V \quad (3.287)$$

従って、03 のアインシュタイン方程式から導かれた摂動一次量の方程式の内、 B の係数はゼロ次のアインシュタイン方程式を満たすため消える。残る量は以下の式である。

$$2 \frac{a'}{a} A = \frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2} \phi'_0 \delta\phi \quad (3.288)$$

R_{ij}

$$R_{ij} = \Gamma_{ij,\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha,j}^\alpha + \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma \Gamma_{ij}^\sigma - \Gamma_{j\sigma}^\sigma \Gamma_{\alpha i}^\sigma$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma_{ij,0}^0 + \Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{i\alpha,j}^\alpha + \Gamma_{\alpha 0}^\alpha \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{\alpha k}^\alpha \Gamma_{ij}^k \\
&\quad - \Gamma_{j0}^0 \Gamma_{0i}^0 - \Gamma_{jk}^0 \Gamma_{0j}^k - \Gamma_{j0}^l \Gamma_{li}^0 - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{li}^k \\
&= \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) \delta_{ij} - 2A \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) \delta_{ij} - \frac{a'}{a} A' \delta_{ij} \\
&\quad + k^2 A \delta_{i3} \delta_{j3} + 2k \frac{a'}{a} B \delta_{i3} \delta_{j3} + k \frac{a'}{a} B \delta_{ij} + kB' \delta_{i3} \delta_{j3} \quad (3.290)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{ij} - \frac{1}{2} T g_{ij} &= g_{i\mu} T_j^\mu - \frac{1}{2} T g_{ij} \\
&= a^2 (P_0 + \delta P) \delta_{ij} \\
&\quad - \frac{a^2}{2} (-\rho_0 + 3P_0 - \delta\rho + 3\delta P) \delta_{ij} \\
&= \frac{a^2}{2} (\rho_0 - P_0) \delta_{ij} + a^2 V' \delta\phi \delta_{ij} \quad (3.291)
\end{aligned}$$

よってゼロ次

$$\left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) = \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2} (\rho_0 - P_0) \quad (3.292)$$

一次

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{\tilde{M}_{pl}^2} V' \delta\phi \delta_{ij} &= -2A \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) \delta_{ij} \\
&\quad - \frac{a'}{a} A' \delta_{ij} + k^2 A \delta_{i3} \delta_{j3} \\
&\quad + 2k \frac{a'}{a} B \delta_{i3} \delta_{j3} + k \frac{a'}{a} B \delta_{ij} + kB' \delta_{i3} \delta_{j3} \quad (3.293)
\end{aligned}$$

トレースを取ると

$$\begin{aligned}
\frac{3a^2}{\tilde{M}_{pl}^2} V' \delta\phi &= -6 \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) A - 3 \frac{a'}{a} A' \\
&\quad + k^2 A + 5k \frac{a'}{a} B + kB' \quad (3.294)
\end{aligned}$$

以上の結果を $a' = a^2 H$, $a'' = 2a^3 H^2 + a^3 \dot{H}$ を用いて整理する。

$$\begin{aligned}\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 &= a^2(3H^2 + \dot{H}) \\ &= \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2}(\rho_0 - P_0) = \frac{a^2}{\tilde{M}_{pl}^2}V\end{aligned}\quad (3.295)$$

$$\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = a^2\frac{\ddot{a}}{a} = -a^2\frac{4\pi}{3}G(\rho_0 + 3P_0)\quad (3.296)$$

上の式から下の式を引くと

$$H^2 = \frac{1}{3\tilde{M}_{pl}^2}\rho_0 = \frac{1}{3\tilde{M}_{pl}^2}\left(\frac{1}{2a^2}\phi_0'^2 + V\right)\quad (3.297)$$

(3.295) より

$$3H^2 + \dot{H} = \frac{V}{\tilde{M}_{pl}^2}\quad (3.298)$$

(3.295) と (3.298) より

$$\dot{H} = -\frac{1}{2a^2}\frac{\phi_0'^2}{\tilde{M}_{pl}^2}\quad (3.299)$$

この式を conformal time で微分すると

$$\begin{aligned}\dot{\dot{H}} &= -\frac{\phi_0''\phi_0'}{a^3\tilde{M}_{pl}^2} + \frac{H}{a^2}\frac{\phi_0'^2}{\tilde{M}_{pl}^2} \\ &= \frac{2\phi_0''}{a\phi_0'}\dot{H} - 2H\dot{H}\end{aligned}\quad (3.300)$$

スカラー場のゼロ次満たす方程式から

$$V' = -\frac{1}{a^2}(\phi_0'' + 2aH\phi_0')\quad (3.301)$$

一次の摂動量の方程式

$$\begin{aligned}3\frac{H}{a}A' - \left(\frac{k}{a}\right)^2 A - \frac{k}{a}HB - \frac{k}{a^2}B' \\ = \frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2}\left(\frac{2\phi_0'\delta\phi'}{a^2} - V'\delta\phi - 2VA\right)\end{aligned}\quad (3.302)$$

$$2HA = \frac{1}{a\tilde{M}_{pl}^2} \phi'_0 \delta\phi \quad (3.303)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{\tilde{M}_{pl}^2} V' \delta\phi &= -6(3H^2 + \dot{H})A - 3\frac{H}{a}A' \\ &+ \left(\frac{k}{a}\right)^2 A + 5\frac{k}{a}HB + \frac{k}{a^2}B' \end{aligned} \quad (3.304)$$

$$\begin{aligned} \delta\phi'' + 2aH\delta\phi' + (a^2V'' + k^2)\delta\phi \\ - A'\phi'_0 + 2a^2AV' + kB\phi'_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.305)$$

ここまでで得られた結果を用いてゲージ不変なスカラー場の揺らぎ即ち佐々木-ムハノフ変数の発展方程式を導く。(3.299)より

$$A = \frac{1}{2\tilde{M}_{pl}^2} \frac{1}{aH} \phi'_0 \delta\phi = -a \frac{\dot{H}}{H} \frac{\delta\phi}{\phi'_0} \quad (3.306)$$

(3.302) と (3.304) を足すと

$$\frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2} \left(\frac{\phi'_0 \delta\phi'}{a^2} + V' \delta\phi - VA \right) = -3(3H^2 + \dot{H})A + 2\frac{k}{a}HB$$

左辺第一項は (3.299) より

$$\frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2} \frac{\phi'_0 \delta\phi'}{a^2} = \frac{\phi_0'^2}{2a^2 \tilde{M}_{pl}^2} 2\delta\phi' = -2\dot{H} \frac{\delta\phi'}{\phi'_0}$$

(3.298) の両辺を conformal time で微分すると

$$\frac{V'}{\tilde{M}_{pl}^2} \phi'_0 = 6aH\dot{H} + a\ddot{H} \quad (3.307)$$

これを左辺第二項に用いる。左辺第三項は式 (3.298) より

$$-\frac{V}{\tilde{M}_{pl}^2} A = -(3H^2 + \dot{H})A$$

以上を代入すると以下の式を得る。

$$2\frac{k}{a}HB = -2\dot{H} \frac{\delta\phi'}{\phi'_0} + (6aH\dot{H} + a\ddot{H}) \frac{\delta\phi}{\phi'_0}$$

$$+2(3H^2 + \dot{H})A$$

さらに (3.306) を代入すると

$$2\frac{k}{a}HB = -2\dot{H}\frac{\delta\phi'}{\phi'_0} + a\ddot{H}\frac{\delta\phi}{\phi'_0} - 2a\frac{\dot{H}^2}{H}\frac{\delta\phi}{\phi'_0}$$

したがって

$$\frac{k}{a}B = -\frac{\dot{H}}{H}\frac{\delta\phi'}{\phi'_0} + a\frac{\delta\phi}{\phi'_0}\left(\frac{\ddot{H}}{2H} - \frac{\dot{H}^2}{H^2}\right) \quad (3.308)$$

スカラー場の揺らぎの発展方程式を次のように整理する。

$$\begin{aligned} \delta\phi'' + 2aH\delta\phi' + (a^2V'' + k^2)\delta\phi \\ = A'\phi'_0 - 2a^2AV' - kB\phi'_0 \end{aligned} \quad (3.309)$$

式 (3.306) の両辺を conformal time で微分する。

$$\begin{aligned} A' &= -a\frac{\dot{H}}{H\phi'_0}\delta\phi' + a\frac{\dot{H}}{H}\frac{\phi''_0}{\phi_0^2}\delta\phi \\ &+ a^2\frac{\dot{H}^2}{H^2\phi'_0}\delta\phi - a^2\frac{\ddot{H}}{H\phi'_0}\delta\phi - a^2\frac{\dot{H}}{\phi'_0}\delta\phi \end{aligned} \quad (3.310)$$

式 (3.309) の右辺は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} (r.h.s.) &= \phi'_0\left[-a\frac{\dot{H}}{H\phi'_0}\delta\phi' + a\frac{\dot{H}}{H}\frac{\phi''_0}{\phi_0^2}\delta\phi\right. \\ &+ a^2\frac{\dot{H}^2}{H^2\phi'_0}\delta\phi - a^2\frac{\ddot{H}}{H\phi'_0}\delta\phi - a^2\frac{\dot{H}}{\phi'_0}\delta\phi] \\ &- 2a^2\left(-a\frac{\dot{H}}{H\phi'_0}\right)\left(-\frac{1}{a^2}(\phi''_0 + 2aH\phi'_0)\right)\delta\phi \\ &- a\phi'_0\left(-\frac{\dot{H}}{H}\frac{\delta\phi'}{\phi'_0} + a\frac{\delta\phi}{\phi'_0}\left(\frac{\ddot{H}}{2H} - \frac{\dot{H}^2}{H^2}\right)\right) \\ &= a^2\left[-\frac{\dot{H}}{aH}\frac{\phi''_0}{\phi'_0} + 2\frac{\dot{H}^2}{H^2} - \frac{3\dot{H}}{2H} - 5\dot{H}\right]\delta\phi \end{aligned}$$

式 (3.300) を用いると

$$(r.h.s.) = -2a^2\left(3\dot{H} - \frac{\dot{H}^2}{H^2} + \frac{\ddot{H}}{H}\right)\delta\phi \quad (3.311)$$

となる。以上からゲージ不変なスカラー場の揺らぎの発展方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \delta\phi'' + 2aH\delta\phi' + k^2\delta\phi \\ & + a^2 \left(V'' + 2 \left(3\dot{H} - \frac{\dot{H}^2}{H^2} + \frac{\ddot{H}}{H} \right) \right) \delta\phi = 0 \end{aligned} \quad (3.312)$$

最後の項は Klein-Golden 方程式の mass term に相当するので

$$m^2 \equiv V'' + 2 \left(3\dot{H} - \frac{\dot{H}^2}{H^2} + \frac{\ddot{H}}{H} \right) \quad (3.313)$$

とおく。ここで

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3 \dot{H}}{H} \right) &= a^3 \frac{\ddot{H}}{H} + 3a^2 \dot{a} \frac{\dot{H}}{H} - a^3 \frac{\dot{H}^2}{H^2} \\ &= a^3 \left(\frac{\ddot{H}}{H} + 3\dot{H} - \frac{\dot{H}^2}{H^2} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3 \dot{\phi}_0}{H} \right) &= -\frac{1}{2\tilde{M}_{pl}^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3 \dot{\phi}_0^2}{H} \right) \end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned} & \delta\phi'' + 2aH\delta\phi' \\ & + a^2 \left[\left(\frac{k}{a} \right)^2 + V'' - \frac{1}{a^3 \tilde{M}_{pl}^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3 \dot{\phi}_0^2}{H} \right) \right] \delta\phi = 0 \end{aligned} \quad (3.314)$$

Mass term を更に変形する。

$$\begin{aligned} V'' &= -\frac{d}{d\phi_0} \left[\frac{1}{a^2} (\phi_0'' + 2Ha\phi_0') \right] \\ &= -\frac{d\tau}{d\phi_0} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{a^2} (\phi_0'' + 2Ha\phi_0') \right] \\ &= -\frac{1}{a^2} \left[\frac{\phi_0'''}{\phi_0'} - 2H^2 a^2 + 2aH' \right] \\ m^2 &= \frac{1}{a^2} \left[-\frac{\phi_0'''}{\phi_0'} + 2H^2 a^2 - 2\frac{H'^2}{H^2} + 4\frac{H'}{H} \frac{\phi_0''}{\phi_0'} \right] \end{aligned} \quad (3.315)$$

更に $u = a\delta\phi$ とおいて以下の式を使って変数変換する。

$$\begin{aligned}
u' &= a^2 H \delta\phi + a \delta\phi' \\
u'' &= a \delta\phi'' + 2a^2 H \delta\phi' + (a^2 H' + 2a^3 H^2) \delta\phi \\
u'' - (a^2 H' + 2a^3 H^2) \delta\phi + a^3 \left(\frac{k}{a}\right)^2 \delta\phi \\
&+ a \left[-\frac{\phi_0'''}{\phi_0'} + 2H^2 a^2 - 2\frac{H'^2}{H^2} + 4\frac{H'}{H} \frac{\phi_0''}{\phi_0'} \right] \delta\phi = 0 \\
u'' + \left[k^2 - \frac{\phi_0'''}{\phi_0'} - aH' - 2\frac{H'^2}{H^2} + 4\frac{H'}{H} \frac{\phi_0''}{\phi_0'} \right] u &= 0
\end{aligned}$$

ここで

$$z \equiv \frac{\phi_0'}{H} \quad (3.316)$$

とおき

$$H'' = 2\frac{\phi_0''}{\phi_0'} H' - aHH' \quad (3.317)$$

$$\frac{1}{z} z'' = \frac{\phi_0'''}{\phi_0'} - 2\frac{H'}{H} \frac{\phi_0''}{\phi_0'} - \frac{H''}{H} + 2\frac{H'^2}{H^2} \quad (3.318)$$

を使って変形すると以下の式を得る。

$$u'' + \left[k^2 - \frac{1}{z} \frac{d^2 z}{d\tau^2} \right] u = 0 \quad (3.319)$$

Spatially flat ゲージでは $Q = \delta\phi$ であったので以下の式がゲージ不変量 $P \equiv aQ$ の満たす方程式である。

$$P'' + \left[k^2 - \frac{1}{z} \frac{d^2 z}{d\tau^2} \right] P = 0 \quad (3.320)$$

3.10.5 Power spectrum of scalar perturbation

スローロール近似の一次までで

$$\frac{1}{z} \frac{d^2 z}{d\tau^2} \sim \frac{2 - 3\eta + 9\epsilon}{\tau^2}$$

と書ける。従って、(3.320) は次数

$$\nu \sim \frac{3}{2} - \eta + 3\varepsilon \quad (3.321)$$

のベッセル方程式である。佐々木ームハノフ変数のパワースペクトルは以下のように書ける。

$$P_Q(k) = (2H)^{6\varepsilon-2\eta} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)}\right)^2 \left(\frac{k}{a}\right)^{-6\varepsilon+2\eta} \quad (3.322)$$

ここまでは計算をし易くする為に spatially flat ゲージで扱ってきた。しかし、実際の物理を見るには、 $Q = \varphi$ となる TM ゲージを扱うのが便利である。TM ゲージでの spatial curvature は spatially flat ゲージで求めたスカラー場の揺らぎと次の関係で結ばれる。

$$\varphi_{TM} = -\frac{H}{\dot{\phi}_0} \delta\phi_{SF} \quad (3.323)$$

従って空間曲率のパワースペクトルは次のように求まる。

$$P_\varphi(k) = (2H)^{6\varepsilon-2\eta} \left(\frac{H}{\dot{\phi}_0}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)}\right)^2 \left(\frac{k}{a}\right)^{-6\varepsilon+2\eta} \quad (3.324)$$

(3.133),(3.132),(3.130) 等を用いると以下のようなる。

$$P_\varphi(k) \sim \frac{1}{24\pi^2 \tilde{M}_{pl}^4} \frac{V}{\varepsilon} \left(\frac{k}{2aH}\right)^{-6\varepsilon+2\eta} \sim \frac{1}{2\tilde{M}_{pl}^2} \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \quad (3.325)$$

スペクトルインデックス n は以下のように求まる。

$$n-1 \equiv 2\eta - 6\varepsilon \quad (3.326)$$

この結果は、節 3.8.6 で物理的考察を用いて求めた結果が正しいことを保証している。

3.10.6 スーパーホライズンスケールのスカラー摂動の進化

インフレーション後の揺らぎの進化を扱うには、Conformal Newtonian ゲージが馴染みが深く物理的に扱い易い。そこで Conformal Newtonian ゲージでのスカラー摂動の進化の方程式を求める。メトリックは次のように書ける。

$$g_{00} = -a^2(1+2\Psi), \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = a^2(1-2\Phi)\delta_{ij}$$

$$g^{00} = -\frac{1}{a^2}(1-2\Psi), \quad g^{0i} = 0, \quad g^{ij} = \frac{1}{a^2}(1+2\Phi)\delta^{ij}$$

クリストッフエルの全ての成分をまとめる。

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,0} = \frac{a'}{a} + \Psi'$$

$$\Gamma_{i0}^0 = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,i} = \Psi_{,i} = ik\Psi\delta_{i3}$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(-g_{ij,0}) = \left(\frac{a'}{a}(1-2\Psi_N - 2\Phi_N) - \Phi'_N\right)\delta_{ij}$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}g^{ii}(-g_{00,i}) = \Psi_{,i} = ik\Psi\delta_{i3}$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2}g^{ii}g_{ij,0} = \left(\frac{a'}{a} - \Phi'\right)\delta_j^i$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{ii}(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i}) = -\Phi_{,k}\delta_{ij} - \Phi_{,j}\delta_{ik} + \Phi_{,i}\delta_{jk} = ik\Phi(-\delta_{k3}\delta_{ij} - \delta_{j3}\delta_{ik} + \delta_{i3}\delta_{jk})$$

$$\Gamma_{i0}^i = 3\left(\frac{a'}{a} - \Phi'\right)$$

$$\Gamma_{ji}^i = -3ik\Phi_N\delta_{j3}$$

$$\Gamma_{0\alpha}^\alpha = 4\frac{a'}{a} - 3\Phi'_N + \Psi'_N$$

$$\Gamma_{i\alpha}^\alpha = (-3ik\Phi_N + ik\Psi_N)\delta_{i3}$$

エネルギー運動量テンソルの各成分は次のように書ける。

$$T_0^0 = -\rho_0 - \delta\rho$$

$$T_i^0 = (\rho_0 + P_0)v_i$$

$$T_0^i = -(\rho_0 + P_0)v_i$$

$$T_j^i = (P_0 + \delta P)\delta_j^i + \Sigma_j^i$$

物質の状態方程式を

$$P_0 = w\rho_0 \tag{3.327}$$

で表す。また、density contrast を以下のように定義する。

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho_0} \tag{3.328}$$

エネルギー保存則 $\nabla_\mu T_0^\mu = 0$ より次の式を得る。

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_\mu T_0^\mu &= T_{0,0}^0 + \Gamma_{0\sigma}^0 T_0^\sigma - \Gamma_{00}^\sigma T_\sigma^0 + T_{0,i}^i + \Gamma_{i\sigma}^i T_0^\sigma - \Gamma_{i0}^\sigma T_\sigma^i \\ &= -\rho_0' - \delta\rho' - k(1+w)\rho_0 V_N - 3(aH - \Phi')\rho_0 - 3aH\delta\rho - 3(aH - \Phi')P_0 - 3aH\delta P \end{aligned}$$

ゼロ次

$$\rho_0' + 3aH(1+w)\rho_0 = 0 \quad (3.329)$$

一次

$$\delta\rho' + k(1+w)\rho_0 V_N - 3\Phi_N'(1+w)\rho_0 + 3aH(\delta\rho + \delta P) = 0 \quad (3.330)$$

$$\delta_N' + k(1+w)V_N - 3(1+w)\Phi_N' - 3aHw\delta_N + 3aH\frac{\delta P_N}{\rho_0} = 0 \quad (3.331)$$

この方程式は以下のような微小体積 V 内のエネルギー保存則からも導ける。
Conformal Newtonian ゲージでは

$$V = a^3(1 - 2\Phi_N)^{3/2}d^3x$$

である。体積の時間変化率は次の3つの項に分解される。宇宙膨張による寄与、つまりスケールファクターの時間微分から来る寄与。メトリックの揺らぎの時間変化による寄与、つまり Φ の時間変化による寄与。体積の境界が共動座標に対し相対運動を持つことによる寄与、つまり peculiar velocity の存在による寄与。最後の寄与は $div\vec{v}$ で表す事が出来る。エネルギー保存則は次のように書ける。

$$\frac{d(\rho_0 + \delta\rho)V}{dt} + (P_0 + \delta P)\frac{dV}{dt} = 0$$

上記のことを考慮すると

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = 3\frac{\dot{a}}{a} - 3\dot{\Phi} + div\vec{v}$$

となり、これを微小体積 V 内のエネルギー保存則に適応すると以下の式を得る。

$$\delta\dot{\rho} + 3H\delta\rho - 3\rho_0(1+w)\dot{\Phi} + kV_N(1+w)\rho_0 + 3H\delta P = 0$$

(3.332)

確かに (3.330) と一致する結果を得た。

次に運動量保存則を扱う。

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_0 T_i^0 + \nabla_j T_i^j = T_{i,0}^0 + \Gamma_{\sigma 0}^0 T_i^\sigma - \Gamma_{0i}^\sigma T_\sigma^0 \\
&\quad + T_{i,j}^j + \Gamma_{\sigma j}^j T_i^\sigma - \Gamma_{ji}^\sigma T_\sigma^j \\
&= ((\rho_0 + P_0)v_i)' + \delta P_{,i} + \Sigma_{i,j}^j + \frac{a'}{a}(\rho_0 + P_0)v_i + ik\Psi(\rho_0 + P_0)\delta_{i3} - \frac{a'}{a}(\rho_0 + P_0)v_i \\
&\quad + 3\frac{a'}{a}(\rho_0 + P_0)v_i\delta_{i3} - \frac{a'}{a}(\rho_0 + P_0)v_i
\end{aligned}$$

今スカラーモードにのみ興味があるので $i=3$ として以下の方程式を得る。

$$V_N' + aH(1-3w)V_N + \frac{w'}{1+w}V_N - k\Psi_N - \frac{k\delta P}{(1+w)\rho_0} + \frac{2}{3}\frac{k\Sigma}{(1+w)\rho_0} = 0 \quad (3.333)$$

次にアインシュタイン方程式からメトリックの揺らぎが満たす方程式を求める。エネルギー運動量テンソルのトレースを求める。

$$T = -\rho_0 - \delta\rho + 3P_0 + 3\delta P$$

$$R_{00} = -3\frac{a''}{a} + 3\left(\frac{a'}{a}\right)^2 - k^2\Psi_N + 3\Phi_N'' + 3aH(\Psi_N' + \Phi_N')$$

$$g_{00}(T_0^0 - \frac{1}{2}T) = \frac{a^2}{2}(\rho_0 + 3P_0 + \delta\rho + 3\delta P + 2\Psi(\rho_0 + 3P_0))$$

0次

$$\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = -\frac{a^2}{6\tilde{M}_{pl}^2}(\rho_0 + 3P_0) \quad (3.334)$$

一次

$$-k^2\Psi_N + 3\Phi_N'' + 3aH(\Psi_N' + \Phi_N') = \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2}(\delta\rho + 3\delta P + 2\Psi(\rho_0 + 3P_0)) \quad (3.335)$$

R_{ij}

$$R_{ij} = \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) \delta_{ij} - 2 \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) (\Psi_N + \Phi_N) \delta_{ij} \\ + k^2 (\Psi_N - \Phi_N) \delta_{i3} \delta_{j3} - k^2 \Phi_N \delta_{ij} - \Phi_N'' \delta_{ij} - \frac{a'}{a} (\Psi_N' + 5\Phi_N') \delta_{ij}$$

0次

$$\left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) = \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2} (\rho_0 - P_0) \quad (3.336)$$

一次 $i = j = 2$

$$-2 \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) (\Psi_N + \Phi_N) - k^2 \Phi_N - \Phi_N'' - \frac{a'}{a} (\Psi_N' + 5\Phi_N') \\ = \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2} (\delta\rho - \delta P + \frac{2}{3}\Sigma - 2\Phi(\rho_0 - P_0))$$

$i = j = 3$

$$k^2 (\Psi_N - \Phi_N) - 2 \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) (\Psi_N + \Phi_N) - k^2 \Phi_N - \Phi_N'' - \frac{a'}{a} (\Psi_N' + 5\Phi_N') \\ = \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2} (\delta\rho - \delta P - \frac{4}{3}\Sigma - 2\Phi(\rho_0 - P_0))$$

下の式から上の式を引くと

$$k^2 (\Psi_N - \Phi_N) = -\frac{a^2}{\tilde{M}_{pl}^2} \Sigma \quad (3.337)$$

よって、非等方ストレス Σ がゼロの時 $\Psi_N = \Phi_N$ となる。 R_{30}

$$2ik\Phi_N' + 2\frac{a'}{a} ik\Psi_N = \frac{1}{\tilde{M}_{pl}^2} (\rho_0 + P_0) a^2 iV \quad (3.338)$$

$$\Phi_N' + aH\Psi_N = \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2} \rho_0 (1+w) \frac{V}{k} \quad (3.339)$$

空間部の対角成分の和を取ると

$$-3k^2 \Phi_N + k^2 (\Psi_N - \Phi_N) - 3\Phi_N'' - 3aH(\Psi_N' + 5\Phi_N') \\ = \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2} [6(\rho_0 - P_0)\Psi_N + 3(\delta\rho - \delta P)]$$

これと (00) 成分の和をとり (30) 成分の結果を用いると以下の結果を得る。

$$k^2 \Phi_N = -\frac{a^2}{2\bar{M}_{pl}^2} \rho_0 \left[\delta_N + 3aH(1+w) \frac{V_N}{k} \right] \quad (3.340)$$

これで Bardeen 変数の満たす方程式を導く準備が整った。Bardeen 変数の conformal time での一階微分に (3.331) を代入する。ここで $w' = 0$ とする。以下非等方ストレスは無視出来るとする。

$$\zeta' = -\Phi'_N + \frac{\delta'_N}{3(1+w)} = -\frac{k}{3} V_N - \frac{aH}{1+w} \frac{\Delta P}{\rho_0}$$

インフレーション時に生成される揺らぎは主に断熱揺らぎであるので $\Delta P = 0$ とし、この式をさらに conformal time で微分し、(3.333) を代入すると

$$\zeta'' = -\frac{k}{3} \left[\frac{kw}{1+w} \left(\delta_N + 3aH(1+w) \frac{V_N}{k} \right) - aH V_N + k \Psi_N \right]$$

この式は (3.340) を用いると以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \zeta'' &= -\frac{k}{3} \left[k \frac{w}{1+w} \left(-\frac{2}{3} \frac{k^2}{a^2 H^2} \Phi_N \right) - aH V_N + k \Phi_N \right] \\ &= -aH \zeta' + \frac{1}{3} k^2 \Phi_N \left(-1 + \frac{2}{3} \frac{w}{1+w} \frac{k^2}{a^2 H^2} \right) \end{aligned} \quad (3.341)$$

この方程式のスーパーホライズン極限の解を求める。(3.340) は次のように書き換えられる。

$$\Phi_N = -\frac{3}{2} \left(\frac{aH}{k} \right)^2 \left[\delta_N + 3aH(1+w) \frac{V_N}{k} \right]$$

スーパーホライズン極限では $aH/k \gg 1$ なので、 $|\Phi_N| \gg |\delta_N|$ である。つまり Bardeen 変数は $\zeta \sim -\Phi_N$ である。したがって、Bardeen 変数が満たす方程式は次のようになる。

$$\ddot{\zeta} + 2H\dot{\zeta} = 0$$

宇宙膨張を支配する物質の状態方程式を $P_0 = w\rho_0$ とすると $H = 2/(3(1+w)t)$ となるので $\zeta = t^n$ を代入すると $n = 0, (3w-1)/3(1+w)$ の二つの解を得る。後者は $-1 < w < 1/3$ である限り減衰解である。前者は、一定値をもつ解である。したがって、ホライズンサイズより長い波長の揺らぎでは、

$\zeta \rightarrow \text{const.}$ となる。因果律が無いので、現状維持のまま変化出来ないと考えれば納得できる結果である。

3.10.7 CMB 観測との比較：スーパーホライズンスケール

CMB は、宇宙再結合期に物質の中性化が急激に進み、CMB 光子に対する光学的厚みが 1 を切った時期に発せられた電磁波である。これを最終散乱面 (last scattering surface) と呼ぶ。最終散乱面は、バリオンのイオン化率が約 0.01 になった頃である。COBE によってなされた宇宙最終散乱面 CMB においてスーパーホライズンスケールの温度異方性の観測との比較を行う。スーパーホライズンスケールでは、因果律が保てないため、音波のような振動モードは現れない。このスケールでの CMB の温度異方性は、以下の二つの効果の重ね合わせで現れる。インフレーション時に生成された密度揺らぎの主成分は、断熱的である。従って、物質密度が濃いところは、断熱条件を満たすように輻射密度も濃くなっている。このようにスーパーホライズンスケールであっても最終散乱面で既に CMB の温度揺らぎが刻印されている。これが物質から解放され観測者に届くまでには、インフレーション時にそこに刻まれた重力ポテンシャルを這い上がってくる（降りてくる）必要があり、これにより光子はエネルギーを失う（得る）。これを Sachs-Wolfe 効果と呼ぶ。この小節では、この効果の定量評価を行う為の準備を行い、観測との比較を行う。

Spatially flat ゲージで導出したインフレーション時に生成されたスカラー場の揺らぎが、TM ゲージに移行することで全て空間曲率の揺らぎに置き換える事ができる。Bardeen 変数はゲージ不変量なので、TM ゲージでもこの量はスーパーホライズンスケールで保存量となる。重力ポテンシャルだけは、Newtonian ゲージの量を引き続き使用し、TM ゲージの物理量へ変換する。以下、簡単のため TM ゲージの物理量を引数無しで表す。

$$\delta = \delta_N + 3aH(1+w) \frac{V_N}{k} \quad (3.342)$$

$$\delta P = \delta P_N + 3aHw(1+w)\rho_0 \frac{V_N}{k} - w'\rho_0 \frac{V_N}{k} \quad (3.343)$$

$$V = V_N \quad (3.344)$$

非等方ストレスはゼロと仮定すると TM ゲージで摂動量の満たす方程式を得る。

$$\delta' = 3aHw\delta - (1+w)kV \quad (3.345)$$

$$V' = -aHV + \frac{k\delta P}{(1+w)\rho_0} + k\Psi_N \quad (3.346)$$

$$k^2\Phi_N = -4\pi Ga^2\rho_0\delta \quad (3.347)$$

$$\Psi_N = \Phi_N \quad (3.348)$$

$$\varphi = -\Phi_N - \frac{aH}{k}V \quad (3.349)$$

$$\zeta = -\Phi_N - \frac{aH}{k}V + \frac{1}{3} \frac{\delta}{1+w} \quad (3.350)$$

ポアソン方程式から以下の関係式を得る。

$$\delta = -\frac{2}{3} \frac{k^2}{a^2 H^2} \Phi \quad (3.351)$$

これから TM ゲージでは、スーパーホライズン極限では、 $|\delta| \ll |\Phi_N|$ であり、 $\zeta \sim \varphi$ であることが分かる。つまり TM ゲージの空間曲率の揺らぎは波長がホライズンより長い時、保存する事になる。

(3.345) を conformal time から t の微分に変換し、(3.347) を δ について解き両辺を時間微分し、エネルギー保存則のゼロ次の方程式と TM ゲージでの空間曲率の定義式 (3.349) を使用すると以下の式を得る。

$$\dot{\Phi} + \frac{5+3w}{2} H\Phi = -\frac{3}{2}(1+w)H\varphi \quad (3.352)$$

以下スーパーホライズンスケールの揺らぎを扱う。従って

$$\varphi = \text{constant} \quad (3.353)$$

インフレーション中では、 $w = -1$ で $H = \text{constant}$ なので解は以下のようになる。

$$\Phi = \Phi_0 e^{-Ht}$$

したがってポテンシャルはディケーする。一般の状態方程式の場合スケー

ルファクターの時間依存性は

$$a \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

となる。これから一般の状態の時の Φ_N の方程式は以下のようなになる。

$$\dot{\Phi}_N + \frac{5+3w}{3(1+w)} \frac{1}{t} \Phi_N = -\frac{1}{t} \varphi \quad (3.354)$$

解は

$$\Phi_N \propto t^{-\frac{5+3w}{3(1+w)}}$$

の decay モードと

$$\Phi_N = -\frac{3(1+w)}{5+3w} \varphi \quad (3.355)$$

の特解の重ね合わせとなる。ディケーモードは消えてしまうので興味が無い。これよりポテンシャルと空間曲率との間には、radiation dominant の時 $w = 1/3$

$$\Phi_N = -\frac{2}{3} \varphi \quad (3.356)$$

matter dominant の時 $w = 0$

$$\Phi_N = -\frac{3}{5} \varphi \quad (3.357)$$

という関係があることになる。

COBE DMR で見つかった温度揺らぎは四重極モーメントの標準偏差値として

$$Q_{rms} = 17.1 \pm 1.5 \mu\text{K} \quad (3.358)$$

であった即ち

$$\frac{\delta T}{T} = 6.24 \times 10^{-6} \quad (3.359)$$

である。COBE で温度ゆらぎを測定したスケールは、宇宙再結合時スーパーホライズンスケールであるから、COBE で測定された温度揺らぎは、インフレーション期に刻まれた断熱揺らぎ成分と Sachs-Wolfe 効果によるものの

重ね合わせである。以下ではこれらにより、再結合時のスカラー曲率の揺らぎの振幅と CMB 温度揺らぎの振幅がどういう関係で結ばれるかと調べる。

まずは Sachs-Wolfe 効果について説明する。Newtonian ゲージ

$$ds^2 = -(1+2\Psi)dt^2 + a^2(1-2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (3.360)$$

を用いて測地線方程式を計算し、膨張宇宙を伝搬する間の重力による光子のエネルギーの変化を導く方程式を求める。光子の周波数は局所慣性系で定義する。即ち

$$h\nu \equiv \frac{d\tilde{x}^0}{d\lambda} \quad (3.361)$$

である。これを $\varepsilon = h\nu$ で表す。局所慣性系では $\tilde{P}_0 = \eta_{00}\tilde{P}^0 = -\varepsilon$ である。一般座標への変換は次の式でできる。

$$P_0 = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^0} \tilde{P}_\mu$$

変換係数は、局所慣性系から一般座標系へのメトリックテンソルの変換により得られる。

$$\begin{aligned} g_{00} &= -(1+2\Psi) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^0} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^0} \eta_{\mu\nu} \\ g_{0i} &= 0 = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^0} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^i} \eta_{\mu\nu} \\ g_{ij} &= a^2(1-2\Phi)\delta_{ij} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^j} \eta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

これを解くと次の解を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0} &= (1+\Psi), \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^0} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^i} &= 0, \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} = a(1-\Phi)\delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.362)$$

したがって P_0 は

$$P_0 = -(1+\Psi)\varepsilon \quad (3.363)$$

で与えられる。簡単のため光子の進行方向を x_1 方向とし、重力レンズ効果による経路の曲がりかが小さく、直進すると近似する。測地線方程式から次

の方程式を得る。

$$\begin{aligned} -\frac{d(1+\Psi)\varepsilon}{dx^0} &= \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,0}\frac{P^\alpha P^\beta}{P^0} = \frac{1}{2}\left(g_{00,0}P^0 + g_{11,0}\frac{(P^1)^2}{P^0}\right) \\ &= \frac{1}{P^0}\left(-\dot{\Psi}(P^0)^2 - a^2\dot{\Phi}(P^1)^2 + H(1-2\Phi)a^2(P^1)^2\right) \end{aligned}$$

ここで

$$0 = g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = -(1+2\Psi)(P^0)^2 + a^2(1-2\Phi)(P^1)^2$$

を用いて $a^2(P^1)^2$ を消去すると次の式を得る。

$$-\frac{d(1+\Psi)\varepsilon}{dx^0} = -(\dot{\Psi} + \dot{\Phi})P^0 + H(1+2\Psi)P^0$$

$P^0 = g^{00}P_0 = -(1-2\Psi)P_0 = (1-\Psi)\varepsilon$ を代入して整理すると次の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{d\Psi}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} - H \\ \frac{1}{a\varepsilon}\frac{da\varepsilon}{dt} &= -\frac{d\Phi}{dt} + 2\frac{\partial\Phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.364)$$

最後の等式では、今扱っている宇宙再結合時以降は、 $\Psi = \Phi$ であることを使ってまとめた。この式の右辺第一項は、重力場中を光子が運動する。右辺第二項は、光子が旅する途中で重力ポテンシャルが時間変化することで光子のエネルギー変化を生じる効果を示す。これらの物理を直感的に分かり易くするため、質量 m の非相対論的粒子の重力場中の運動で対応付けを行う。粒子の運動方程式は

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -m\vec{\nabla}\Phi$$

このエネルギー積分を行うと

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\Phi = -\frac{d\Phi}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

ここで $\varepsilon = v^2/2$ は単位質量あたりの運動エネルギー。右辺第一項は、スタート地点と終点での重力ポテンシャルの差額分が粒子の運動エネルギーになる効果を表している。第二項は、粒子の運動中に重力ポテンシャルの時間変化があった場合、それが粒子のエネルギーの増減に与える効果を表

している。例として月の重力による人工衛星の散乱を考える。月が静止している場合、散乱前後で人工衛星のエネルギーの増減は無い。しかし、動いている月の運動を追う方向に人工衛星が突っ込んだ場合（追突）、衛星が月の近傍を回って月の重力で散乱される過程で月は衛星に近づいてくる。言い方を変えると衛星にとっての月の重力ポテンシャルが突っ込んだときより出て行くときの方が深くなる。その為、散乱により衛星のエネルギーは失われる。逆に衝突の場合は、散乱後衛星のエネルギーが増える。この原理を利用した、人工衛星の加速法をスイングバイ航法と呼ぶ。即ち、右辺第二項は、スイングバイによる衛星の加速効果を表している。

重力場中を伝搬する光子のエネルギーの変化率は、光子のエネルギーによらず一定である。従って、黒体放射である CMB は、重力ポテンシャルの揺らぎの効果によりプランク分布の形を保ち、温度が変化するのみである。その温度変化率は、光子のエネルギー変化率と等しい。CMB の温度異方性をインフレーション時に刻印された断熱揺らぎ成分 (intrinsic 項) $\Theta_0(t_{ls}, \vec{x}_{ls}, \vec{n})$ と最終散乱面 (last scattering surface) から放出後観測者に届くまでの間に受けた効果 $(\delta T/T)_{jour}$ に分ける。ここで t_{ls} は最終散乱面の宇宙年齢、 \vec{x}_{ls} は観測者を原点して CMB が放出された最終散乱面の場所までの共同座標での位置ベクトル、 \vec{n} はその方向余弦である。

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{jour} = \frac{\delta(a\varepsilon)}{a\varepsilon} = \Phi(\vec{x}_{ls}, t_{ls}) - \Phi(\vec{0}, t_0) + 2 \int_{t_{ls}}^{t_0} \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial t} dt \quad (3.365)$$

右辺第一項、第二項が重力赤方偏移効果であり、最終散乱面で放出された時の重力ポテンシャルと観測者の場所での重力ポテンシャルの差が、温度増加率となっている。例えば、ポテンシャルの深い所から放たれた CMB は、この式から温度が低くなることが分かる。これは、エネルギーの一部を重力ポテンシャルの坂を登ることに費やすことで、CMB 光子のエネルギーが減少したためと考えれば良い。第三項は Integrated Sachs-Wolfe 効果と呼ばれる効果でありここでは無視する。

次に Intrinsic 項の値を評価する。断熱条件より、輻射場のエネルギー密度の揺らぎの相対値 δ_r^N と物質の密度の揺らぎの相対値 δ_m^N の間には以下の

関係が成り立つ。以下、添字の N は Conformal Newtonian ゲージで定義された量であることを示す。

$$\frac{\delta_r^N}{4} = \frac{\delta_m^N}{3} \quad (3.366)$$

ここで新たな変数 $\Theta \equiv \delta T/T$ を導入する。輻射場 (CMB) のエネルギー密度は温度の 4 乗に比例するため intrinsic な温度揺らぎは

$$\Theta_0^N(t_{ls}, \vec{x}_{ls}, \vec{n}) = \frac{\delta_r^N}{4} = \frac{\delta_m^N}{3} \quad (3.367)$$

と書ける。計算の見通しを良くするため TM ゲージに移る。最終散乱面は物質優勢期 ($w = 0$) であるため

$$\delta_m = \delta_m^N + 3 \frac{aH}{k} V \quad (3.368)$$

速度の揺らぎの実感発展は次の方程式の解として得られる。

$$V' + aHV = \frac{d}{dt}(aV) = k\Phi_N \quad (3.369)$$

ここで Φ_N は (3.355) から波長がホライズンサイズより長い間は、一定値を取る。宇宙膨張が進み、揺らぎの波長が何時かはホライズンサイズより短くなる。ホライズン再エントリーと呼ぶ。今扱う揺らぎは物質優勢期でホライズン再エントリーする長い波長の揺らぎなので、後で示す様にホライズン再エントリー後も Φ_N は時間によらず定数となる。(3.369) を Φ_N が定数として解くと次の式をえる。

$$V = t \frac{k}{a} \Phi_N = \frac{2}{3} \frac{k}{aH} \Phi_N \quad (3.370)$$

ここで、物質優勢で宇宙が平坦 $\Omega_m = 1$ として $a \propto t^{2/3}$, $t = 2/3H$ を使った。(3.367) に代入すると

$$\begin{aligned} \Theta_0^N(t_{ls}, \vec{x}_{ls}) &= \frac{1}{3} \left(\delta_m - 3 \frac{aH}{k} V \right) = \frac{1}{3} \delta_m(t_{ls}, \vec{x}_{ls}) - \frac{2}{3} \Phi_N(t_{ls}, \vec{x}_{ls}) \\ &\sim -\frac{2}{3} \Phi_N(t_{ls}, \vec{x}_{ls}) \end{aligned} \quad (3.371)$$

最後の変形では、最終散乱面ではまだスーパーホライズンであるので、ポテ

ンシャル項に比べて密度揺らぎのコントラストは十分小さく無視できることを使った。最終散乱面で重力ポテンシャルが深い所では、intrinsic な温度揺らぎは正になることを示している。ポテンシャルが深いところは、物質も輻射もより集まっている所であり、圧縮により温度が上がっているのである。我々はポテンシャルゼロの地点に住んでいるとすると、観測される温度揺らぎはポテンシャルの揺らぎの次の式で結ばれる。

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{obs} = \frac{1}{3}\Phi_N(t_{ls}, \vec{x}_{ls}) \quad (3.372)$$

(3.357) から空間曲率の揺らぎとスーパーホライズンスケールで観測された CMB 温度揺らぎの振幅との間に次の関係式が得られる。

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{obs} = -\frac{1}{5}\varphi(t_{ls}, \vec{x}_{ls}) \quad (3.373)$$

(3.373) を (3.325) に代入し CMB 温度揺らぎでスカラー曲率のパワースペクトルを書き表し、(3.359) を代入すると次のようにインフレーションが起こったエネルギースケールについて制限が課せられる。

$$\frac{V^{1/4}}{\epsilon^{1/4}} \sim 5 \times 10^{16} \text{GeV} \quad (3.374)$$

この結果を式 (3.214) を用いてスカラーテンソル比を用いた式に書き換えると、スカラー・テンソル比とインフレーションのエネルギースケールを関係付ける以下の関係式を得る。

$$V^{1/4} \sim 2.5 \times 10^{16} r^{1/4} \text{GeV} \quad (3.375)$$

CMB が放たれる宇宙再結合時は物質優勢期なので (3.351) と (3.356) から

$$\delta = \frac{2}{5} \frac{k^2}{a^2 H^2} \varphi \quad (3.376)$$

従ってスカラー曲率のパワースペクトルから宇宙再結合時にまだスーパーホライズンスケールにある長波長の揺らぎの density contrast のパワースペクトルが以下のように求まる。

$$P_\delta = \frac{4}{25} \left(\frac{k}{aH}\right)^4 P_\varphi \quad (3.377)$$

ここで $k = aH$ の揺らぎの振幅として以下の量を定義する。

$$\delta_H(k)^2 = \frac{4}{25} P_\phi(k) \quad (3.378)$$

これは Horizon reentry した時の密度揺らぎの振幅を表す指標となる量である。これらから COBE の観測で得られた温度揺らぎの四重極モーメントの値から、大体

$$\delta_H = 2 \times \frac{\delta T}{T} \sim 1.25 \times 10^{-5} \quad (3.379)$$

である。詳しい計算によると COBE による四重極モーメントとコンシステントな値として以下の値が得られている。

$$\delta_H(k_{pivot}) = 1.91 \times 10^{-5} \quad (3.380)$$

$$k_{pivot} = 7.5 a_0 H_0 \quad (3.381)$$

ここでは $n = 1$ を仮定した。この値は COBE normalization と呼ばれる。

3.10.8 Late stage evolution of density contrast and CMB spectrum

式 (3.369) を解く時、 Φ_N が時間に依存しないとした。この仮定が、物質のみで宇宙が平坦になっている場合、正しいことを示す。また、実際の宇宙は、現在はダークエネルギーが支配的であることが分かっている。そのことが、CMB スペクトルにどのように現れるかについて論じる。

現在我々が観測できる物は全て現在の宇宙のホライズンサイズより短いスケールの物だけである、つまり、我々の観測対象となりうるものは、宇宙進化の何処かの時期にホライズン再エントリーを果たしていることになる。我々が観測する CMB は、放出された時期は、 $z = 1100$ 程度と非常に初期であるが、その後様々な時代の宇宙空間を伝わって $z = 0$ の我々まで届いている。途中の構造形成の時間依存性によっては、Sachs-Wolfe 効果の定量評価に修正が必要であるかもしれず又、Integrated Sachs-Wolfe 効果も無視出来ないかもしれない。そこで物質優勢で $\Omega_m = 1$ の宇宙に限って、サブホライズンスケールの揺らぎ ($aH/k \ll 1$) の進化を調べる。物質優勢期では、物質の平均密度が輻射の平均密度より圧倒的に大きいため、エネルギー密度の

揺らぎも物質が支配的である。ここでは最終散乱面以降を扱うので、輻射の圧力は無視出来る。従って、揺らぎの発展方程式中圧力揺らぎは落とす事ができる非等方ストレスの存在も無視する。サブホライズンの揺らぎに対してポアッソン方程式 (3.340) は以下のように近似できる。

$$k^2 \Phi = -\frac{3}{2} a^2 H^2 \delta \quad (3.382)$$

これは慣れ親しんだポアッソン方程式である。Density contrast の発展方程式 (3.331)、peculiar velocity の発展方程式 (3.333) はそれぞれ以下のように近似出来る。

$$\begin{aligned} \delta' + kV &= 0 \\ V' + aHV - k\Psi &= 0 \end{aligned}$$

ここでサブホライズンスケールでは物理量は全てゲージによらないので、Newtonian ゲージを示す添字を取った。これらを連立すると以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \delta'' + aH\delta' - \frac{3}{2} a^2 H^2 \delta &= 0 \\ \ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2} H^2 \delta &= 0 \end{aligned} \quad (3.383)$$

$\Omega_m = 1$ よりこの方程式は以下のように書ける。

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0$$

解は以下の二つである。

$$\begin{aligned} \delta &\propto t^{-1} \\ \delta &\propto t^{2/3} \propto a \end{aligned} \quad (3.384)$$

一つ目は減衰モードで、二つ目が成長モードで、スケールファクターに比例して振幅が成長する。この結果を (3.382) に代入すると

$$k^2 \Phi = -\frac{1}{2\tilde{M}_{pl}^2} \rho_0 a^2 \delta \propto \rho_0 a^3 = const \quad (3.385)$$

のように時間によらず一定となる。ここで物質密度に対して $\rho_0 a^3 = const$

が成り立つ事を使った。

現在はダークエネルギー優勢であることが、どう影響を与えるか議論する。ダークエネルギーは、宇宙膨張を早める効果として働くため、その存在は density contrast の成長を抑制する。ダークエネルギーは一様等方と考えられているので、 Φ は物質密度の揺らぎのみに起因して生成される。したがって、宇宙の平均密度としてはダークエネルギー優勢であっても、ポアソン方程式 (3.382) 中の ρ_0 はあくまで物質の平均密度である。従って、 δ の成長率が抑えられる分、 Φ はその絶対値が時間と共に減少することになる。要するに物があつまりにくくなるので、ポテンシャルがディケーし、平坦に近づこうとするのである。このことは、CMB スペクトルの l の小さい所に Integrated Sachs Wolfe 効果として影響を与えている。

第 4 章

スカラーモードの線形進化

4.1 Before recombination

4.1.1 発展方程式

宇宙再結合以前の宇宙では、光子とバリオン・電子はタイトに結合しており、一つの流体として振舞っている。宇宙再結合期の宇宙の温度は、 $k_B T \sim 0.3\text{eV}$ である。そこで、質量が 0.1eV 以下と期待されるニュートリノは相対論的粒子の一因として扱う。宇宙再結合期 $z \sim 1300$ のバリオンと相対論的粒子の密度比は、式 (1.183) と (1.26) から ~ 0.27 である。そこで第 0 近似として、相対論的粒子とバリオンをバリオンの密度が無視できる一流体として扱う。エネルギー保存則 $\nabla_\mu T_0^\mu = 0$ および運動量保存則 $\nabla_\mu T_i^\mu = 0$ は、ダークマター、光子・バリオン流体それぞれで独立に成り立つ。以下では、Conformal Newtonian Gauge を用いる。ダークマターの進化を記述する方程式が、方程式 (3.331) と (3.333) で $w = 0$, $\Sigma = 0$, $\delta P = 0$ とすることで以下のように求まる。

$$\delta' + kV = 3\Phi'_N \quad (4.1)$$

$$V' + aHV = k\Phi_N \quad (4.2)$$

次に相対論的粒子の進化を記述する方程式を導出する。宇宙膨張に影響を与える相対論的粒子は宇宙マイクロ波背景放射と宇宙背景ニュートリノであり、これらのエネルギー分布はそれぞれ温度 T_γ 、 T_ν の熱平衡分布で表される。そのため相対論的粒子の進化は、温度揺らぎ

$$\Theta_\alpha(\vec{x}) \equiv \frac{\delta T_\alpha(\vec{x})}{T_\alpha}, \quad (\alpha = \gamma, \nu) \quad (4.3)$$

を用いて記述されることが多い。そこで方程式 (3.331) と (3.333) に現れる δ 、 V と $\Theta(\vec{x})$ のゼロ次、一次のモーメントととの関係をまず明らかにする。温度コントラスト $\Theta(\vec{x})$ を多重極展開した時の ℓ 次の展開係数 Θ_ℓ を以下のように定義する。

$$\Theta_\ell \equiv \frac{1}{(-i)^\ell} \int_{-1}^1 d\mu \frac{\Theta(\vec{x})}{2} P_\ell(\mu), \quad (4.4)$$

ここで $P_\ell(\mu)$ は ℓ 次のルジャンドル関数、 μ は光子分布の双極子モーメントベクトルすなわち光子の集団が全体としてある方向に移動する特異速度 \vec{v} を持つ時その特異速度の方向を z 軸に取り球面極座標表示ときの極角 θ を用いて $\mu = \cos \theta$ で定義される。これから温度揺らぎコントラストが、ルジャンドル関数により以下のように展開される。

$$\Theta(\vec{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-i)^\ell (2\ell+1) \Theta_\ell P_\ell(\mu). \quad (4.5)$$

光子のエネルギー分布関数を $f_\gamma(pc, T)$ 、ニュートリノのエネルギー分布関数を $f_\nu(pc, T)$ とする。これらを用いて相対論的粒子の各成分のエネルギー密度、粒子数密度は以下のように計算される。

$$\rho_{\alpha 0} c^2 = 4\pi \left(\frac{k_B T}{c}\right)^4 c \int_0^\infty x^3 f_{\alpha 0}(x) dx, \quad (4.6)$$

$$n_{\alpha 0} = 4\pi \left(\frac{k_B T}{c}\right)^3 \int_0^\infty x^2 f_{\alpha 0}(x) dx, \quad (4.7)$$

ここで $x \equiv pc/k_B T$ であり、熱平衡分布が x の関数であることを用いた。温度揺らぎが存在することにより生じる分布関数の平均分布 f_{x0} からのズレは微小量の一次までで以下のように書ける。

$$\delta f_\alpha(pc) = \frac{df_{\alpha 0}}{dT} \delta T = -x \Theta_\alpha \frac{df_{\alpha 0}}{dx}. \quad (4.8)$$

この温度揺らぎにより生じた分布関数の平均からのズレに起因する各相対論的粒子の質量密度のコントラストと温度揺らぎのコントラストのモノポール $\Theta_{\alpha,0}$ の関係式が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \delta_\alpha &= \frac{1}{\rho_{\alpha 0} c^2} \int d^3 p \delta f_\alpha(pc) pc = -\frac{1}{\rho_{\alpha 0} c^2} 4\pi \left(\frac{k_B T}{c}\right)^4 c \Theta_{\alpha,0} \int_0^\infty x^4 \frac{df_{\alpha 0}}{dx} dx \\ &= \frac{1}{\rho_{\alpha 0} c^2} 4 \times 4\pi \left(\frac{k_B T}{c}\right)^4 c \int_0^\infty x^3 f_{\alpha 0} dx \Theta_{\alpha,0} = 4 \Theta_{\alpha,0}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

特異速度 v は、相対論的粒子の運動量密度 $T^{30}/c = (\rho_{\alpha 0} + P_\alpha/c^2)v = 4/3 \times \rho_{\alpha 0} v$ を光子一個あたりの平均の運動量 p_α を用いる表現した $n_\alpha p_\alpha$ と等しいことを用いて Θ の一次のモーメントと関係づけることができる。ここで特異速度、特異運動量の方向を z に取り、それらの z 成分のみ取り扱っている。 $n_\alpha p_\alpha$ は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} n_\alpha p_\alpha &= \int d^3 p p \mu \delta f_\alpha = -2\pi \left(\frac{k_B T}{c}\right)^4 \int_0^\infty dx \int_{-1}^1 d\mu \mu \Theta_\alpha(\mu) x^4 \frac{df_{\alpha 0}}{dx} \\ &= 4 \times 2\pi \left(\frac{k_B T}{c}\right)^4 \int_0^\infty dx x^3 f_{\alpha 0}(x) \int_{-1}^1 d\mu \mu \Theta_\alpha(\mu) \\ &= 4 \times \rho_{\alpha 0} c \int_{-1}^1 d\mu \mu \frac{\Theta_\alpha(\mu)}{2} \\ &= -4i \rho_{\alpha 0} c \Theta_{\alpha,1}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

ここで $v = -iV$ で定義される V を導入すると相対論的粒子の流体の特異速度と温度コントラストの一次のモーメントとの間の次の関係式を得る。

$$V_\alpha = 3c \Theta_{\alpha,1}. \quad (4.11)$$

ここでは断熱揺らぎを扱っているため

$$\Theta_\gamma(\vec{x}) = \Theta_v(\vec{x}), \quad (4.12)$$

が成り立つ。したがって、 $\Theta_{\ell,\gamma} = \Theta_{\ell,v}$ であり $V_\gamma = V_v$ であるので、粒子の種類を識別する添字 α を省く。式 (4.10) の導出過程から分かるように多重極モーメントの定義式 (4.4) の分母 2 は極角でモノポールを積分した時に現

れる2の分の補正である。以上の結果を方程式(3.331)と(3.333)に代入し $w = 1/3$, $\Sigma = 0$, $\delta P = 1/3 \times \delta \rho c^3$ とすると以下の結果を得る。

$$\Theta'_{r,0} + k\Theta_{r,1} = \Phi', \quad (4.13)$$

$$\Theta'_{r,1} - \frac{k}{3}\Theta_{r,0} = \frac{k}{3}\Phi. \quad (4.14)$$

ここで添字 r は相対論的物質を添字 dm はダークマターを表し、natural unit を用いた。

重力ポテンシャルの摂動量は、相対論的粒子およびダークマター双方の密度揺らぎの影響の和で決定される。ポアソン方程式(3.340)をダークマターと相対論的物質が混在する状況を扱うことを意識して以下のように元の形に書き換える。

$$\begin{aligned} k^2\Phi &= -\frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2} \left[\delta\rho_{dm} + \delta\rho_r + 3aH(\rho_r + P_r)\frac{V_r}{k} + 3aH\rho_{dm}\frac{V_{dm}}{k} \right] \\ &= -\frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2} \left[\rho_{dm}\delta + 4\rho_r\Theta_{r,0} + \frac{3aH}{k}(\rho_{dm}V + 4\rho_r\Theta_{r,1}) \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

平均の密度を表す添字 0 を省いた。方程式(3.339)から

$$3H(\Phi' + aH\Phi) = -\frac{3aH}{k} \frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2}(\rho_{dm}V + 4\rho_r\Theta_1) \quad (4.16)$$

これを用いてポアソン方程式(4.15)の右辺の速度を書き換えると以下の方程式を得る。

$$k^2\Phi + 3aH(\Phi' + aH\Phi) = -\frac{a^2}{2\tilde{M}_{pl}^2}[\rho_{dm}\delta + 4\rho_r\Theta_{r,0}] \quad (4.17)$$

これらの方程式を数値的に解くことで揺らぎの進化を追うことができる。以下では、解析的に進化の性質が追える、幾つかの極限の場合に分けてこれらの方程式を解いて進化の様子を調べる。

4.1.2 Super-horizon scale

Super-horizon scale の揺らぎは波長がハッブル地平線より十分ながく $k \ll 1/H$ であることを用いて上で導いた方程式を以下のように簡略化できる。まず密度揺らぎの発展方程式は以下の形に還元できる。

$$\delta' - 3\Theta'_{r,0} = 0. \quad (4.18)$$

解は

$$\delta - 3\Theta_{r,0} = 0, \quad (4.19)$$

である。ここで断熱揺らぎの条件を用いて右辺がゼロであるとした。次に energy equality を跨いだ進化を追う。そこで時間の変数として新たに以下で定義される y を用いる。

$$y \equiv \frac{\rho_{dm}}{\rho_r}. \quad (4.20)$$

これを用いて super horizon 極限での方程式 (4.17) が以下のように書き直せる。

$$3aH(\Phi' + aH\Phi) = -\frac{a^2}{2M_{pl}^2} \rho_{dm} \delta \left(1 + \frac{4}{3y}\right). \quad (4.21)$$

更に $H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \rho$, $\rho = \rho_{dm} + \rho_r = \rho_{dm}(1 + 1/y)$ を用い、

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} \frac{d}{dy} = aHy \frac{d}{dy},$$

を用いると、以下のように変形できる。

$$y \frac{d\Phi}{dy} + \Phi = \frac{3y+4}{6(y+1)} \delta. \quad (4.22)$$

ここで super horizon scale 極限の方程式 (4.1) は以下のように書ける。

$$\delta' = 3\Phi'. \quad (4.23)$$

左辺に式 (4.22) を代入すると以下ようになる。

$$3\frac{d\Phi}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{6(y+1)}{3y+4} \left(y\frac{d\Phi}{dy} + \Phi \right) \right). \quad (4.24)$$

この方程式は積分でき以下の解をえる。

$$\frac{6(y+1)}{3y+4} y \frac{d\Phi}{dy} + \frac{3(5y+6)}{3y+4} \Phi = \frac{9}{2} \Phi(0). \quad (4.25)$$

ここで以下の変数変換を行う。

$$u \equiv \frac{y^3}{\sqrt{1+y}} \Phi. \quad (4.26)$$

これを用いて方程式 (4.25) を書き換えると以下のようになる。

$$\frac{du}{dy} = \frac{(3y+4)y^2}{6(1+y)^{3/2}} \frac{9}{2} \Phi(0). \quad (4.27)$$

これを $y=0 \sim y$ の範囲で積分すれば u の y 依存性が求まり、 Φ の進化が以下のように求まる。

$$\Phi = \frac{\Phi(0)}{10} \frac{1}{y^3} [16\sqrt{1+y} + 9y^3 + 2y^2 - 8y - 16]. \quad (4.28)$$

ここで $u(y=0) = 0$ を用いた。物質優勢期即ち $y \gg 1$ の極限では、この解は以下のようになる。

$$\Phi \rightarrow \frac{9}{10} \Phi(0). \quad (4.29)$$

4.1.3 Through horizon crossing of large scale perturbation

物質優勢期に horizon reentry するような大きなスケールの揺らぎが horizon に再突入する様子を調べる。物質優勢期なので重力ポテンシャルの進化に相対論的粒子の揺らぎの影響は無視できる。したがって扱うべき方程式は以下の3本である。

$$\delta' + kV = 3\Phi', \quad (4.30)$$

$$V' + aHV = k\Phi, \quad (4.31)$$

$$k^2\Phi = -\frac{3}{2}a^2H^2 \left[\delta + \frac{3aHV}{k} \right]. \quad (4.32)$$

ここで $H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \rho_{dm}$ を用いた。宇宙再結合期頃の物質優勢期は Einstein - de Sitter でよく記述できる。したがって $H \propto a^{-3/2}$ であり、 $daH/d\tau = -a^2 H^2/2$ である。方程式 (4.30) の δ を Φ と V で置き換えると以下の方程式を得る。

$$\left(3 + \frac{2k^2}{3a^2 H^2}\right) \Phi' + \left(\frac{2k^2}{3aH} + 3aH\right) \Phi + \left(\frac{9a^2 H^2}{2k} + k\right) V = 0. \quad (4.33)$$

付録 A

ネーターの定理・スカラー場のエネルギー・モーメントテンソル

A.1 質点の運動

A.1.1 オイラー・ラグランジュ方程式

質点の位置を一般化座標 $q_i(t)$ で表わす。質点の一つの場合は、 $i = x, y, z$ である。質点の速度 $\dot{q}_i(t)$ と $q_i(t)$ が張る 6 次元空間を位相空間と呼ぶ。質点の任意の運動は位相空間内の一本の軌跡として表される。位相空間内で $q_i(t), \dot{q}_i(t)$ は互いに一次独立である。これらの座標の関数であるラグランジアン (Lagrangian) は以下のように定義される。

$$L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) = T - V$$

ここで T は運動エネルギー、 V はポテンシャルエネルギーである。例としてポテンシャル場 $V(q_i)$ 中を非相対論的速度で運動する質量 m の質点のラグランジアンを下に書く。

$$L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{q}_i^2 - V(q_i)$$

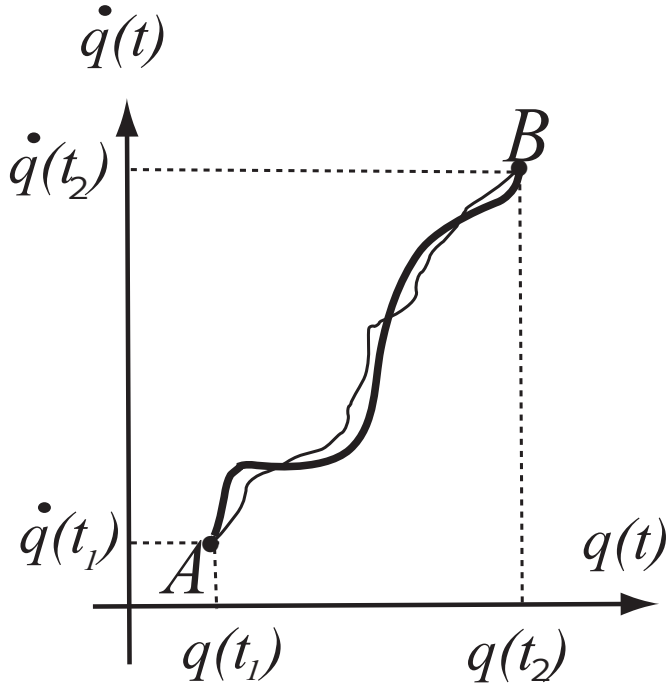


図 A.1 始点 A を時刻 t_1 に出発し終点 B に時刻 t_2 に到着する質点の位相空間中の軌跡。太い実線が物理法則に従って運動する質点の真の軌跡を示した。細い実線は始点と終点を固定して真の軌跡から任意の微量ズラした軌跡を示す。

作用積分 (action) を以下の式で定義する。

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$$

最小作用の原理によれば、質点は作用が最少となる軌跡を通る。図 A.1 のように粒子の軌跡を物理法則に従って運動する場合を表す真の軌跡 $(q_i(t), \dot{q}_i(t))$ から、始点と終点を固定して任意の微量ズラした場合 $(q_i(t) + \delta q_i(t), \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t))$ の作用の変分量を微量の一次まで展開し計算する。

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t) + \delta q_i(t), \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t)) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta \dot{q}_i(t) \right) \\
&= \left[\frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i(t) \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial q_i} \delta q_i(t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i(t) \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) \delta q_i(t)
\end{aligned}$$

途中部分積分を行い、最後の等号では始点と終点を固定していること即ち $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ を用いた。最小作用の原理は $\delta I = 0$ であること、即ちこの式が任意の軌跡の変分 $\delta q_i(t)$ に対してゼロであることを主張する。従って最小作用の原理を満たすにはラグランジアンが以下の方程式を満たさなければならない。

$$\frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)} = 0 \quad (\text{A.1})$$

A.1.2 正準形式

一般化運動量を次の式でラグランジアンから定義する。

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (\text{A.2})$$

この式により定義される一般化運動量を用いて位相空間の座標を q_i, \dot{q}_i から q_i, p_i に変換する。一般化運動量と一般化座標の関数であるハミルトニアン (Hamiltonian) を以下の式で定義する。

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i) \quad (\text{A.3})$$

一般化座標と一般化運動量を真の軌跡 q_i, p_i から任意の微少量ズラす。

$$q_i \rightarrow q_i + \eta_i, p_i \rightarrow p_i + \zeta_i$$

変分後のハミルトニアンを一次の微少量まで展開すると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
H(q_i + \eta_i, p_i + \zeta_i) &= H(q_i, p_i) + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \zeta_i \right) \\
&= \sum_i \left(p_i \dot{q}_i + \zeta_i \dot{q}_i + p_i \dot{\eta}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\eta}_i \right) - L(q_i, \dot{q}_i)
\end{aligned}$$

$$= H(q_i, p_i) + \sum_i (-\dot{p}_i \eta_i + \dot{q}_i \zeta_i)$$

一番目の等号では、左辺をテイラー展開した。上から二番目の等号ではハミルトニアン¹⁾の定義式 (A.3) の右辺を展開した。最後の等号では、ハミルトニアン²⁾の定義式 (A.3)、オイラー・ラグランジュ方程式 (A.1) 及び一般化運動量の定義式 (A.2) を用いた。この式の一番目の等号の左辺と最後の等号の左辺が任意の微少量 η_i, ζ_i に対して恒等的に等しくなければならず、このことからハミルトニアンが以下の方程式を見たさなければならない。

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (\text{A.4})$$

この方程式をハミルトンの正準運動方程式と呼ぶ。

節 A.1.1 で扱ったポテンシャル場中を非相対論的速度で運動する質量 m の質点の場合を例として扱う。一般化運動量は以下のようなよく見なれた形になる。

$$p_i = m\dot{q}_i$$

ハミルトニアンは

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(q_i)$$

となりこれは質点の力学的エネルギーである。正準運動方程式は

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \frac{p_i}{m} = \dot{q}_i$$

となり、初めの式はポテンシャル場中の質点の運動方程式を二番目の式は速度を用いた一般化運動量の定義式を与える。

A.1.3 ネーターの定理

座標変換に対する系の対称性と保存量との関係を結ぶネーターの定理を導出する。以下のような一般の無限小座標変換を考える。

$$t' = t + \delta t(t)$$

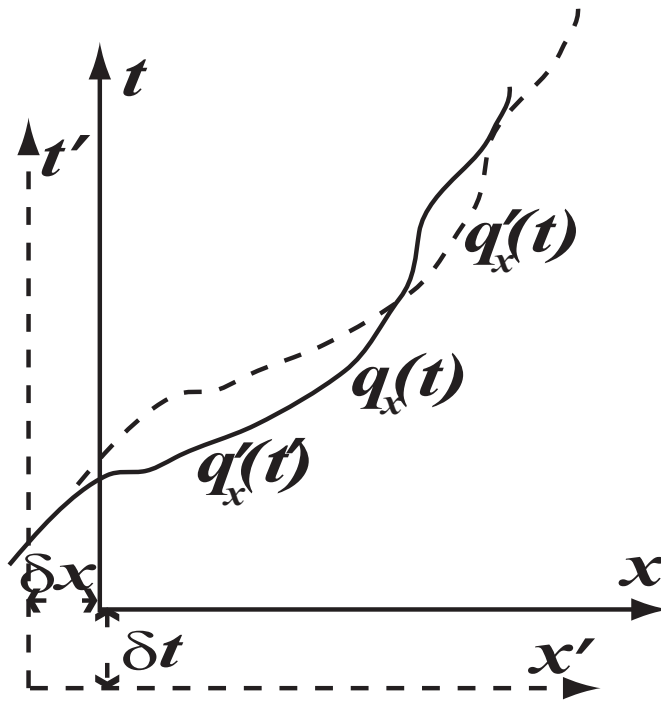


図 A.2 無限小座標変換 $t' = t + \delta t, x' = x + \delta x$ と質点の軌跡の x 成分（実線）の様子を示す．座標変換後の質点の軌跡を表す関数を元の座標 $t-x$ 座標系に持ってきたもの $q'_x(t)$ を破線で表わす．

$$x'_i = x_i + \delta x_i(t)$$

無限小量 $\delta t, \delta x_i$ は一般に時刻 t の関数でよい．以下の式で定義される微少量をリー（Lie）微分と呼ぶ．

$$\delta^L q_i(t) \equiv q'_i(t) - q_i(t) \tag{A.5}$$

リー微分は、座標変換による関数形の変化量を表すものである．図 A.2 にリー微分で比較している関数の様子を示す．リー微分は以下のように変形すると以後便利であり且つ物理的理解を助ける．

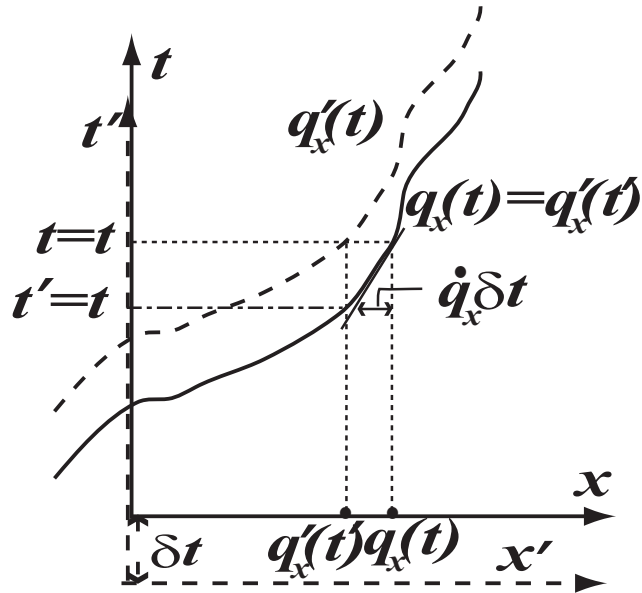


図 A.3 無限小座標変換 $t' = t + \delta t, \delta x_i = 0$ の場合のリー微分.

$$\delta^L q_i(t) = q'_i(t) - q'_i(t') + q'_i(t') - q_i(t) \quad (\text{A.6})$$

$$= -\dot{q}'_i \delta t + \delta x_i(t) \quad (\text{A.7})$$

最後の等号の右辺第二項は空間座標の変換によって生じたズレを表す．右辺第一項の物理的理解を助けるために時間原点のズレのみを行った場合、即ち $\delta x_i = 0$ のケースについて図 A.3 に示した．図から分かるように $q'_x(t)$ は、'系では時計が δt 進んでいるため時刻 t は元の座標では $t - \delta t$ のことである．従って、'系で時計が t をさす時の質点の位置はこれから δt 間に質点が進む距離 $\dot{q}_x \delta t$ だけ元の座標での時刻 t での位置より手前である．この事から

$$\delta^L q_x = -\dot{q}_x \delta t$$

となることが理解できる．これが式 (A.7) の右辺第一項の物理的意味である．

準備が整ったのでいよいよネーターの定理を導出する。座標変換に対する系の対称性という言葉の冒頭に述べた。数学的には、作用積分 I がある座標変換に対して不変である時その物理系はその座標変換に対して対称である、と言う。従って座標変換前後での作用積分の値を比較して差がゼロかどうかを調べればよいのである。作用積分の差は以下のように定義される。

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt' L\left(q_i'(t'), \frac{dq_i'(t')}{dt'}\right) - \int_{t_1}^{t_2} dt L\left(q_i(t), \frac{dq_i(t)}{dt}\right)$$

微分を表す。ここで \cdot は t でのこの式に登場する $'$ 付きの変数を元の座標の変数で書き表す。

$$\begin{aligned} dt' &= \frac{dt'}{dt} dt = (1 + \delta t) dt \\ q_i'(t') &= q_i(t) + \delta x_i(t) \\ \frac{dq_i'(t')}{dt'} &= \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} (q_i(t) + \delta x_i(t)) \\ &= (1 - \delta t)(\dot{q}_i(t) + \delta \dot{x}_i(t)) \\ &= \dot{q}_i(t) - \delta t \dot{q}_i(t) + \delta \dot{x}_i(t) \end{aligned}$$

一方リー微分の時間微分は以下のように書ける。

$$\delta^L \dot{q}_i(t) = -\ddot{q}_i \delta t - \dot{q}_i \delta t + \delta \dot{x}_i(t)$$

また、ラグランジアンは陽に時間に依存しないとし以下の式が成り立つとする。

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right)$$

以上を用いると作用積分の変分量が以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\delta t L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) + \sum_i \left(\frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial q_i} \delta x_i(t) + \frac{\partial L(q_i(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i} (-\delta t \dot{q}_i(t) + \delta \dot{x}_i(t)) \right) \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d(\delta t L)}{dt} - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \delta t \right) \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (-\delta t \dot{q}_i + \delta \dot{x}_i) \right) \end{aligned}$$

ここで以下の変形を行う。

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (-\dot{q}_i \delta t + \delta x_i) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (-\dot{q}_i \delta t + \delta x_i) \right) + \delta t \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \delta t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta x_i \right\}$$

この式を代入して δI の式を更に変形する.

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\delta t L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta^L q_i \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta^L q_i$$

ここで式 (A.7) を用いてリー微分で書き換えた. 質点の軌跡はオイラー・ラグランジュ方程式を満たすため最後の項はゼロである. 従って, 考えている座標変化に対して系が対称の時, 即ち $\delta I = 0$ の時, 以下の式で定義される N が保存量 $dN/dt = 0$ となる.

$$N \equiv -\delta t L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta^L q_i \quad (\text{A.8})$$

この保存量をネーターカレント (Noether current) と呼びこれをネーターの定理と呼ぶ.

例としてまず無限小時間推進に対して系が対称な場合のネーターカレントを求める. この時

$$\delta t = \varepsilon$$

$$\delta x_i = 0$$

である. 但し ε は時間によらない定数とする. 従って,

$$\delta^L q_i = -\varepsilon \dot{q}_i$$

である. これらを式 (A.8) に代入すると以下の式を得る.

$$N = -\varepsilon L + \sum_i p_i \dot{q}_i \varepsilon = \varepsilon H$$

ここで一般化運動量とハミルトニアン of の定義式を用いた. 従って, 時間推進に対して系が対称な場合保存する量はハミルトニアン即ちエネルギーである.

次に無限小空間推進に対して系が対称な場合のネーターカレントを求める. 簡単のため x 軸方向のみの空間推進を考える. この時

$$\begin{aligned}\delta t &= 0 \\ \delta \vec{x} &= (\varepsilon, 0, 0) \\ \delta^L \vec{q} &= (\varepsilon, 0, 0)\end{aligned}$$

である。これらを式 (A.8) に代入すると以下の式を得る。

$$N = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} \varepsilon = -\varepsilon p_x$$

ここで一般化運動量の定義式を用いた。従って系が x 方向の無限小座標推進に対して対称である時ネーターカレントは本質的に運動量の x 成分にマイナスを掛けたものとなり、即ち運動量の x 成分が保存する。

付録 B

輻射場の量子化

B.1 クーロンゲージ

場の量子化の例として輻射場を取り上げる．Maxwell 方程式をまとめる．

$$\text{rot}\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\text{rot}\vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (\text{B.2})$$

$$\text{div}\vec{E} = 4\pi\rho \quad (\text{B.3})$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (\text{B.4})$$

ここで ρ は電荷密度、 \vec{j} は電流密度である．式 (B.4),(B.1) より 4 元ポテンシャル $A^\nu = (\phi, \vec{A})$ を用いて電場磁場が以下のように書ける．

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{B.5})$$

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (\text{B.6})$$

式 (B.5)、(B.6) を式 (B.2) に代入すると以下の方程式を得る．

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \text{grad} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div}\vec{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (\text{B.7})$$

古典的に輻射場を扱う場合は以下で定義されるローレンツゲージを取る．

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \quad (\text{B.8})$$

これは相対論的に共変な形である。

輻射場を量子化するには、以下に紹介するクーロンゲージを選択するのが一般である。電磁場の4元ポテンシャルを用いた表現 (B.5)、(B.6) から4元ポテンシャルには以下のゲージ変換の自由度が残されている。

$$\vec{A}_{\text{new}} = \vec{A}_{\text{old}} + \text{grad}\psi \quad (\text{B.9})$$

$$\phi_{\text{new}} = \phi_{\text{old}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (\text{B.10})$$

ここで ψ は任意のスカラー関数である。ゲージ自由度の関数 ψ を以下の方程式の解となるように選択する。

$$\vec{\nabla}^2 \psi = -\text{div}\vec{A}_{\text{old}}$$

すると変換後の4元ポテンシャルはそれぞれ以下の方程式を満たす。

$$\text{div}\vec{A}_{\text{new}} = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi = -4\pi\rho \quad (\text{B.12})$$

方程式 (B.12) の解は以下のようになる。

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{B.13})$$

ローレンツゲージを用いた時の解リエナー・ブィーフェルトポテンシャルと異なり、右辺に遅延時間が現れずポテンシャルを求めたい時刻と同時刻の密度分布のみでポテンシャルが決まるという形になっている。式 (B.13) は静電場のポテンシャル即ちクーロン力場のポテンシャルと同じ形をしている。このようにスカラーポテンシャルがクーロン力場のポテンシャルと同じ形になることからこのゲージをクーロンゲージと呼ぶ。真空中では電荷密度はゼロであるからクーロンゲージでは $\phi = 0$ となる。従って、真空中のクーロンゲージは4元ポテンシャルが以下の条件を満たすゲージ選択である。

$$\text{div}\vec{A} = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\phi = 0 \quad (\text{B.15})$$

これらの条件から4元ポテンシャルの内独立な成分が二つであることになる。これは輻射場は二つの独立な偏光成分のみが独立なモードであること

に対応している。また、輻射場の偏光方向とベクトルポテンシャル \vec{A} の方向が同じ方向になる。これを式 (B.7) に代入すると真空中のクーロンゲージのベクトルポテンシャルが満たす方程式は以下ようになる。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = 0 \quad (\text{B.16})$$

クーロンゲージを用いると電場・磁場は以下の式で4元ポテンシャルから計算される。

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{c \partial t} \quad (\text{B.17})$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (\text{B.18})$$

B.2 輻射場のフーリエ積分表示

一辺の長さが L の立方体内の輻射場を考える。境界では周期境界条件を満たすとする。ベクトルポテンシャルのフーリエ積分表示は以下のように書ける。

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r q^{(r)}(\vec{k}, t) \vec{e}_{r, \vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (\text{B.19})$$

ここで $V = L^3$ は領域の体積であり、 $\vec{e}_{r, \vec{k}}$ は偏光ベクトルであり二つの独立な成分を持ちその方向は波数ベクトルに依存する。周期境界条件より

$$\vec{A}(x+L, y, z, t) = \vec{A}(x, y, z, t)$$

でなければならない。これから

$$\sum_{\vec{k}} \sum_r \vec{q}^{(r)}(\vec{k}, t) \vec{e}_{r, \vec{k}} e^{i(k_x(x+L) + k_y y + k_z z)} = \sum_{\vec{k}} \sum_r \vec{q}^{(r)}(\vec{k}, t) \vec{e}_{r, \vec{k}} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

であり k_x に対して以下の条件が課せられる。

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L} \quad (\text{B.20})$$

ここで n_x は整数。同様に k_y, k_z に対しても以下の条件が課せられる。

$$k_y = \frac{2\pi n_y}{L} \quad (\text{B.21})$$

$$k_z = \frac{2\pi n_z}{L} \quad (\text{B.22})$$

したがって式 (B.19) 中の波ベクトルによる和を具体的に書くと以下のようになる。

$$\sum_{\vec{k}} = \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty}$$

以後の計算で度々登場する以下の式の計算を行う。

$$\int_0^L dx e^{i(k_x - k'_x)x} = \frac{1}{i(k_x - k'_x)} (e^{2\pi i(n_x - n'_x)} - 1) = 0 \quad \text{for } k_x \neq k'_x$$

$$= L \quad \text{for } k_x = k'_x$$

ここでは n_x, n'_x が整数であることを用いた。他の成分も同様に計算でき以下の式を得る。

$$\frac{1}{V} \int d^3x e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (\text{B.23})$$

ここで $\delta_{\vec{k}, \vec{k}'} = \delta_{k_x, k'_x} \delta_{k_y, k'_y} \delta_{k_z, k'_z}$ は三つのクロネッカーのデルタの積である。

クーロンゲージでの真空中のベクトルポテンシャルが満たす方程式 (B.16) から以下の方程式を得る。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q^{(r)}(\vec{k}, t)}{\partial t^2} + k^2 q^{(r)}(\vec{k}, t) = 0$$

ここで k は波数ベクトルの大きさである。この解は、分散関係式

$$\omega_k = ck \quad (\text{B.24})$$

を満たす ω_k を用いて以下のように書ける。

$$q^{(r)}(\vec{k}, t) = q_{\vec{k}}^{(r)} e^{-i\omega_k t}$$

これを用いてクーロンゲージでのベクトルポテンシャルは以下のように書ける。

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r \left(q_{\vec{k}}^{(r)} e^{-i\omega_k t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} e^{i\omega_k t} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right) \vec{e}_{r, \vec{k}} \quad (\text{B.25})$$

ここでベクトルポテンシャルが実数即ちエルミートであることが保障されるように整理した．右辺の $q_{\vec{k}}^{(r)\dagger}$ は、 $q_{\vec{k}}^{(r)}$ のエルミート共役であるが、量子化するまではただの複素共役である．

式 (B.25) を式 (B.17),(B.18) に代入し電場・磁場のフーリエ積分表示を計算すると以下ようになる．

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{i\omega_k}{c} \vec{e}_{r,\vec{k}} \left(q_{\vec{k}}^{(r)} e^{-i\omega_k t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} e^{i\omega_k t} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \quad (\text{B.26})$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r i\vec{k} \times \vec{e}_{r,\vec{k}} \left(q_{\vec{k}}^{(r)} e^{-i\omega_k t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} e^{i\omega_k t} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \quad (\text{B.27})$$

体積 V 中の輻射場の全エネルギーは以下のように計算できる．

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3x (E^2 + B^2) \quad (\text{B.28})$$

これに式 (B.26)、(B.27) を代入する．計算が煩雑なので以下ではまず電場の自乗・磁場の自乗をそれぞれ分けて計算する．

$$\begin{aligned} \int_V d^3x E^2 &= \frac{1}{V} \int_V d^3x \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \sum_r \sum_{r'} \frac{\omega_k \omega_{k'}}{c^2} \vec{e}_{r,\vec{k}} \cdot \vec{e}_{r',\vec{k}'} \left(-q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}-i(\omega_k+\omega_{k'})t} \right. \\ &\quad \left. - q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}+i(\omega_k+\omega_{k'})t} \right. \\ &\quad \left. + (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')}) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}+i(\omega_k-\omega_{k'})t} \right) \\ &= \sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{\omega_k^2}{c^2} \left((q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)}) \right. \\ &\quad \left. + q_{\vec{k}}^{(r)} q_{-\vec{k}}^{(l)} e^{-i2\omega_k t} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{-\vec{k}}^{(l)\dagger} e^{i2\omega_k t} \right) \end{aligned}$$

ここで、 $-\vec{k}$ の波の偏光を指定する添字 l は、 $r=+$ の時 $l=-$ を $r=-$ の時 $l=+$ とする．さらに式 (B.23) と $\omega_{-\vec{k}} = \omega_{\vec{k}}$ を用いた．また $-\vec{k}$ の電磁波の偏光ベクトルと \vec{k} の電磁波の偏光ベクトルが以下の関係で結ばれることを用いた．

$$\vec{e}_{+,-\vec{k}} = -\vec{e}_{-,\vec{k}} \quad (\text{B.29})$$

$$\vec{e}_{-,-\vec{k}} = -\vec{e}_{+,\vec{k}} \quad (\text{B.30})$$

波数ベクトルと偏光ベクトルが直行することに注意して磁場の自乗を計算

する。

$$\begin{aligned}
\int_V d^3x B^2 &= \frac{1}{V} \int_V d^3x \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \sum_r \sum_{r'} (\vec{k} \times \vec{e}_{r,\vec{k}}) \cdot (\vec{k}' \times \vec{e}_{r',\vec{k}'}) (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')}) e^{i(\vec{k}+\vec{k}') \cdot \vec{x} - i(\omega_k + \omega_{k'})t} \\
&\quad + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} e^{-i(\vec{k}+\vec{k}') \cdot \vec{x} + i(\omega_k + \omega_{k'})t} \\
&\quad + (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')}) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x} + i(\omega_k - \omega_{k'})t} \\
&= \sum_{\vec{k}} \sum_r k^2 ((q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)}) \\
&\quad - q_{\vec{k}}^{(r)} q_{-\vec{k}}^{(l)} e^{-i2\omega_k t} - q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{-\vec{k}}^{(l)\dagger} e^{i2\omega_k t})
\end{aligned}$$

電場の自乗と比べると最後の二項の符号が逆になっておりキャンセルする。これは $(\vec{k} \times \vec{e}_{r,\vec{k}}) \cdot (-\vec{k} \times \vec{e}_{l,-\vec{k}}) = k^2$ であることからくる。これらの結果と分散関係式 (B.24) を用いると輻射場の全エネルギーは以下のように書ける。

$$U = \sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{\omega_k^2}{4\pi c^2} (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)}) \quad (\text{B.31})$$

電磁場の全運動量は以下の式で定義される。

$$\vec{M} = \frac{1}{4\pi c} \int_V d^3x \vec{E} \times \vec{B} \quad (\text{B.32})$$

電場と磁場の外積の項を取りだす。

$$\begin{aligned}
\int_V d^3x \vec{E} \times \vec{B} &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \sum_r \sum_{r'} \frac{\omega_k}{c} \vec{e}_{r,\vec{k}} \times (\vec{k}' \times \vec{e}_{r',\vec{k}'}) ((q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')}) \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \\
&\quad - q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} e^{-i2\omega_k t} \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} - q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} e^{i2\omega_k t} \delta_{\vec{k},-\vec{k}'} \\
&= \sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{\omega_k}{c} \vec{k} (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)}) \\
&\quad + \sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{\omega_k}{c} (-\vec{k}) (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{-\vec{k}}^{(l)} e^{-i2\omega_k t} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{-\vec{k}}^{(l)\dagger} e^{i2\omega_k t}) \\
&= \sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{\omega_k}{c} \vec{k} (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)}) \\
&\quad + \sum_{\vec{k}'} \sum_{r'} \frac{\omega_{k'}}{c} (\vec{k}') (q_{-\vec{k}'}^{(l')} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} e^{-i2\omega_{k'} t} + q_{-\vec{k}'}^{(l')\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} e^{i2\omega_{k'} t})
\end{aligned}$$

最後の二項を二つ目の等号では $\vec{k}' = -\vec{k}$ として計算し、三つ目の等号では

$\vec{k} = -\vec{k}'$ として計算した。また、 $\omega_{-k} = \omega_k$ を用いた。最後の等号の和をとる変数はダミー変数であるので \vec{k}', r' から \vec{k}, r に変換しても問題ない。また、 $q_{\vec{k}}^{(r)} q_{-\vec{k}}^{(r)} = q_{-\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)}$ であり $q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{-\vec{k}}^{(r)\dagger} = q_{-\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger}$ である。以上より最後の二項は二つ目の等号と三つ目の等号で符号が反転している。従って、最後の二項はゼロである。まとめると電磁場の全運動量は以下のように書ける。

$$\vec{M} = \sum_{\vec{k}} \sum_r \frac{\omega_k}{4\pi c^2} \vec{k} (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)}) \quad (\text{B.33})$$

電磁場の角運動量は各モード毎に以下の式で定義される。

$$\vec{L}_{r,\vec{k}} = (-1)^r \frac{1}{4\pi\omega_k} \int_V d^3x \vec{E}_{\vec{k}} \times \vec{B}_{\vec{k}} \quad (\text{B.34})$$

ここで右回り円偏光の時 $r=1$ を左回り円偏光 $r=2$ を取るように偏光ベクトルを選択し直した。従って、全運動量のフーリエ積分表示 (B.33) の和の中に c/ω_k を掛けて和をとれば全各運動量が以下のようにもとまる。

$$\vec{L} = \sum_{\vec{k}} \sum_r (-1)^r \frac{1}{4\pi c} \vec{k} (q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)}) \quad (\text{B.35})$$

B.3 量子化された輻射場のエネルギー・運動量・角運動量

ハイゼンベルグの運動方程式 (3.39) にベクトルポテンシャルのフーリエ積分表示 (B.25) を代入し、これを満たすようにフーリエ係数 $q_{\vec{k}}^{(r)}, q_{\vec{k}}^{(r)\dagger}$ の満たすべき交換関係式を求める。ハミルトニアンはエネルギーであるから式 (B.31) で計算される全エネルギー U が輻射場のハミルトニアン H である。ハイゼンベルグの運動方程式 (3.39) の左辺は以下のように計算される。

$$\frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{-i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r \omega_k \left(q_{\vec{k}}^{(r)} e^{-i\omega_k t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} e^{i\omega_k t} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \vec{e}_{r,\vec{k}} \quad (\text{B.36})$$

ベクトルポテンシャルのフーリエ係数の間に以下の交換関係を仮定する。

$$\left[q_{\vec{k}}^{(r)}, q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} \right] = \frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} \quad (\text{B.37})$$

$$\left[q_{\vec{k}}^{(r)}, q_{\vec{k}'}^{(r')} \right] = \left[q_{\vec{k}}^{(r)\dagger}, q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} \right] = 0 \quad (\text{B.38})$$

これから以下の式を得る.

$$\begin{aligned} \left[q_{\vec{k}}^{(r)}, q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} \right] &= q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} - q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)} \\ &= q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} - q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)} \\ &= q_{\vec{k}'}^{(r')} \left(\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} + q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)} \right) - q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)} \\ &= \frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} q_{\vec{k}'}^{(r')} \\ \left[q_{\vec{k}}^{(r)\dagger}, q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} \right] &= q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} - q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \\ &= q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} - q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} \\ &= q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} - \left(\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} + q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} \right) q_{\vec{k}'}^{(r')} \\ &= -\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} \\ \left[q_{\vec{k}}^{(r)}, q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} \right] &= q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} - q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}}^{(r)} \\ &= q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} - q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')} \\ &= q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} - \left(-\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} + q_{\vec{k}}^{(r)} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} \right) q_{\vec{k}'}^{(r')} \\ &= \frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} q_{\vec{k}'}^{(r')} \\ \left[q_{\vec{k}}^{(r)\dagger}, q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} \right] &= q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} - q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \\ &= q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} - q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \\ &= q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} \left(-\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} + q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \right) - q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} q_{\vec{k}'}^{(r')} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \\ &= -\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega_k} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \delta_{r,r'} q_{\vec{k}'}^{(r')\dagger} \end{aligned}$$

これらを用いてハイゼンベルグの運動方程式 (3.39) の右辺は以下のように計算される.

$$-\frac{i}{\hbar}[\vec{A}(\vec{x}, t), H] = -\frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_r \omega_k (q_{\vec{k}}^{(r)} e^{-i\omega_k t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} e^{i\omega_k t} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \vec{e}_{r,\vec{k}} \quad (\text{B.39})$$

式 (B.36)、(B.39) より、ベクトルポテンシャルのフーリエ係数が交換関係式 (B.37)、(B.38) を満たすの演算子の時、ベクトルポテンシャルがハイゼンベルグの運動方程式を満たすことが示せた。

次の式で $a_{\vec{k}}^{(r)}, a_{\vec{k}}^{(r)\dagger}$ を定義する。

$$a_{\vec{k}}^{(r)} \equiv \sqrt{\frac{2\omega_k}{4\pi\hbar c^2}} q_{\vec{k}}^{(r)} \quad (\text{B.40})$$

$$a_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \equiv \sqrt{\frac{2\omega_k}{4\pi\hbar c^2}} q_{\vec{k}}^{(r)\dagger} \quad (\text{B.41})$$

これらを交換関係式 (B.37)、(B.38) に代入すると以下の $a_{\vec{k}}^{(r)}, a_{\vec{k}}^{(r)\dagger}$ の間の交換関係式を得る。

$$[a_{\vec{k}}^{(r)}, a_{\vec{k}'}^{(r')\dagger}] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{r, r'} \quad (\text{B.42})$$

$$[a_{\vec{k}}^{(r)}, a_{\vec{k}'}^{(r')}] = [a_{\vec{k}}^{(r)\dagger}, a_{\vec{k}'}^{(r')\dagger}] = 0 \quad (\text{B.43})$$

これから分かるように $a_{\vec{k}}^{(r)}, a_{\vec{k}}^{(r)\dagger}$ は場を構成する量子、輻射場の場合光子、の消滅・生成演算子である。

消滅・生成演算子の定義式 (B.40)、(B.41) を式 (B.31) に代入し交換関係式 (B.42)、(B.43) を用いることで輻射場のエネルギーは以下のように書ける。

$$U = \sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar\omega_k \left(a_{\vec{k}}^{(r)\dagger} a_{\vec{k}}^{(r)} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{B.44})$$

右辺カッコの中の第一項は偏光状態 \vec{e}_r で波数ベクトルが \vec{k} の量子状態にある光子の数を固有値として持つ number operator である。第二項は、真空のゼロ点振動であり無限の数の状態に対する和の結果発散を招く。例として、偏光状態 \vec{e}_r で波数ベクトルが \vec{k} の量子状態に $n_{r,\vec{k}}$ 個フォトンが存在し、他の量子状態にはフォトンが入っていない状態 $|n_{r,\vec{k}}\rangle$ を取り上げる。この状態のエネルギーの期待値は以下ようになる。但し、ゼロ点振動の分は省く。

$$\langle n_{r,\vec{k}} | U | n_{r,\vec{k}} \rangle = \hbar \omega_k n_{r,\vec{k}}$$

この例から分かるように輻射場を構成する量子である光子は 1 個がエネルギー $\hbar \omega_k$ を持つ。

式 (B.33) に対して同様の手続きを行うことで輻射場の運動量に対する以下の式を得る。

$$\vec{M} = \sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar \vec{k} \left(a_k^{(r)\dagger} a_k^{(r)} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar \vec{k} a_k^{(r)\dagger} a_k^{(r)} \quad (\text{B.45})$$

最後の等号では、ゼロ点振動に対応する項が波数ベクトル \vec{k} に対する等方的なベクトル和であることからゼロになることを用いた。同様に式 (B.35) から輻射場の角運動量に対する以下の式を得る。

$$\vec{L} = \sum_{\vec{k}} \sum_r (-1)^r \hbar \frac{\vec{k}}{k} \left(a_k^{(r)\dagger} a_k^{(r)} + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\vec{k}} \sum_r (-1)^r \hbar \frac{\vec{k}}{k} a_k^{(r)\dagger} a_k^{(r)} \quad (\text{B.46})$$

右回り円偏光の時 $r = 1$ 、左回り円偏光の時 $r = 2$ を取る。これらから光子は、運動量 $\hbar \vec{k}$ を持ち、大きさが \hbar で向きが波数ベクトルと平行或いは反平行のスピ角運動量を持つ量子である。

付録 C

偏光 E、B モードとその電子散乱による生成

6.z 軸方向に伝搬する電磁波の電場成分が以下の式で与えられる場合を考える。

$$\begin{aligned} E_x &= a_1 e^{i(\omega t + \delta_1)} \\ E_y &= a_2 e^{i(\omega t + \delta_2)} \end{aligned}$$

ここで複素数表示を用いたのは計算の都合上であり、実際の電場はこれらの実部即ち $Re(E_x), Re(E_y)$ で表わされる。

6-1. 以下の式で coherency matrix を定義する。

$$J \equiv \begin{pmatrix} E_x E_x^* & E_x E_y^* \\ E_x^* E_y & E_y^* E_y \end{pmatrix}$$

この時式 (2.38) で定義される Stokes parameters を用いて以下のように書くことを示せ。

$$J \equiv \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{Q}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{U}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{V}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

6-2. 以下の4つの場合について電磁波の電場成分の振動方向を $x-y$ 平面内に図示せよ。(1) $\delta = 0, Q > 0, U = 0$, (2) $\delta = 0, Q < 0, U = 0$, (3) $\delta =$

0, $Q = 0, U > 0$, (4) $\delta = 0, Q = 0, U < 0$

6-3. 空のある領域が $\delta = 0$ 即ち直線偏光をしている場合を考える。空の座標を $\vec{x} = (x, y)$ で表わすとする。偏光観測により $I(x, y), Q(x, y), U(x, y)$ の分布がこの空の領域に対して得られたとする。これらを $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ ($\vec{k} = (k_x, k_y)$) によりフーリエ変換した結果 $\hat{I}(\vec{k}), \hat{Q}(\vec{k}), \hat{U}(\vec{k})$ を用いて coherency matrix のフーリエスペクトルは以下のように書ける。

$$\hat{J}(\vec{k}) \equiv \frac{\hat{I}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\hat{Q}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\hat{U}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

波数ベクトル \vec{k} と x 軸のなす角を θ (x から \vec{k} へ反時計回りを正とする) とし、座標を反時計回りに角 θ 回転し x 軸を \vec{k} 方向と一致させた新しい座標系を (x', y') とする。変換後の'系での coherency matrix が以下のように書ける事を示せ。

$$\hat{J}'(\vec{k}) \equiv \frac{\hat{I}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\hat{E}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\hat{B}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

但し、

$$\begin{aligned} \hat{E}(\vec{k}) &\equiv \hat{Q}(\vec{k})\cos 2\theta + \hat{U}(\vec{k})\sin 2\theta \\ \hat{B}(\vec{k}) &\equiv -\hat{Q}(\vec{k})\sin 2\theta + \hat{U}(\vec{k})\cos 2\theta \end{aligned}$$

6-4. 偏光状態が

$$\frac{\hat{E}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で表わされるモードを偏光の E モード

$$\frac{\hat{B}(\vec{k})}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で表わされるモードを偏光の B モードと呼ぶ。E モードのみが存在する場合即ち $\hat{B} = 0$ の場合の偏光状態、及び B モードのみが存在する場合即ち $\hat{E} = 0$ の場合の偏光状態を波数ベクトル \vec{k} に対する相対的關係に特に注意して図

示せよ。

6-5. 6-4. で与えられた $\hat{E}(\vec{k})$ の定義式両辺に $-k^2$ を掛け $k_x = k\cos\theta, k_y = k\sin\theta$ を用いて変形すると以下式が得られることを示せ。

$$-k^2\hat{E}(\vec{k}) = -(k_x^2 - k_y^2)\hat{Q}(\vec{k}) - 2k_xk_y\hat{U}(\vec{k})$$

6-6. フーリエ逆変換の公式

$$E(\vec{x}) = \int d^2k \hat{E}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$Q(\vec{x}) = \int d^2k \hat{Q}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$$U(\vec{x}) = \int d^2k \hat{U}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

を用いて 6-5 で得られた結果をフーリエ逆変換することで以下の式が得られることを示せ。

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)E(\vec{x}) = (\partial_x^2 - \partial_y^2)Q(\vec{x}) + 2\partial_x\partial_yU(\vec{x})$$

ここで

$$\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}$$

6-7. E モードと同様の手続きを B モードに施し以下式を満たすことを示せ。

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)B(\vec{x}) = -2\partial_x\partial_yQ(\vec{x}) + (\partial_x^2 - \partial_y^2)U(\vec{x})$$

8 任意の方向 $\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ から飛来する無偏光電磁波の原点に存在する電子による散乱を考える。観測者の視線方向 \vec{n}' を z 軸にとる。

8-1 入射光の偏光成分を進行方向 $-\vec{n}$ と視線方向 z 軸が作る平面（これを入射平面と呼ぶ）内の成分とその平面に垂直な成分の 2 成分に分離しそれぞれの偏光ベクトルを \vec{e}_1, \vec{e}_2 とする。以下の式を示せ。

$$\vec{e}_1 = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)$$

$$\vec{\epsilon}_2 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$$

8-2 同様に散乱波の偏光成分を入射平面内の成分とそれと垂直な成分に分離しそれぞれの偏光ベクトルを $\vec{\epsilon}'_1, \vec{\epsilon}'_2$ とする。以下の式を示せ。

$$\begin{aligned}\vec{\epsilon}'_1 &= (\cos\phi, \sin\phi, 0) \\ \vec{\epsilon}'_2 &= (-\sin\phi, \cos\phi, 0)\end{aligned}$$

8-3 入射波の偏光ベクトルが一般の方向を向いた $\vec{\epsilon}_{in}$ でその散乱波の偏光ベクトルが $\vec{\epsilon}_{out}$ の時トムソン散乱の微分断面積が以下の式で書ける事を説明せよ。式 (3.3) の結果を用いてよい。

$$\frac{d\sigma(\vec{n}', \vec{n})}{d\Omega'} = r_0^2 (\vec{\epsilon}_{in} \cdot \vec{\epsilon}_{out})^2$$

8-4 入射フラックス $S/2$ 、偏光ベクトル $\vec{\epsilon}_1$ の入射波の散乱波の x 成分 y 成分の強度がそれぞれ

$$\begin{aligned}\frac{dP_x^{(1)}(\vec{n}', \vec{n})}{d\Omega'} &= \frac{S}{2} r_0^2 (\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{x})^2 \\ \frac{dP_y^{(1)}(\vec{n}', \vec{n})}{d\Omega'} &= \frac{S}{2} r_0^2 (\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{y})^2\end{aligned}$$

と書ける事を示せ。ここで \vec{x}, \vec{y} は x, y 方向の単位ベクトルである。同様に偏光ベクトルが $\vec{\epsilon}_2$ の入射波に対して

$$\begin{aligned}\frac{dP_x^{(2)}(\vec{n}', \vec{n})}{d\Omega'} &= \frac{S}{2} r_0^2 (\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{x})^2 \\ \frac{dP_y^{(2)}(\vec{n}', \vec{n})}{d\Omega'} &= \frac{S}{2} r_0^2 (\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{y})^2\end{aligned}$$

を示せ。

8-5 入射波が無偏光の時散乱波のストークスパラメータ Q, U がそれぞれ以下の式で書ける事を示せ。

$$\begin{aligned}Q(\vec{n}', \vec{n}) &= \frac{S}{2} r_0^2 [(\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{x})^2 + (\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{x})^2 - (\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{y})^2 - (\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{y})^2] \\ U(\vec{n}', \vec{n}) &= \frac{S}{2} r_0^2 2 [(\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{x})(\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{y}) + (\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{x})(\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{y})]\end{aligned}$$

ここで入射波の二つの独立な偏光成分の入射フラックスがそれぞれ S であ

るとした。

8-6 \vec{n} の方向から飛来する入射電磁波の強度が $S(\vec{n})$ で与えられる時、観測される Q, U が次の式で与えられることを説明せよ。

$$Q(\vec{n}') = - \int d\Omega \frac{S(\vec{n})}{2} r_0^2 (1 - \cos^2 \theta) \cos 2\phi$$

$$U(\vec{n}') = - \int d\Omega \frac{S(\vec{n})}{2} r_0^2 (1 - \cos^2 \theta) \sin 2\phi$$

9 スカラーモードによる偏光の生成：状況設定は、 $S(\vec{n})$ の起源がスカラーモードであることを除いては問題 8 と同じとする。

9-1 電子が密度 500cm^{-3} で宇宙に一様に分布しているとする。この時、光のトムソン散乱に対する平均自由行程がいくらか光年単位で答えよ。

9-2 原点に存在する電子から見て空間が

$$\vec{r}(t) = (1 + \Phi(t) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_0 + \alpha)) \vec{r}_0$$

にしたがって波数ベクトル \vec{k} で波打ちながら膨張 $\Phi > 0$ 、収縮 $\Phi < 0$ をしているとする。ここで Φ は $\Phi \ll 1$ の振動関数であり $\Phi(0) = 0$ をみたし、 $t = 0$ の時の空間座標を \vec{r}_0 とした。 α は原点での位相である。電子からみて光が飛来する方向

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

が

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_0}{r_0}$$

と書けることを示せ。

9-3 距離の伸び縮みに比例して光の波長が伸び縮みするとすると \vec{n} の方向から電子に向かって飛来する光の周波数が

$$\nu = (1 - \Phi(t) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_0 + \alpha)) \nu_0$$

となることを示せ。ここで ν_0 は $t = 0$ の時の光の周波数である。また微量の 2 次以上は無視した。

9-4 温度 T_0 で熱平衡状態にある物体からの放射では、振動数 ν_0 の一つの

量子状態を占める光子の数が Planck 分布関数

$$\frac{1}{e^{\frac{h\nu_0}{k_B T_0}} - 1}$$

で与えられる。ここで h は Planck 定数、 k_B はボルツマン定数。この時 9-3 の状況下で振動数が変化することは、温度が

$$T = T_0(1 - \Phi(t)\cos(\vec{k} \cdot \vec{r}_0 + \alpha))$$

に変化したことと等価であることを示せ。

9-5 簡単のため原点の電子により散乱される光は、光の平均自由行程程度 ℓ_T の場所にいた光のみであるとする。以下 $2\pi/k \gg \ell_T$ の場合を扱う。空間伸び縮みの周期は、平均自由時間に比べて十分長く $\Phi(t)$ の時間変化は無視できるものとする。テイラー展開することで

$$\delta T = T - T_0 \sim -T_0(\cos\alpha - \sin\alpha(\vec{n} \cdot \vec{k})\ell_T - \frac{1}{2}\cos\alpha(\vec{n} \cdot \vec{k})^2\ell_T^2)\Phi(t)$$

と書ける事を示せ。

9-6 上記の設定では放射強度は温度 T に比例する。従って、空間の伸び縮みによる放射強度のムラは δT に比例し、 $S(\vec{n}) = A\delta T(\vec{n})$ である。これを問題 8-6 で求めた式に代入し

$$Q(\vec{n}') = -\frac{2\pi}{15}T_0\cos\alpha\ell_T^2r_0^2(k_x^2 - k_y^2)A\Phi(t)$$

$$U(\vec{n}') = -\frac{2\pi}{15}T_0\cos\alpha\ell_T^22r_0^2k_xk_yA\Phi(t)$$

となることを示せ。

9-7 9-6 の結果を用いて、偏光 E モード・B モードを計算せよ。

9-8 α を $-\pi \sim \pi$ の範囲を連続的に変えることは電子の位置を空間伸び縮みの谷から谷へ一周分変化させたことになる。このことと 9-6 の結果を用いて空間伸び縮みの波と偏光方向の関係を図中に図示せよ。但し、 $k_x \neq 0, k_y \neq 0$ とする。

10 テンサーモードによる偏光の生成：notation 及び状況設定は、特に断らない限り問題 9 と同じである。

10-1 空間が、($h_X > 0$ の時) xy 平面に平行に x 軸に対して 45° 方向 (X 軸) に伸び、 135° 方向 (Y 軸) に縮む振動をしている。以下の式に従って伸び縮みしているとする。

$$X = (1 + h_X(t) \cos kz) X_0$$

$$Y = (1 - h_X(t) \cos kz) Y_0$$

ここで波数ベクトルの方向を z 軸と一致させた。 $h_X \ll 1$ である。以下の式を示せ

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)$$

$$x = x_0 + h_X(t) \cos kz y_0$$

$$y = y_0 + h_X(t) \cos kz x_0$$

10-2 9-4,5 にならって温度 T_0 の熱平衡分布から放射強度が

$$S(\vec{n}') = -AT_0 2h_X(t) n_{x0} n_{y0} \cos kz$$

だけムラができることを示せ。ここで

$$n_{x0} = \frac{x_0}{r_0}, \quad n_{y0} = \frac{y_0}{r_0}$$

9-5 ではコサインパートを 2 次までテーラー展開した。理由は、0 次がモノポールしか含まないからである。今回は 0 次が四重極から始まっているためコサインをテーラー展開する必要は無く、やっても高次の微量が加わるだけである。

10-3 ここまでは \vec{k} が z 軸即ち視線方向と一致している特殊な場合を扱ってきた。この時の $\vec{k} = \vec{k}_0$ とする。そこで $\vec{k} = k(\sin\theta_k \cos\phi_k, \sin\theta_k \sin\phi_k, \cos\theta_k)$ なる任意の方向を向いた一般の場合に拡張する。 \vec{k}_0 から \vec{k} へ変換は、 \vec{k}_0 を z 軸の周りに角度 ϕ_k 回転し付随する xy 軸を $x'y'$ 軸に変換する。次に y' 軸を軸として角 θ_k, z から z へ回転する。この変換を表す行列が以下のように書ける事を示せ。ベクトル $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ が写る先を調べればわかる。以後変換後の xy 軸を x_k, y_k と呼ぶ。

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta_k \cos\phi_k & -\sin\phi_k & \sin\theta_k \cos\phi_k \\ \cos\theta_k \sin\phi_k & \cos\phi_k & \sin\theta_k \sin\phi_k \\ -\sin\theta_k & 0 & \cos\theta_k \end{pmatrix}$$

10-4 10-2 の結果は、 x_k, y_k, z_k 座標に於ける方向余弦の成分を用いれば、

$$S(\vec{n}') = -AT_0 2h_X(t) n_{x_k} n_{y_k}$$

と書ける事を示している。ここでは簡単のため $\vec{r}_0 = 0$ とした。

$$\begin{pmatrix} n_{x_k} \\ n_{y_k} \\ n_{z_k} \end{pmatrix} = {}^t R \begin{pmatrix} n_{x0} \\ n_{y0} \\ n_{z0} \end{pmatrix}$$

を用いて $S(\vec{n}')$ を計算し 9-6 を用いて Q, U を計算せよ。

10-5 偏光 B モード・E モードを計算せよ。

10-6 10-2 から 10-5 までの事を以下の場合についてもやれ。空間が、($h_+ > 0$ の時) xy 平面に平行に x 軸に伸び、 y 軸に縮む振動をしている。以下の式に従って伸び縮みしているとする。

$$\begin{aligned} x &= (1 + h_+(t) \cos kz) x_0 \\ y &= (1 - h_+(t) \cos kz) y_0 \end{aligned}$$

ここで波数ベクトルの方向を z 軸と一致させた。 $h_+ \ll 1$ である。

付録 D

弱い相互作用

ここでは、宇宙初期の軽元素合成期の熱史を議論する上で重要な弱い相互作用の基礎についてまとめる。弱い相互作用が関与する代表的な反応は以下のベータ崩壊である。



中性子は、(ddu) の三つのクォークから構成され、陽子は (duu) の三つのクォークから構成される。ベータ崩壊 (D.1) は、クォークレベルでは、中性子の中の一つの d クォークが弱い相互作用を媒介するゲージ粒子の一つである W^- を媒介として u クォークに代わり、同時に e^- と $\bar{\nu}_e$ を放出する過程である。図 D.1 にベータ崩壊のファイマンダイアグラムを載せた。左の図

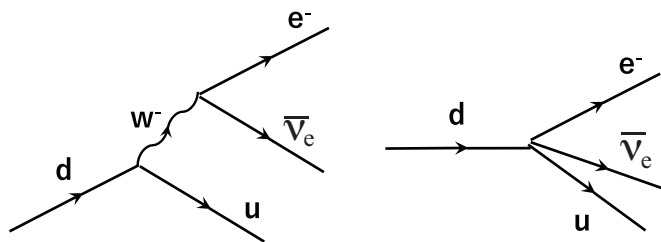


図 D.1 ベータ崩壊のファイマンダイアグラム。左ゲージボソン交換相互作用として、右古典的な一点での相互作用として表現。

が、ゲージボソン交換を含めてフルに相互作用の様子を表している。右図は、ゲージボソン交換は考慮せず一点で反応が起きているとしている。右図の描像がフェミルがとったオリジナルな描像（但し、フェルミの時代にはクオークの存在が知られていなかったので、 d は n に u は p に置き換える必要がある）であり、これを古典的或いは現象論的扱いと呼ぶことにする。ここでは、 $e^- + \nu_e \rightarrow e^- + \nu_e$ のような弱い相互作用が関与する反応の断面積の導出に興味があるので、古典的扱いの範囲で解説する。

D.1 Dirac 方程式

弱い相互作用反応を記述するには、スピン 1/2 のフェルミ粒子の量子論が必要である。スピン 1/2 の粒子の量子力学的振る舞いを記述する方程式が Dirac 方程式である。この節の目的は、Dirac 方程式の導出である。

電子は、スピン角運動量 $\vec{s} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ を持つ荷電粒子である。スピン角運動量に伴う電子の磁気モーメントが以下のように与えられる。

$$\vec{\mu}_e = -eg_e/2mc\vec{s} = -\frac{\hbar eg_e}{4mc} \vec{\sigma} \quad (\text{D.2})$$

g_e は磁気回転比と呼ばれる量で、古典電磁気学的には $g_e = 1$ が期待されるが、実験から $g_e = 2$ であることが分かっている。磁気モーメントを持つことが顕著に現れる現象は、磁場との相互作用により以下の項がハミルトニアンに現れることである。

$$H_{int} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (\text{D.3})$$

そこで電磁場中の電子のハミルトニアンの拡張を行う。公式 (G.7) より

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = p^2$$

であるから自由な電子のハミルトニアンを以下のようにパウリのスピン行列を含んだ形に拡張できる。

$$H_f = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{2m} \quad (\text{D.4})$$

電磁場中の電子のハミルトニアンは、置き換え (F.5) によって以下のように

書ける。

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right] \cdot \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right] - e\phi \\
&= \frac{1}{2m} \left[\left(\vec{P} \cdot \vec{P} + \frac{2e}{c} (\vec{A} \cdot \vec{P}) + \frac{e^2}{c^2} A^2 \right) I + i \frac{e}{c} \vec{\sigma} \cdot (\vec{P} \times \vec{A}) \right] - e\phi \\
&= \frac{1}{2m} \left(\vec{P} \cdot \vec{P} + \frac{2e}{c} (\vec{A} \cdot \vec{P}) + \frac{e^2}{c^2} A^2 \right) I + \frac{\hbar e}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} - e\phi \\
&= \frac{1}{2m} \left(\vec{P} \cdot \vec{P} + \frac{2e}{c} (\vec{A} \cdot \vec{P}) + \frac{e^2}{c^2} A^2 \right) I - \vec{\mu} \cdot \vec{B} - e\phi \quad (\text{D.5})
\end{aligned}$$

途中 $\vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, さらに $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ なるゲージを選択したことを用いた。最後の式変形では電子の磁気モーメントの実験結果 (D.2) を用いた。以上の結果は、ここで行なった拡張により電子のスピンに由来する磁気モーメントと磁場との相互作用を導出でき、且つ電子の磁気回転比が 2 であることも導くことができることを示しており、式 (D.4) でとった拡張が妥当であることを裏付けている。

以上の考察を元に相対論的運動をする電子の量子力学的方程式を以下の手続きで導出する。

$$(mc)^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = \frac{E^2}{c^2} - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \left(\frac{E}{c} I - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \right) \left(\frac{E}{c} I + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \right) \quad (\text{D.6})$$

二成分の波動関数

$$\psi = \begin{pmatrix} \sim \\ \sim \end{pmatrix}$$

を導入して式 (D.6) を演算子に置き換えて波動方程式に書き換えると

$$(i\hbar\partial_0 + i\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})(i\hbar\partial_0 - i\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi = (mc)^2\psi \quad (\text{D.7})$$

を得る。ここで $x^0 = ct$ である。ここで方程式 (D.7) の解を求めるため、以下の二つの二成分関数を導入する。

$$(i\hbar\partial_0 + i\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi^{(R)} = mcI\psi^{(L)} \quad (\text{D.8})$$

$$(i\hbar\partial_0 - i\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi^{(L)} = mcI\psi^{(R)} \quad (\text{D.9})$$

方程式 (D.8) と (D.9) の和と差を取るとそれぞれ以下の方程式に還元さ

れる。

$$i\hbar\partial_0(\psi^{(R)} + \psi^{(L)}) + i\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}(\psi^{(R)} - \psi^{(L)}) = mc(\psi^{(R)} + \psi^{(L)}) \quad (\text{D.10})$$

$$i\hbar\partial_0(\psi^{(R)} - \psi^{(L)}) + i\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}(\psi^{(R)} + \psi^{(L)}) = -mc(\psi^{(R)} - \psi^{(L)}) \quad (\text{D.11})$$

和と差を $\psi_A = \psi^{(R)} + \psi^{(L)}$ 、 $\psi_B = \psi^{(R)} - \psi^{(L)}$ と定義し、4成分のスピンオール ψ を以下のように定義すると

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad (\text{D.12})$$

方程式 (D.10) と (D.11) は以下のようにまとめられる。

$$i\hbar\partial_0\psi + i\hbar\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}\psi = mc\beta\psi \quad (\text{D.13})$$

ローレンツ不変な形にするためこの方程式の両辺に左から β すなわち γ^0 を書けると次の形にまとまる。

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc\psi \quad (\text{D.14})$$

Dirac 方程式 (D.14) のエルミート共役を取ると以下ようになる。

$$\begin{aligned} -i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger} - \frac{mc}{\hbar}\psi^\dagger &= 0 \\ \psi^\dagger &= (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

方程式 (D.15) に右から γ^0 を掛けて変形を進める。

$$\begin{aligned} 0 &= -i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^0 - \frac{mc}{\hbar}\psi^\dagger\gamma^0 \\ &= -i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu - \frac{mc}{\hbar}\psi^\dagger\gamma^0 \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

となる。ここで以下で定義される随伴 (adjoint) スピノールを用いると

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, \psi_4^*) \quad (\text{D.17})$$

方程式 (D.16) は以下のように書ける。

$$-i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - \frac{mc}{\hbar}\bar{\psi} = 0 \quad (\text{D.18})$$

Dirac 方程式は以下のノーテーションを用いるとコンパクトに表記できる。

$$\vec{\partial}\psi = \gamma^\mu \partial_\mu \psi, \quad \overleftarrow{\partial}\bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \quad (\text{D.19})$$

以後任意の 4 元ベクトル a とガンマ行列との内積をスラッシュをつけて $\not{a} = a_\mu \gamma^\mu$ のように表す。Dirac 方程式とその随伴方程式は以下のように書ける。

$$i\vec{\partial}\psi - \frac{mc}{\hbar}\psi = 0 \quad (\text{D.20})$$

$$-i\overleftarrow{\partial}\bar{\psi} - \frac{mc}{\hbar}\bar{\psi} = 0 \quad (\text{D.21})$$

方程式 (D.20) に左から $\bar{\psi}$ を方程式 (D.21) に右から ψ を掛けて差を取ると以下の結果を得る。

$$0 = i\bar{\psi}\vec{\partial}\psi + i\overleftarrow{\partial}\bar{\psi}\psi = i\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \quad (\text{D.22})$$

方程式 (D.22) は 4 元カレント

$$j^\mu = c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (c\psi^\dagger\psi, c\psi^\dagger\alpha^i\psi) \quad (\text{D.23})$$

が連続の式を満たすことを示している。ここで

$$\psi^\dagger\psi = \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4 > 0 \quad (\text{D.24})$$

であり、 j^0 は正の値を取る。したがって、これを確率密度と解釈することができ、連続の式 (D.22) は Dirac 方程式に従う系の確率保存則を表す。式 (D.23) に現れた $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ の形を双一次形式 (bilinear covariants) と呼ぶ。

D.2 負エネルギー粒子の Feynman の解釈とスカラー場の量子化

Dirac 方程式の詳細の解説に入る前に、自由なスカラー粒子を例にとって負エネルギー粒子の Feynman の解釈を解説する。自由なスカラー粒子の量子力学的方程式 (H.8) の平面波解は $\phi = Ne^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ の形で書け

$$\omega_k = +\sqrt{k^2 c^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2} \quad (\text{D.25})$$

$$\omega_k = -\sqrt{k^2 c^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2} \quad (\text{D.26})$$

の正エネルギー解と負エネルギー解が存在する。ここで N は規格化因子 (Normalization factor) である。スカラー粒子 (スピン 0 の粒子) の例として π^+ を考える。自由なスカラー粒子の 4 元保存カレントは式 (H.10) から $j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$ である。したがって、 π^+ の 4 元電流は以下のように書ける。

$$j^\mu \pi^+ = +e j^\mu = +e 2|N|^2 \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \quad (\text{D.27})$$

同様の考察から正のエネルギー $\hbar\omega$ を持ち \vec{k} の方向に進行する反粒子 π^- の 4 元電流が以下のように書けることは自明である。

$$j^\mu \pi^- = -e j^\mu = -e 2|N|^2 \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) = +e 2|N|^2 \left(-\frac{\omega}{c}, -\vec{k}\right) \quad (\text{D.28})$$

最後の式変形から反粒子の存在は、絶対値が同じの負のエネルギーを持ち反粒子と逆方向に進行する粒子の存在と等価であることが分かる。このことから類推して Feynman は、負エネルギー粒子解は、絶対が同じ正のエネルギーを持ち逆方向に進行する反粒子の運動を表すという解釈を与えた。

電荷を持たず粒子と反粒子の区別が無い粒子の場合は、負エネルギー粒子の存在は、絶対値が同じで逆方向に進行する粒子が消滅したと解釈すれば良いことになる。そこで次の交換関係

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = 0, \quad [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \quad (\text{D.29})$$

を満たす生成消滅演算子 $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^\dagger$ を用いて粒子反粒子の区別がないスカラー粒子で構成されるスカラー場を次のように表す。

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (a_{\vec{k}} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}) \quad (\text{D.30})$$

すると例えばハミルトニアンは以下のように書ける。

$$H = \int_V d^3x \left[\frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2 \right]$$

$$= \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k \left(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{D.31})$$

$$\hbar \omega_k = \sqrt{(\hbar kc)^2 + (mc^2)^2} \quad (\text{D.32})$$

この結果からスカラー場がエネルギー量子 $\hbar \omega_k$ を持ったスカラー粒子の集まりとして表現できることが分かる。

粒子と反粒子の区別があるスカラー場を量子化するには、 a, a^\dagger を粒子の生成消滅演算子とし、反粒子の生成消滅演算子として b, b^\dagger を導入する。

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \left(a_{\vec{k}} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + b_{\vec{k}}^\dagger e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right) \quad (\text{D.33})$$

D.3 Dirac 方程式の平面波解

Dirac スピノールを二成分スピノール ϕ, χ を用いて以下のように置く。

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{D.34})$$

Dirac 方程式に代入すると以下の式をえる。

$$i \frac{1}{c} \partial_t \phi = \frac{mc}{\hbar} \phi - i \sigma_i \partial_i \chi \quad (\text{D.35})$$

$$-i \frac{1}{c} \partial_t \chi = \frac{mc}{\hbar} \chi + i \sigma_i \partial_i \phi \quad (\text{D.36})$$

平面波解

$$\phi = \phi^s(k) e^{ik \cdot x}, \quad \chi = \chi^s(k) e^{ik \cdot x} \quad (\text{D.37})$$

を代入して粒子が静止している場合、即ち $\vec{k} = 0$ とすると ϕ は $k^0 = mc/\hbar$ 即ち正エネルギー解、 χ は $k^0 = -mc/\hbar$ 即ち負エネルギー解となる。ここで

$$k \cdot x = -k^0 ct + \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (\text{D.38})$$

である。負エネルギー解を $|k^0|$ の正のエネルギーを持ち $-\vec{k}$ 方向に進行する反粒子とみなす。静止した正エネルギー解、負エネルギー解を表す二成分スピノールはそれぞれ以下の二つの独立な解を持つ。

$$\phi^1\left(\frac{mc}{\hbar}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi^2\left(\frac{mc}{\hbar}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi^1\left(-\frac{mc}{\hbar}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^2\left(-\frac{mc}{\hbar}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.39})$$

この解釈に従って、Dirac 方程式の粒子解と反粒子解を以下の定義により導入する。

$$\psi^{(+)}(x) = u(k)e^{ik \cdot x}, \quad \psi^{(-)}(x) = v(k)e^{-ik \cdot x} \quad (\text{D.40})$$

ここで $k^0 = \sqrt{k^2 + (mc/\hbar)^2} = E/\hbar c$ の正の値をとる。これらを Dirac 方程式に代入することで u, v の満たす方程式が得られる。

$$\left(k + \frac{mc}{\hbar}\right) u(k) = 0 \quad (\text{D.41})$$

$$\left(k - \frac{mc}{\hbar}\right) v(k) = 0 \quad (\text{D.42})$$

随伴スピノールが満たす方程式は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} 0 &= u^\dagger(k) \left(k^\dagger + \frac{mc}{\hbar}\right) \gamma^0 = u^\dagger(k) \gamma^0 \left(k_\mu \gamma^\mu + \frac{mc}{\hbar}\right) \\ &= \bar{u}(k) \left(k_\mu \gamma^\mu + \frac{mc}{\hbar}\right) = \bar{u}(k) \left(k + \frac{mc}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

$$0 = \bar{v}(k) \left(k - \frac{mc}{\hbar}\right) \quad (\text{D.44})$$

静止解 ($\vec{k} = 0$) が満たす方程式は以下のようなになる。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^0 + \frac{mc}{\hbar} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^0 + \frac{mc}{\hbar} \end{pmatrix} u(k) = 0 \quad (\text{D.45})$$

$$\begin{pmatrix} -k^0 - \frac{mc}{\hbar} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k^0 - \frac{mc}{\hbar} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v(k) = 0 \quad (\text{D.46})$$

したがって、静止した粒子解、反粒子解としてそれぞれ以下の二つの独立な解を得る。

$$u^1\left(\frac{mc}{\hbar}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^2\left(\frac{mc}{\hbar}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^1\left(\frac{mc}{\hbar}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^2\left(\frac{mc}{\hbar}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.47})$$

ここで

$$\left(\not{k} - \frac{mc}{\hbar}\right) \left(\not{k} + \frac{mc}{\hbar}\right) = (k^0)^2 - k^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 = 0 \quad (\text{D.48})$$

の関係式から $\vec{k} \neq 0$ の時の方程式 (D.45) および (D.46) の解が以下のように書けることが分かる。

$$\begin{aligned} u^s(k) &= -\frac{\not{k} - \frac{mc}{\hbar}}{\sqrt{\frac{2mc}{\hbar} \left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c}\right)}} u^s\left(\frac{mc}{\hbar}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2mc}{\hbar} \left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c}\right)}} \begin{pmatrix} \left(\frac{E}{\hbar c} + \frac{mc}{\hbar}\right) \phi^s(mc/\hbar, 0) \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \phi^s(mc/\hbar, 0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\frac{E}{\hbar c} + \frac{mc}{\hbar}}{\frac{2mc}{\hbar}}} \phi^s(mc/\hbar, 0) \\ \frac{\vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{\sqrt{\frac{2mc}{\hbar} \left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c}\right)}} \phi^s(mc/\hbar, 0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.49})$$

$$\begin{aligned} v^s(k) &= \frac{\not{k} + \frac{mc}{\hbar}}{\sqrt{\frac{2mc}{\hbar} \left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c}\right)}} v^s\left(\frac{mc}{\hbar}, 0\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{\sqrt{\frac{2mc}{\hbar} \left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c}\right)}} \chi^s(-mc/\hbar, 0) \\ \sqrt{\frac{\frac{E}{\hbar c} + \frac{mc}{\hbar}}{\frac{2mc}{\hbar}}} \chi^s(-mc/\hbar, 0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.50})$$

それぞれの随伴スピノールは以下ようになる。以下計算を簡略化するため $\hbar = c = 1$ とする。

$$\begin{aligned} \bar{u}^s(k) &= u^{s\dagger}(k) \gamma^0 = u^{s\dagger}(m, 0) \gamma^0 \gamma^0 \frac{-k_\nu \gamma^{\nu\dagger} + m}{\sqrt{2m(m+E)}} \gamma^0 \\ &= \bar{u}^s(m, 0) \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{2m(m+E)}} \end{aligned} \quad (\text{D.51})$$

$$\bar{v}^s(k) = \bar{v}^s(m, 0) \frac{\not{k} + m}{\sqrt{2m(m+E)}} \quad (\text{D.52})$$

したがって、これらのノルムを取ると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \bar{u}^s(k)u^{s'}(k) &= \delta_{ss'}, & \bar{u}^s(k)v^{s'}(k) &= 0 \\ \bar{v}^s(k)v^s(k) &= -\delta_{ss'}, & \bar{v}^s(k)u^s(k) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.53})$$

ここで

$$\bar{u}^s(m, 0) = (\phi^s(m, 0), 0, 0), \quad \bar{v}^s(m, 0) = (0, 0, -\chi^s(-m, 0)) \quad (\text{D.54})$$

であることを使った。方程式 (D.41),(D.42) から

$$\left(\not{k} + \frac{mc}{\hbar}\right) \psi^{(+)} = 0 \quad (\text{D.55})$$

$$\left(\not{k} - \frac{mc}{\hbar}\right) \psi^{(-)} = 0 \quad (\text{D.56})$$

方程式 (D.43),(D.44) から随伴スピノールの方程式

$$\bar{\psi}^{(+)} \left(\not{k} + \frac{mc}{\hbar}\right) = 0 \quad (\text{D.57})$$

$$\bar{\psi}^{(-)} \left(\not{k} - \frac{mc}{\hbar}\right) = 0 \quad (\text{D.58})$$

を得る。式 (D.55),(D.56) に左から γ^0 を掛け、式 (D.57),(D.58) に右から γ^0 を掛けてそれぞれ足すと 4 元カレントの第ゼロ成分は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{(+s)}(x) \gamma^0 \psi^{(+s)'}(x) &= -\bar{\psi}^{(+s)}(x) \frac{\{\not{k}, \gamma^0\}}{2mc/\hbar} \psi^{(+s)'}(x) = \frac{E}{mc^2} \delta_{ss'} \\ \bar{\psi}^{(-s)}(x) \gamma^0 \psi^{(-s)'}(x) &= \bar{\psi}^{(-s)}(x) \frac{\{\not{k}, \gamma^0\}}{2mc/\hbar} \psi^{(-s)'}(x) = \frac{E}{mc^2} \delta_{ss'} \end{aligned} \quad (\text{D.59})$$

自由粒子のスピノールは以下のように書ける。

$$\psi = u(k, s) e^{ik \cdot x} \quad (\text{D.60})$$

自由反粒子のスピノールは以下のように書ける。

$$\psi = v(k, s) e^{-ik \cdot x} \quad (\text{D.61})$$

運動する自由粒子即ち $\vec{k} \neq 0$ の場合、粒子のスピンのは運動方向を軸にとり、スピンの向きが運動方向を向いているか、反対方向を向いているかで表現

するのが適切である。そこで以下で定義されるヘリシティー演算子を導入する。

$$h(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{|\vec{k}|} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{|\vec{k}|} \end{pmatrix} \quad (\text{D.62})$$

公式 (G.7) より $(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) = k^2 I$ であり $\beta h(\vec{k}) = h(\vec{k})\beta$ であることから、この演算子と自由粒子の Dirac 方程式 (D.41) と (D.42) の左辺に現れる演算子が交換する。したがって、演算子 $h(\vec{k})$ の固有状態は自由粒子の Dirac 方程式の同時固有状態である。ヘリシティー演算子の固有値 λ を求める。固有値方程式以下のようになる。

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \lambda I - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} & 0 \\ 0 & \lambda I - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \end{vmatrix} = \lambda^4 - 2 \left| \lambda \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \right| + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \\ &= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 \end{aligned} \quad (\text{D.63})$$

したがって、固有値は二つの二重に縮退した ± 1 となる。一般性を失うことなく粒子の進行方向を z 軸に取ることができる。そこで $\vec{k} = (0, 0, k)$ の場合を扱う。自由粒子解 (D.49)、(D.50) は以下のようになる。

$$u^1(k) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+E)}} \begin{pmatrix} E+m \\ 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.64})$$

$$u^2(k) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+E)}} \begin{pmatrix} 0 \\ E+m \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} \quad (\text{D.65})$$

$$v^1(k) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+E)}} \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ E+m \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.66})$$

$$v^2(k) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+E)}} \begin{pmatrix} 0 \\ -k \\ 0 \\ E+m \end{pmatrix} \quad (\text{D.67})$$

ヘリシティー演算子は以下ようになる。

$$h_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.68})$$

各状態のヘリシティーは以下ようになる。

$$\begin{aligned} h_3 u^1(k) &= +u^1(k), & h_3 u^2(k) &= -u^2(k), \\ h_3 v^1(k) &= +v^1(k), & h_3 v^2(k) &= -v^2(k) \end{aligned} \quad (\text{D.69})$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \phi^1 &= +\phi^1, & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \phi^2 &= -\phi^2 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \chi_+ &= +\chi^1, & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \chi_- &= -\chi^2 \end{aligned} \quad (\text{D.70})$$

進行方向が z 軸に平行な時即ち $\vec{k} = (0, 0, k)$ の時、 $\phi_+ = \phi_\uparrow$, $\phi_- = \phi_\downarrow$, $\chi_+ = \chi_\uparrow$, $\chi_- = \chi_\downarrow$ に帰着する。

式 (D.64)~(D.67) で定義される自由スピノールはマスレス極限で発散する。そこでマスレス粒子のスピノールを記述するために以下のように定義される自由スピノールを導入する。ヘリシティーの分類まで含めたスピノールを以下のように表す。

$$\omega^{1,2} = \begin{pmatrix} \phi^{1,2}(mc/\hbar, 0) \\ \frac{\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\hbar k^0 + mc} \phi^{1,2}(mc/\hbar, 0) \end{pmatrix}, \quad \omega^{3,4} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\hbar k^0 - mc} \chi^{1,2}(-mc/\hbar, 0) \\ \chi^{1,2}(-mc/\hbar, 0) \end{pmatrix} \quad (\text{D.71})$$

ここで上付き添字 1,3 はヘリシティー + を 2,4 はヘリシティー - を表す。以下では $\phi^{1\dagger} \phi^1 = \phi^{2\dagger} \phi^2 = \chi^{1\dagger} \chi = \chi^{2\dagger} \chi^2 = 1$ の規格化を採用する。最後に $\vec{k} \neq 0$ の時のエネルギー固有値を求めておくと

$$\hbar k^0 = \pm \sqrt{m^2 c^2 + \hbar^2 k^2} \quad (\text{D.72})$$

正エネルギー状態を以下のスピノールを導入して表す。

$$u(k, s) = (\hbar k^0 + mc)^{1/2} \begin{pmatrix} \phi^s \\ \frac{\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\hbar k^0 + mc} \phi^s \end{pmatrix} \quad (\text{D.73})$$

ここで添字 s はスピンの自由度即ちヘリシティを表す。確率密度は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} u(k, s)^\dagger u(k, s) &= (\hbar k^0 + mc) \left(1 + \phi^{s\dagger} \frac{\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\hbar k^0 + mc} \frac{\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\hbar k^0 + mc} \phi^s \right) \\ &= (\hbar k^0 + mc) \left(1 + \frac{\hbar^2 k^2}{(\hbar k^0 + mc)^2} \right) = \frac{1}{\hbar k^0 + mc} (\hbar^2 (k^0)^2 + 2\hbar k^0 mc + m^2 c^2 + \hbar^2 k^2) \\ &= 2\hbar k^0 = 2\frac{E}{c} \end{aligned} \quad (\text{D.74})$$

最後の变形では、粒子のエネルギー $E = \hbar k^0 c$ を用いて表した。自由粒子のスピノールは以下のように書ける。

$$\psi = u(k, s) e^{ik \cdot x} \quad (\text{D.75})$$

負エネルギー状態のスピノールを $\hbar k^0 = -E/c$ として表現すると

$$\omega^{3,4}(-E/\hbar c, \vec{k}) = \begin{pmatrix} \frac{-\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E/c + mc} \chi^{1,2} \\ \chi^{1,2} \end{pmatrix} \quad (\text{D.76})$$

この解は、エネルギー E で $-\vec{k}$ 方向に進行する反粒子の解と解釈できる。そこで $k = (E/c, \vec{k})$ の反粒子のスピノールを以下のように導入する。但し、 \vec{k} の方向は、この反粒子の反粒子である粒子の進行方向とは逆向きである。

$$v(k, s) = (E/c + mc)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E/c + mc} \chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix} \quad (\text{D.77})$$

確率密度は

$$v(k, s)^\dagger v(k, s) = 2\frac{E}{c} \quad (\text{D.78})$$

自由粒子のスピノールは以下のように書ける。

$$\psi = v(k, s)e^{-ik \cdot x} \quad (\text{D.79})$$

$\vec{k} = (0, 0, k)$ の場合、以上の結果は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} u(k, 1)e^{ik \cdot x} &= (E/c + mc)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar k}{E/c + mc} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik \cdot x}, & u(k, 2)e^{ik \cdot x} &= (E/c + mc)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\hbar k}{E/c + mc} \end{pmatrix} e^{ik \cdot x} \\ v(k, 1)e^{-ik \cdot x} &= (E/c + mc)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\hbar k}{E/c + mc} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik \cdot x}, & v(k, 2)e^{-ik \cdot x} &= (E/c + mc)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\hbar k}{E/c + mc} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik \cdot x} \end{aligned} \quad (\text{D.80})$$

マスの粒子の極限では $k^0 = k$ となる。したがって、 z 軸正の方向に進行するマスの自由粒子、反粒子のスピンールは以下ようになる。

$$\begin{aligned} u(k, 1)e^{ik \cdot x} &= (\hbar k)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik \cdot x}, & u(k, 2)e^{ik \cdot x} &= (\hbar k)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{ik \cdot x} \\ v(k, 1)e^{-ik \cdot x} &= (\hbar k)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik \cdot x}, & v(k, 2)e^{-ik \cdot x} &= (\hbar k)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik \cdot x} \end{aligned} \quad (\text{D.81})$$

D.4 Dirac 場の量子化

マスの自由な Dirac 方程式の平面波解で、任意の状態を展開する。

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1,2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (c_{\vec{k}}^{(s)} u^s(k) e^{ik \cdot x} + d_{\vec{k}}^{(s)\dagger} v^s(k) e^{-ik \cdot x}) \quad (\text{D.82})$$

ここで展開係数は以下の反交換関係を満たす。

$$\begin{aligned}
\{c_{\vec{k}}^{(s)}, c_{\vec{k}'}^{(s')\dagger}\} &= \delta_{s,s'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} & \{c_{\vec{k}}^{(s)}, c_{\vec{k}'}^{(s')}\} &= 0 & \{c_{\vec{k}}^{(s)\dagger}, c_{\vec{k}'}^{(s')\dagger}\} &= 0 \\
\{d_{\vec{k}}^{(s)}, d_{\vec{k}'}^{(s')\dagger}\} &= \delta_{s,s'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} & \{d_{\vec{k}}^{(s)}, d_{\vec{k}'}^{(s')}\} &= 0 & \{d_{\vec{k}}^{(s)\dagger}, d_{\vec{k}'}^{(s')\dagger}\} &= 0 \\
\{c_{\vec{k}}^{(s)}, d_{\vec{k}'}^{(s')}\} &= 0 & \{c_{\vec{k}}^{(s)\dagger}, d_{\vec{k}'}^{(s')\dagger}\} &= 0 & \{c_{\vec{k}}^{(s)\dagger}, c_{\vec{k}'}^{(s')}\} &= 0 \\
\{c_{\vec{k}}^{(s)}, c_{\vec{k}'}^{(s')\dagger}\} &= 0 & & & &
\end{aligned} \tag{D.83}$$

Dirac 方程式を与えるラグランジアンは以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
L &= \bar{\psi} i \hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi \\
&= i \hbar c \bar{\psi}_\alpha (\gamma^\mu)^{\alpha\beta} \psi_\beta - mc^2 \delta^{\alpha\beta} \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta
\end{aligned} \tag{D.84}$$

ここで $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ は、スピノールの各成分を表す。オイラーラグランジ方程式は以下のようになる。

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}_\alpha} = i \hbar c (\gamma^\mu)^{\alpha\beta} \psi_\beta - mc^2 \delta^{\alpha\beta} \psi_\beta \tag{D.85}$$

これは Dirac 方程式 (D.14) である。正準運動量 π_α は以下のように定義される。

$$\pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\psi}}_\alpha} = i \hbar \bar{\psi}_\beta (\gamma^0)^{\beta\alpha} = i \hbar \psi_\beta^\dagger (\gamma^0 \gamma^0)^{\beta\alpha} = i \hbar \psi_\alpha^\dagger \tag{D.86}$$

したがって、ハミルトニアン密度は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi \partial_t \psi - L = i \hbar \psi^\dagger \partial_t \psi - i \hbar \bar{\psi} \gamma^0 \partial_t \psi - i \hbar c \bar{\psi} \gamma^j \partial_j \psi + mc^2 \bar{\psi} \psi \\
&= i \hbar c \bar{\psi} \gamma^j \partial_j \psi + mc^2 \bar{\psi} \psi
\end{aligned} \tag{D.87}$$

式 (D.23) で定義される j^0 を確率密度とみなして良いことから電荷密度は以下のように定義できる。

$$\mathcal{Q} = -e \psi^\dagger \psi \tag{D.88}$$

系のハミルトニアン、全電荷は体積積分により以下のように定義される。

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \tag{D.89}$$

$$Q = \int d^3x \mathcal{Q} \tag{D.90}$$

ハイゼンベルグの運動方程式

$$i\hbar\partial_t\psi = [\psi, H] \quad (\text{D.91})$$

を満たすように u, v を規格化すれば以下のようなになる。

$$\begin{aligned} u(k, 1)e^{ik\cdot x} &= \sqrt{\frac{E}{\hbar^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik\cdot x}, & u(k, 2)e^{ik\cdot x} &= \sqrt{\frac{E}{\hbar^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{ik\cdot x} \\ v(k, 1)e^{-ik\cdot x} &= \sqrt{\frac{E}{\hbar^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik\cdot x}, & v(k, 2)e^{-ik\cdot x} &= \sqrt{\frac{E}{\hbar^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik\cdot x} \end{aligned} \quad (\text{D.92})$$

この時式 (D.89)、(D.90) は以下の形に還元される。

$$H = \sum_{\vec{k}} \sum_{s=R,L} \hbar k_0 c (c_{\vec{k}}^{(s)\dagger} c_{\vec{k}}^{(s)} + d_{\vec{k}}^{(s)\dagger} d_{\vec{k}}^{(s)} - 1) \quad (\text{D.93})$$

$$Q = -e \sum_{\vec{k}} \sum_{s=R,L} (c_{\vec{k}}^{(s)\dagger} c_{\vec{k}}^{(s)} - d_{\vec{k}}^{(s)\dagger} d_{\vec{k}}^{(s)} + 1) \quad (\text{D.94})$$

$c_{\vec{k}}^{(s)\dagger} (c_{\vec{k}}^{(s)})$ は、エネルギー $\hbar c|\vec{k}|$ で電荷 $-e$ 即ち電子の生成 (消滅) 演算子であり、 $d_{\vec{k}}^{(s)\dagger} (d_{\vec{k}}^{(s)})$ は、エネルギー $\hbar c|\vec{k}|$ で電荷 e 即ち陽電子の生成 (消滅) 演算子であることが分かる。

D.5 ベータ崩壊を現象論的に記述するハミルトニアン

状態 (D.82) を電子の状態するとベータ崩壊では、電子が放出されるので、スピノール中に電子の生成演算子が現れる必要がある。したがって、電子の寄与は $\bar{\psi}_e$ という形になる。反ニュートリノが放出されるのでニュートリノ寄与は ψ_{ν_e} で良い。しかし、右巻き反ニュートリノのみ放出されるのでは、演算子 (??) を左から作用して左巻き反ニュートリノを消し去る必要がある。中性子が消えて容姿が放出されることを考慮すると相互作用ハミルトニアンは以下の形をしていることが期待される。

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{int} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} 2C_V (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) \left[\bar{\psi}_e \gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} \psi_{\nu_e} \right] + Hc \\ &= \sqrt{2} G_F C_V (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) \left[\bar{\psi}_e \frac{(1+\gamma^5)}{2} \gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} \psi_{\nu_e} \right] + Hc \quad (\text{D.95})\end{aligned}$$

ここで Hc はエルミート共役を加えろという意味である。ここで $1 = (1 + \gamma^5)/2 + (1 - \gamma^5)/2$ と公式(??)を用いた。この式は放出される電子が左巻きであることを保証する。ベータ崩壊の実験事実を説明する現象論的ハミルトニアンは、(D.95)に更に以下のものを加えたものである。

$$\mathcal{H}_{int} = \sqrt{2} G_F C_A (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \gamma^5 \psi_n) \left[\bar{\psi}_e \gamma^\mu \gamma^5 \frac{(1-\gamma^5)}{2} \psi_{\nu_e} \right] + Hc \quad (\text{D.96})$$

D.6 Dirac 方程式 Weyl 表示

弱い相互作用反応を記述するには、スピン 1/2 のフェルミ粒子の量子論が必要である。スピン 1/2 の粒子の量子力学的振る舞いを記述する方程式が Dirac 方程式である。この節の目的は、Dirac 方程式の導出である。

電子は、スピン角運動量 $\vec{s} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ を持つ荷電粒子である。スピン角運動量に伴う電子の磁気モーメントが以下のように与えられる。

$$\vec{\mu}_e = -eg_e/2mc\vec{s} = -\frac{\hbar eg_e}{4mc} \vec{\sigma} \quad (\text{D.97})$$

g_e は磁気回転比と呼ばれる量で、古典電磁気学的には $g_e = 1$ が期待されるが、実験から $g_e = 2$ であることが分かっている。磁気モーメントを持つことが顕著に現れる現象は、磁場との相互作用により以下の項がハミルトニアンに現れることである。

$$H_{int} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (\text{D.98})$$

そこで電磁場中の電子のハミルトニアンの拡張を行う。公式 (G.7) より

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = Ip^2$$

であるから自由な電子のハミルトニアンを以下のようにパウリのスピン行列を含んだ形に拡張できる。

$$H_f = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{2m} \quad (\text{D.99})$$

電磁場中の電子のハミルトニアンは、置き換え (F.5) によって以下のように書ける。

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right] \cdot \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right] - e\phi \\ &= \frac{1}{2m} \left[\vec{P} \cdot \vec{P} I + i \frac{e}{c} \vec{\sigma} \cdot (\vec{P} \times \vec{A}) \right] - e\phi \\ &= \frac{1}{2m} \vec{P}^2 + \frac{\hbar e}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} - e\phi \\ &= \frac{1}{2m} \vec{P}^2 - \vec{\mu} \cdot \vec{B} - e\phi \end{aligned} \quad (\text{D.100})$$

途中 $\vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ を用いた。最後の式変形では電子の磁気モーメントの実験結果 (D.97) を用いた。以上の結果は、ここで行なった拡張により電子のスピンに由来する磁気モーメントと磁場との相互作用を導出でき、且つ電子の磁気回転比が 2 であることも導くことができることを示しており、式 (D.4) でとった拡張が妥当であることを裏付けている。

以上の考察を元に相対論的運動をする電子の量子力学的方程式を以下の手続きで導出する。

$$(mc)^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = \frac{E^2}{c^2} - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \left(\frac{E}{c} I - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \right) \left(\frac{E}{c} I + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \right) \quad (\text{D.101})$$

二成分の波動関数

$$\psi = \begin{pmatrix} \sim \\ \sim \end{pmatrix}$$

を導入して式 (D.101) を演算子に置き換えて波動方程式に書き換えると

$$(i\hbar\partial_0 + i\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})(i\hbar\partial_0 - i\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi = (mc)^2\psi \quad (\text{D.102})$$

を得る。ここで $x_0 = ct$ である。ここで方程式 (D.102) の解を求めるため、以下の二つの二成分関数を導入する。

$$(i\hbar\partial_0 + i\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi^{(R)} = mcI\psi^{(L)} \quad (\text{D.103})$$

$$(i\hbar\partial_0 - i\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi^{(L)} = mcI\psi^{(R)} \quad (\text{D.104})$$

方程式 (D.103) と (D.104) の和と差を取るとそれぞれ以下の方程式に還元される。

$$i\hbar\partial_0(\psi^{(R)} + \psi^{(L)}) + i\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}(\psi^{(R)} - \psi^{(L)}) = mc(\psi^{(R)} + \psi^{(L)}) \quad (\text{D.105})$$

$$i\hbar\partial_0(\psi^{(R)} - \psi^{(L)}) + i\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}(\psi^{(R)} + \psi^{(L)}) = -mc(\psi^{(R)} - \psi^{(L)}) \quad (\text{D.106})$$

和と差を $\psi_A = \psi^{(R)} + \psi^{(L)}$ 、 $\psi_B = \psi^{(R)} - \psi^{(L)}$ と定義し、4成分のスピンール ψ を以下のように定義すると

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad (\text{D.107})$$

方程式 (D.10) と (D.11) は以下のようにまとめられる。

$$i\hbar\partial_0\psi + i\hbar\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi = mc\beta\psi \quad (\text{D.108})$$

ローレンツ不変な形にするためこの方程式の両辺に左から β すなわち γ^0 を書けると次の形にまとまる。

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc\psi \quad (\text{D.109})$$

D.7 自由粒子解

スピノールを以下のように置く。

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{ik\cdot x} \quad (\text{D.110})$$

Dirac 方程式に代入すると以下の式をえる。

$$\hbar k_0\psi = (\hbar\vec{\alpha}\cdot\vec{k} + mc\beta)\psi \quad (\text{D.111})$$

$$(\hbar k_0 - mc)\phi = \hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\chi \quad (\text{D.112})$$

$$(\hbar k_0 + mc)\chi = \hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\phi \quad (\text{D.113})$$

式 (D.113) と (D.112) からスピノール ψ を ϕ だけあるいは χ だけで表した以下の表式を得る。

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{k}}{\hbar k_0 + mc}\phi \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \frac{\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{k}}{\hbar k_0 - mc}\chi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{D.114})$$

静止した自由粒子すなわち $\vec{k} = 0$ の時、スピノール ϕ は $k_0 = mc/\hbar$ の正のエネルギーを持った粒子の解を表し、スピノール χ は $k_0 = -mc/\hbar$ の負のエネルギーを持った粒子の解を表す。スピン演算子 $\vec{\Sigma}$ の定義から z 軸方向のスピンの状態、下向きの状態のスピノールが以下のように書けることは自明である。

$$\begin{aligned}\phi_{\uparrow} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \phi_{\downarrow} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \chi_{\uparrow} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \chi_{\downarrow} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{D.115}$$

これらを使って静止した正エネルギー解、負エネルギー解のスピン上向き下向きのスピノールが以下のように書ける。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\end{aligned}\tag{D.116}$$

運動する自由粒子即ち $\vec{k} \neq 0$ の場合、粒子のスピンのは運動方向を軸にとり、スピンが運動方向を向いているか、反対方向を向いているかで表現するのが適切である。そこで以下で定義されるヘリシティ演算子を導入する。

$$h(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{|\vec{k}|} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{|\vec{k}|} \end{pmatrix}\tag{D.117}$$

公式 (G.7) より $(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) = k^2 I$ であり $\beta h(\vec{k}) = h(\vec{k})\beta$ であることから、この演算子と自由粒子の Dirac 方程式 (??) の右辺に現れる $\hbar\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \frac{mc}{\hbar}\beta$ が交換する。したがって、演算子 $h(\vec{k})$ の固有状態は Dirac 方程式 (??) の同時固有状態である。そこで Dirac 方程式 (??) の固有状態として演算子 $h(\vec{k})$ の固有状態を採用する。この状態をヘリシティ状態と呼ぶ。ヘリシティ演算子の固有値 λ を求める。固有値方程式以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} \lambda I - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} & 0 \\ 0 & \lambda I - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \end{vmatrix} = \lambda^4 - 2 \left| \lambda \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \right| + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \\
&= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1
\end{aligned} \tag{D.118}$$

したがって、固有値は二つの二重に縮退した ± 1 となる。スピノール (D.71) は、ヘリシティー演算子の同時固有状態であることから ϕ と χ は更に以下線型独立な二つの成分に分離できる。

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \phi_+ &= +\phi_+, & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \phi_+ &= -\phi_+ \\
\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \chi_+ &= +\chi_+, & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{k} \chi_+ &= -\chi_+
\end{aligned} \tag{D.119}$$

進行方向が z 軸に平行な時即ち $\vec{k} = (0, 0, k)$ の時、 $\phi_+ = \phi_\uparrow$, $\phi_- = \phi_\downarrow$, $\chi_+ = \chi_\uparrow$, $\chi_- = \chi_\downarrow$ に帰着する。式 (D.71) をヘリシティーの分類まで含めた形に拡張し、以下のように表す。

$$\omega^{1,2} = \begin{pmatrix} \phi^{1,2} \\ \frac{\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\hbar k_0 + mc} \phi^{1,2} \end{pmatrix}, \quad \omega^{3,4} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\hbar k_0 - mc} \chi^{1,2} \\ \chi^{1,2} \end{pmatrix} \tag{D.120}$$

ここで上付き添字 1, 3 はヘリシティー + を 2, 4 はヘリシティー - を表す。以下では $\phi^{1\dagger} \phi^1 = \phi^{2\dagger} \phi^2 = \chi^{1\dagger} \chi = \chi^{2\dagger} \chi^2 = 1$ の規格化を採用する。最後に $\vec{k} \neq 0$ の時のエネルギー固有値を求めておくと

$$\hbar k_0 = \pm \sqrt{m^2 c^2 + \hbar^2 k^2} \tag{D.121}$$

正エネルギー状態を以下のスピノールを導入して表す。

$$u(k, s) = (\hbar k_0 + mc)^{1/2} \begin{pmatrix} \phi^s \\ \frac{\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\hbar k_0 + mc} \phi^s \end{pmatrix} \tag{D.122}$$

ここで添字 s はスピンの自由度即ちヘリシティーを表す。確率密度は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
u(k, s)^\dagger u(k, s) &= (\hbar k_0 + mc) \left(1 + \phi^{s\dagger} \frac{\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\hbar k_0 + mc} \frac{\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\hbar k_0 + mc} \phi^s \right) \\
&= (\hbar k_0 + mc) \left(1 + \frac{\hbar^2 k^2}{(\hbar k_0 + mc)^2} \right) = \frac{1}{\hbar k_0 + mc} (\hbar^2 k_0^2 + 2\hbar k_0 mc + m^2 c^2 + \hbar^2 k^2)
\end{aligned}$$

$$= 2\hbar k_0 = 2\frac{E}{c} \quad (\text{D.123})$$

最後の変形では、粒子のエネルギー $E = \hbar k_0 c$ を用いて表した。自由粒子のスピンールは以下のように書ける。

$$\psi = u(k, s)e^{ik \cdot x} \quad (\text{D.124})$$

負エネルギー状態のスピンールを $\hbar k_0 = -E/c$ として表現すると

$$\omega^{3,4}(-E/\hbar c, \vec{k}) = \begin{pmatrix} \frac{-\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E/c + mc} \chi^{1,2} \\ \chi^{1,2} \end{pmatrix} \quad (\text{D.125})$$

この解は、エネルギー E で $-\vec{k}$ 方向に進行する反粒子の解と解釈できる。そこで $k = (E/c, \vec{k})$ の反粒子のスピンールを以下のように導入する。但し、 \vec{k} の方向は、この反粒子の反粒子である粒子の進行方向とは逆向きである。

$$v(k, s) = (\hbar k_0 + mc)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\hbar k_0 + mc} \chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix} \quad (\text{D.126})$$

確率密度は

$$v(k, s)^\dagger v(k, s) = 2\hbar k_0 = 2\frac{E}{c} \quad (\text{D.127})$$

自由粒子のスピンールは以下のように書ける。

$$\psi = v(k, s)e^{-ik \cdot x} \quad (\text{D.128})$$

式 (D.9) に左から $(i\hbar \partial_0 + i\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})$ を作用すると

$$(i\hbar \partial_0 + i\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})(i\hbar \partial_0 - i\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi^{(L)} = mc(i\hbar \partial_0 + i\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\psi^{(R)} = (mc)^2 I \psi^{(L)}$$

となり $\psi^{(L)}$ が方程式 (D.102) の解であることが証明される。同様に $\psi^{(R)}$ も方程式 (D.102) の解である。方程式 (D.103)、(D.104) が求める相対論的な電子の量子力学的運動を記述する方程式である。次に 4 成分を持つ状態関数 ψ を以下のように導入する。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^{(R)} \\ \psi^{(L)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (\text{D.129})$$

この状態関数をスピノールと呼び、ガンマ行列とスピノールを用いて二つの方程式 (D.103) と (D.104) を以下の方程式にまとめることができる。

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{mc}{\hbar} I^4 \psi = 0 \quad (\text{D.130})$$

この方程式 (D.130) が Dirac 方程式である。

Dirac 方程式 (??) のエルミート共役を取ると以下ようになる。

$$\begin{aligned} -i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - \frac{mc}{\hbar} \psi^\dagger I^4 &= 0 \\ \psi^\dagger &= (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \end{aligned} \quad (\text{D.131})$$

更に変形を進めると

$$\begin{aligned} 0 &= -i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 - \frac{mc}{\hbar} \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \\ &= \left(-i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu - \frac{mc}{\hbar} \psi^\dagger \gamma^0 \right) \gamma^0 \end{aligned} \quad (\text{D.132})$$

となる。ここで以下で定義される随伴 (adjoint) スピノールを用いると

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_3^*, \psi_4^*, \psi_1^*, \psi_2^*) \quad (\text{D.133})$$

方程式 (D.132) は以下のように書ける。

$$-i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - \frac{mc}{\hbar} \bar{\psi} = 0 \quad (\text{D.134})$$

Dirac 方程式は以下のノーテーションを用いるとコンパクトに表記できる。

$$\vec{\partial} \psi = \gamma^\mu \partial_\mu \psi, \quad \bar{\psi} \overleftarrow{\partial} = \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \quad (\text{D.135})$$

以後任意の 4 元ベクトル a とガンマ行列との内積をスラッシュをつけて $\not{a} = a_\mu \gamma^\mu$ のように表す。Dirac 方程式とその随伴方程式は以下のように書ける。

$$i\vec{\partial} \psi - \frac{mc}{\hbar} \psi = 0 \quad (\text{D.136})$$

$$-i\bar{\psi}\overleftarrow{\partial} - \frac{mc}{\hbar}\bar{\psi} = 0 \quad (\text{D.137})$$

方程式 (D.136) に左から $\bar{\psi}$ を方程式 (D.137) に右から ψ を掛けて差を取ると以下の結果を得る。

$$0 = i\bar{\psi}\overrightarrow{\partial}\psi + i\bar{\psi}\overleftarrow{\partial}\psi = i\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \quad (\text{D.138})$$

方程式 (D.22) は 4 元カレント

$$j^\mu = c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (c\psi^\dagger\psi, c\psi^\dagger\alpha^i\psi) \quad (\text{D.139})$$

が連続の式を満たすことを示している。ここで

$$\psi^\dagger\psi = \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4 > 0 \quad (\text{D.140})$$

であり、 j^0 は正の値を取る。したがって、これを確率密度と解釈することができ、連続の式 (D.138) は Dirac 方程式に従う系の確率保存則を表す。式 (D.139) に現れた $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ の形を双一次形式 (bilinear covariants) と呼ぶ。

D.8 負エネルギー粒子の Feynman の解釈とスカラー場の量子化

Dirac 方程式の詳細の解説に入る前に、自由なスカラー粒子を例にとって負エネルギー粒子の Feynman の解釈を解説する。自由なスカラー粒子の量子力学的方程式 (H.8) の平面波解は $\phi = Ne^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ の形で書け

$$\omega_k = +\sqrt{k^2 c^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2} \quad (\text{D.141})$$

$$\omega_k = -\sqrt{k^2 c^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2} \quad (\text{D.142})$$

の正エネルギー解と負エネルギー解が存在する。ここで N は規格化因子 (Normalization factor) である。スカラー粒子 (スピン 0 の粒子) の例として π^+ を考える。自由なスカラー粒子の 4 元保存カレントは式 (??) から $j^\mu = i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*)$ である。したがって、 π^+ の 4 元電流は以下のように書ける。

$$j^\mu \pi^+ = +e j^\mu = +e 2|N|^2 \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) \quad (\text{D.143})$$

同様の考察から正のエネルギー $\hbar\omega$ を持ち \vec{k} の方向に進行する反粒子 π^- の 4 元電流が以下のように書けることは自明である。

$$j^\mu \pi^- = -e j^\mu = -e 2|N|^2 \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) = +e 2|N|^2 \left(-\frac{\omega}{c}, -\vec{k} \right) \quad (\text{D.144})$$

最後の式変形から反粒子の存在は、絶対値が同じの負のエネルギーを持ち反粒子と逆方向に進行する粒子の存在と等価であることが分かる。このことから類推して Feynman は、負エネルギー粒子解は、絶対が同じ正のエネルギーを持ち逆方向に進行する反粒子の運動を表すという解釈を与えた。

電荷を持たず粒子と反粒子の区別が無い粒子の場合は、負エネルギー粒子の存在は、絶対値が同じで逆方向に進行する粒子が消滅したと解釈すれば良いことになる。そこで次の交換関係

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = 0, \quad [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \quad (\text{D.145})$$

を満たす生成消滅演算子 $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^\dagger$ を用いて粒子反粒子の区別がないスカラー粒子で構成されるスカラー場を次のように表す。

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (a_{\vec{k}} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}) \quad (\text{D.146})$$

すると例えばハミルトニアンは以下のように書ける。

$$\begin{aligned} H &= \int_V d^3x \left[\frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2 \right] \\ &= \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.147})$$

$$\hbar\omega_{\vec{k}} = \sqrt{(\hbar kc)^2 + (mc^2)^2} \quad (\text{D.148})$$

この結果からスカラー場がエネルギー量子 $\hbar\omega_{\vec{k}}$ を持ったスカラー粒子の集まりとして表現できることが分かる。

粒子と反粒子の区別があるスカラー場を量子化するには、 a, a^\dagger を粒子の生成消滅演算子とし、反粒子の生成消滅演算子として b, b^\dagger を導入する。

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (a_{\vec{k}} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + b_{\vec{k}}^\dagger e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}) \quad (\text{D.149})$$

D.9 Dirac 方程式の平面波解

4元波数ベクトル $k = k_\mu = (-k_0, \vec{k})$ を持つ平面波は以下のように書ける。

$$\psi = u(k) e^{ik_\mu x^\mu} = u(k) e^{i(-k_0 ct + \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (\text{D.150})$$

$\partial_\mu \psi = ik_\mu \psi$ であるから、関数形をした Dirac 方程式の解が存在するとして Dirac 方程式に代入すると以下の式を得る。

$$0 = \left(\not{k} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = \begin{pmatrix} -\frac{mc}{\hbar} & k_0 + \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ k_0 - \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -\frac{mc}{\hbar} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{(R)} \\ \psi^{(L)} \end{pmatrix} \quad (\text{D.151})$$

以下面倒なので $\psi^{(R)} = \psi_R$, $\psi^{(L)} = \psi_L$ と表記する。

まず静止した $\vec{k} = 0$ 自由粒子について考察する。Dirac 方程式 (??) は以下のように書ける。

$$-\frac{mc}{\hbar} \psi^{(R)} + k_0 \psi^{(L)} = 0 \quad (\text{D.152})$$

$$k_0 \psi^{(R)} - \frac{mc}{\hbar} \psi^{(L)} = 0 \quad (\text{D.153})$$

これら二つの方程式の和と差を求めると以下の方程式を得る。

$$k_0(\psi^{(R)} + \psi^{(L)}) - \frac{mc}{\hbar}(\psi^{(R)} + \psi^{(L)}) = 0 \quad (\text{D.154})$$

$$k_0(\psi^{(R)} - \psi^{(L)}) + \frac{mc}{\hbar}(\psi^{(R)} - \psi^{(L)}) = 0 \quad (\text{D.155})$$

ここで

$$\psi_A = \psi^{(R)} + \psi^{(L)} \quad (\text{D.156})$$

$$\psi_B = \psi^{(R)} - \psi^{(L)} \quad (\text{D.157})$$

で定義される二つの二成分スピノールを定義すると、 ψ_A はエネルギー固有値 $k_0 = mc/\hbar$ の正のエネルギーを持つ固有状態であり、 ψ_B はエネルギー固有値 $k_0 = -mc/\hbar$ の負のエネルギーを持つ固有状態である。

次にマスの粒子 $m = 0$ の場合について考察する。Dirac 方程式は、以下

の二つに分離する。

$$(k_0 + \vec{k} \cdot \vec{\sigma}) \psi_L = 0 \quad (\text{D.158})$$

$$(k_0 - \vec{k} \cdot \vec{\sigma}) \psi_R = 0 \quad (\text{D.159})$$

以下簡単の為 $\vec{k} = (0, 0, |k_0|)$ とする。正の k_0 即ち正のエネルギー解について考察する。方程式 (D.159) は以下のように書ける。

$$k_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \psi_R = 0 \quad (\text{D.160})$$

この方程式の解は以下の形を持つ。

$$\phi^R(k) = \begin{pmatrix} f(k) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \phi^R e^{ik \cdot x} \quad (\text{D.161})$$

この解の粒子の運動方向のスピン角運動量は

$$\frac{\hbar \vec{k}}{2} \cdot \vec{\sigma} \phi^R = \frac{\hbar}{2} k_0 \sigma_3 \phi^R = \frac{\hbar}{2} k_0 \phi^R \quad (\text{D.162})$$

より $\frac{\hbar}{2} > 0$ であり、正の値を持つ。即ちこの解のヘリシティは正で、スピン角運動量の向きが粒子の進行方向と同じことを意味している。スピンの回転方向は、粒子に乗った観測者がスピン角運動量の向きに右ねじが進むように右ねじを回させる方向と一致しているため右巻きと呼ばれる。 ϕ^R の添字 R 右巻きスピンを表している。方程式 (??) の正エネルギー解が満たす方程式は以下のように書ける。

$$k_0 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \psi_L = 0 \quad (\text{D.163})$$

この方程式の解は以下の形を持つ。

$$\phi^L = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{f}(k) \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \phi^L e^{ik \cdot x} \quad (\text{D.164})$$

この解の粒子の運動方向のスピン角運動量は

$$\frac{\hbar \vec{k}}{2} \cdot \vec{\sigma} \phi^L = \frac{\hbar}{2} k_0 \sigma_3 \phi^L = -\frac{\hbar}{2} k_0 \phi^L \quad (\text{D.165})$$

であり、負の値を持つ。即ち、この解のヘリシティは負で、スピン角運動量の向きは粒子の進行方向と反対を向いている。この状態を左巻きと呼ぶ。正エネルギー粒子は、我々が粒子と呼んでいるものである。正エネルギー粒子の右巻き左巻きスピノールはそれぞれ

$$u^R = \begin{pmatrix} \phi^R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(k) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.166})$$

$$u^L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{f}(k) \end{pmatrix} \quad (\text{D.167})$$

と書ける。

一方、負エネルギー粒子の解も存在する。粒子の場合と同様の議論により右巻き左巻き負エネルギー解のスピノールは、それぞれ以下のように与えられる。

$$\chi^R = \begin{pmatrix} 0 \\ g(k) \end{pmatrix}, \quad (\text{D.168})$$

$$\chi^L = \begin{pmatrix} \tilde{g}(k) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.169})$$

解 (D.168) が、方程式 (D.159) の解であること、解 (D.167) が方程式 (D.158) の解であることは自明である。これらの解の位相と粒子解 (D.166)、(D.166) の位相を比較すると負エネルギー解の波数ベクトルの向きを逆転即ち $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ とすれば、 \vec{k} 方向に伝搬する正のエネルギー $|k_0|$ を持った粒子の解になることが分かる。進行方向の逆転に伴い、粒子のヘリシティも逆転する。即ち右巻きが左巻きに、左巻きが右巻きに変わる。このことを考慮して、以後負エネルギー粒子のスピノールを以下の置き換えを行なって表す。

$$\chi^R(k_0, -\vec{k}) \rightarrow \tilde{\chi}^L(|k_0|, \vec{k}) \quad \chi^L(k_0, -\vec{k}) \rightarrow \tilde{\chi}^R(|k_0|, \vec{k}) \quad (\text{D.170})$$

次に示すように $\tilde{\chi}^s(k_0, \vec{k})$ は、正のエネルギー $|k_0|$ を持つ反粒子のスピンオールと解釈できる。反粒子のスピンオールは以下のようにまとめられる。

$$v^L = \begin{pmatrix} \tilde{\chi}^L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(k) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.171})$$

$$v^R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\chi}^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{g}(k) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.172})$$

粒子解、反粒子解の重ね合わせとして波数ベクトル \vec{k} を持つ解を以下のようにまとめられる。以下では粒子のエネルギー k_0 は正の値のみととする。

$$\psi(k_0, \vec{k}) = (u^R + u^L)e^{ik \cdot x} + (v^L + v^R)e^{-ik \cdot x} \quad (\text{D.173})$$

4つのスピンオールは Σ_3 の固有スピンオールであり u^R, v^R は固有値 +1、 u^L, v^L は固有値-1 の固有関数である。全角運動量を表す演算子は以下のように書ける。

$$\vec{L} + \vec{s} = \vec{x} \times \vec{p} + \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma} \quad (\text{D.174})$$

次に質量がゼロでない場合の Dirac 方程式の平面波解について調べる。

D.10 Dirac 場の量子化

マッスレス自由な Dirac 方程式の平面波解で、任意の状態を展開する。

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=R,L} (b_{\vec{k}}^{(s)} u^s(k) e^{ik \cdot x} + d_{\vec{k}}^{(s)\dagger} v^s(k) e^{-ik \cdot x}) \quad (\text{D.175})$$

ここで展開係数は以下の反交換関係を満たす。

$$\begin{aligned}
\{b_{\vec{k}}^{(s)}, b_{\vec{k}'}^{(s')\dagger}\} &= \delta_{s,s'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} & \{b_{\vec{k}}^{(s)}, b_{\vec{k}'}^{(s')}\} &= 0 & \{b_{\vec{k}}^{(s)\dagger}, b_{\vec{k}'}^{(s')\dagger}\} &= 0 \\
\{d_{\vec{k}}^{(s)}, d_{\vec{k}'}^{(s')\dagger}\} &= \delta_{s,s'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} & \{d_{\vec{k}}^{(s)}, d_{\vec{k}'}^{(s')}\} &= 0 & \{d_{\vec{k}}^{(s)\dagger}, d_{\vec{k}'}^{(s')\dagger}\} &= 0 \\
\{b_{\vec{k}}^{(s)}, d_{\vec{k}'}^{(s')}\} &= 0 & \{b_{\vec{k}}^{(s)\dagger}, d_{\vec{k}'}^{(s')\dagger}\} &= 0 & \{b_{\vec{k}}^{(s)\dagger}, b_{\vec{k}'}^{(s')}\} &= 0 \\
\{b_{\vec{k}}^{(s)}, b_{\vec{k}'}^{(s')\dagger}\} &= 0 & & & &
\end{aligned} \tag{D.176}$$

Dirac 方程式を与えるラグランジアンは以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
L &= \bar{\psi} i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi \\
&= i\hbar c \bar{\psi}_\alpha (\gamma^\mu)^{\alpha\beta} \psi_\beta - mc^2 \delta^{\alpha\beta} \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta
\end{aligned} \tag{D.177}$$

ここで $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ は、スピノールの各成分を表す。オイラーラグランジ方程式は以下のようになる。

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}_\alpha} = i\hbar c (\gamma^\mu)^{\alpha\beta} \psi_\beta - mc^2 \delta^{\alpha\beta} \psi_\beta \tag{D.178}$$

これは Dirac 方程式 (D.130) である。正準運動量 π_α は以下のように定義される。

$$\pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\psi}}_\alpha} = i\hbar \bar{\psi}_\beta (\gamma^0)^{\beta\alpha} = i\hbar \psi_\beta^\dagger (\gamma^0 \gamma^0)^{\beta\alpha} = i\hbar \psi_\alpha^\dagger \tag{D.179}$$

したがって、ハミルトニアン密度は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi \partial_t \psi - L = i\hbar \psi^\dagger \partial_t \psi - i\hbar \bar{\psi} \gamma^0 \partial_t \psi - i\hbar c \bar{\psi} \gamma^j \partial_j \psi + mc^2 \bar{\psi} \psi \\
&= i\hbar c \bar{\psi} \gamma^j \partial_j \psi + mc^2 \bar{\psi} \psi
\end{aligned} \tag{D.180}$$

式 (D.139) で定義される j^0 を確率密度とみなして良いことから電荷密度は以下のように定義できる。

$$\mathcal{Q} = -e \psi^\dagger \psi \tag{D.181}$$

系のハミルトニアン、全電荷は体積積分により以下のように定義される。

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \tag{D.182}$$

$$Q = \int d^3x \mathcal{Q} \tag{D.183}$$

ハイゼンベルグの運動方程式

$$i\hbar\partial_t\psi = [\psi, H] \quad (\text{D.184})$$

を満たすように ϕ, φ を規格化すれば、(D.182)、(D.183) は以下の形に還元される。

$$H = \sum_{\vec{k}} \sum_{s=R,L} \hbar k_0 c (b_{\vec{k}}^{(s)\dagger} b_{\vec{k}}^{(s)} + d_{\vec{k}}^{(s)\dagger} d_{\vec{k}}^{(s)} - 1) \quad (\text{D.185})$$

$$Q = -e \sum_{\vec{k}} \sum_{s=R,L} (b_{\vec{k}}^{(s)\dagger} b_{\vec{k}}^{(s)} - d_{\vec{k}}^{(s)\dagger} d_{\vec{k}}^{(s)} + 1) \quad (\text{D.186})$$

$b_{\vec{k}}^{(s)\dagger} (b_{\vec{k}}^{(s)})$ は、エネルギー $\hbar c|\vec{k}|$ で電荷 $-e$ 即ち電子の生成（消滅）演算子であり、 $d_{\vec{k}}^{(s)\dagger} (d_{\vec{k}}^{(s)})$ は、エネルギー $\hbar c|\vec{k}|$ で電荷 e 即ち陽電子の生成（消滅）演算子であることが分かる。

D.11 ベータ崩壊を現象論的に記述するハミルトニアン

状態 (D.175) を電子の状態するとベータ崩壊では、電子が放出されるので、スピノール中に電子の生成演算子が現れる必要がある。したがって、電子の寄与は $\bar{\psi}_e$ という形になる。反ニュートリノが放出されるのでニュートリノ寄与は ψ_{ν_e} で良い。しかし、右巻き反ニュートリノのみ放出されるのでは、演算子 (??) を左から作用して左巻き反ニュートリノを消し去る必要がある。中性子が消えて容姿が放出されることを考慮すると相互作用ハミルトニアンは以下の形をしていることが期待される。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{int} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} 2C_V (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) \left[\bar{\psi}_e \gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} \psi_{\nu_e} \right] + Hc \\ &= \sqrt{2} G_F C_V (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) \left[\bar{\psi}_e \frac{(1+\gamma^5)}{2} \gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} \psi_{\nu_e} \right] + Hc \quad (\text{D.187}) \end{aligned}$$

ここで Hc はエルミート共役を加えろという意味である。ここで $1 = (1 + \gamma^5)/2 + (1 - \gamma^5)/2$ と公式 (??) を用いた。この式は放出される電子が左巻きであることを保証する。ベータ崩壊の実験事実を説明する現象論的ハミルトニアンは、(D.187) に更に以下のものを加えたものである。

$$\mathcal{H}_{int} = \sqrt{2} G_F C_A (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \gamma^5 \psi_n) \left[\bar{\psi}_e \gamma^\mu \gamma^5 \frac{(1-\gamma^5)}{2} \psi_{\nu_e} \right] + Hc \quad (\text{D.188})$$

付録 E

角運動量を持つ荷電粒子
の磁気モーメント

角運動量を持つ荷電粒子の磁気モーメントと角運動量との関係を導く。
電流密度 \vec{j} とする。 $\text{div}\vec{A}=0$ のゲージの元で定常状態でのベクトルポテン
シャル \vec{A} は以下の方程式を満たす。

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad (\text{E.1})$$

この方程式の解は以下のように与えられる。

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \quad (\text{E.2})$$

磁場は以下のように計算される。

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3r' \quad (\text{E.3})$$

$x-y$ 平面にある半径 a の細い導線を通る電流 I が、円形電流から十分遠
方を作る磁場が以下のように計算される。

$$\vec{A} \sim \frac{I}{cr} \int_C d\vec{\ell} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{\ell}}{r^2} \right)$$

ここで $I = |\vec{j}|dS$ で dS は導線の断面積、積分経路 C は導線に沿った経
路を表し、 $\vec{\ell} = (a \cos \phi', a \sin \phi', 0)$ は導線の各場所の位置ベクトル、 $d\vec{\ell} =$

$(-a \sin \phi' d\phi', a \cos \phi' d\phi', 0)$ は導線に沿った線素ベクトルである。この式は、円電流の電流密度が

$$\vec{j}(\vec{r}') = I \vec{n}' \delta(\rho' - a) \delta(z') \quad (\text{E.4})$$

であることを式 (E.2) に代入し $r \gg a$ の条件下でテイラー展開することでも得られる。ここで $\vec{n}' = (-\sin \phi', \cos \phi', 0)$ は電流の向きを向いた単位ベクトルであり、 ρ', ϕ', z' は円筒座標である。円形電流が作る遠方でのベクトルポテンシャルが以下のように求まる。

$$\begin{aligned} A_x &\sim \frac{I}{cr} \int_0^{2\pi} d\phi' (-a \sin \phi') \left(1 + \frac{xa \cos \phi' + ya \sin \phi'}{r^2} \right) \\ &= -\frac{Ia^2}{c} \frac{y}{r^3} \int_0^{2\pi} d\phi' \sin^2 \phi' = -\frac{I\pi a^2}{c} \frac{y}{r^3} \\ A_y &\sim \frac{I}{cr} \int_0^{2\pi} d\phi' (a \cos \phi') \left(1 + \frac{xa \cos \phi' + ya \sin \phi'}{r^2} \right) \\ &= \frac{Ia^2}{c} \frac{x}{r^3} \int_0^{2\pi} d\phi' \cos^2 \phi' = \frac{I\pi a^2}{c} \frac{x}{r^3} \\ A_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

これより円形電流が作る遠方での磁場が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} B_x &\sim \frac{3I\pi a^2}{c} \frac{xz}{r^5} \\ B_y &\sim \frac{3I\pi a^2}{c} \frac{yz}{r^5} \\ B_z &\sim \frac{I\pi a^2}{c} \left(\frac{2}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2)}{r^5} \right) = \frac{I\pi a^2}{c} \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

$\vec{m} = \frac{I\pi a^2}{c} \vec{e}_z$ を用いてこの磁場を表すと以下のように書ける。ここで \vec{e}_z は z 軸方向を向いた単位ベクトルである。

$$\vec{B} = -\frac{\vec{\mu}_m}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{\mu}_m \cdot \vec{r})}{r^5} \quad (\text{E.7})$$

これは原点に存在する磁気双極子 $\vec{\mu}_m$ が遠方に作る磁場と同じ形をしている。したがって、 $\vec{\mu}_m$ は円形電流に伴う磁気モーメントと解釈することができる。

円電流が、半径 a の円軌道を速度 v で運動する電荷 q の荷電粒子によっ

て形成されているとする。電流 I は、導線のある断面を単位時間に通過する電荷量なので

$$I = q \frac{v}{2\pi a}$$

と表される。磁気モーメントの大きさは、電荷の角運動量 $L = mav$ を用いて以下のように表される。

$$\mu_m = \frac{qL}{2mc} \quad (\text{E.8})$$

付録 F

電磁場中の電子の運動を
記述する正準形式

非相対論的運動をする電磁場中の電子の運動方程式の x 成分を電磁場ポテンシャル $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ を用いて表すと以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= e\partial_x\phi + \frac{e}{c}\partial_t A_x - \frac{e}{c}(v_y(\partial_x A_y - \partial_y A_x) - v_z(\partial_z A_x - \partial_x A_z)) \\ &= e\partial_x\phi + \frac{e}{c}(\partial_t A_x + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} A_x) - \frac{e}{c}\partial_x(\vec{v} \cdot \vec{A}) \\ &= \frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt} + e\partial_x\phi - \frac{e}{c}\partial_x(\vec{v} \cdot \vec{A}) \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

y, z 成分の同様の形で書ける。電磁場中の電子のラグランジアンを以下のように定義すれば、オイラー・ラグランジ方程式から上記の運動方程式が導かれる。

$$L = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{c}\vec{p} \cdot \vec{A} + e\phi \quad (\text{F.2})$$

x と正準共役運動量 P_x は以下のように定義される。

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_x - \frac{e}{c}A_x = p_x - \frac{e}{c}A_x \quad (\text{F.3})$$

y, z 成分も同様に定義される。ハミルトニアンが以下のように求まる。

$$H = \vec{P} \cdot \vec{v} - L = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - e\phi \quad (\text{F.4})$$

ハミルトンの運動方程式にこのハミルトニアンを代入すれば方程式 (F.1) が導かれることを示すことができる。4元電磁ポテンシャルを用いると自由粒子のハミルトニアン H_f に対して以下の置き換えを行うことでハミルトニアン (F.4) が得られることが分かる。自由粒子の4元運動量 $p_f^\mu = (H/c, \vec{p})$ を定義する。

$$p_f^\mu \rightarrow P^\mu + \frac{e}{c} A^\mu \quad (\text{F.5})$$

ただし、右辺の P^μ は正純共役な運動量であり自由粒子の運動量とは異なる。

付録 G

パウリ行列・ガンマ行列

G.1 演算公式

パウリのスピン行列 σ は以下のように定義される。

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{G.1})$$

これらはエルミートであり

$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i \quad (\text{G.2})$$

を満たす。ここで \dagger はエルミート共役すなわち転置して複素共役をとれという操作を表す。スピン行列の複素共役は $\sigma_1^* = \sigma_1$, $\sigma_2^* = -\sigma_2$, $\sigma_3^* = \sigma_3$ であり、 σ_2 のみ符号を変え、他の二成分は不変である。二つの演算子 \hat{A}, \hat{B} の交換関係・反交換関係を以下のように定義する。

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (\text{G.3})$$

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \quad (\text{G.4})$$

単位行列を I で表す。

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3$$

$$\sigma_2 \sigma_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma_3$$

$$\sigma_2 \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1$$

$$\sigma_3 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_1$$

$$\sigma_3 \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2$$

$$\sigma_1 \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2$$

$$\sigma_1 \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\sigma_2 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\sigma_3 \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \delta_{ij} 2I \quad (\text{G.5})$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (\text{G.6})$$

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) &= A^i B^j \sigma_i \sigma_j = \frac{1}{2} A^i B^j (\{\sigma_i, \sigma_j\} + [\sigma_i, \sigma_j]) \\ &= A^i B^j \delta_{ij} I + i A^i B^j \epsilon_{ijk} \sigma_k = I \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{B})(\vec{\sigma} \cdot \vec{A}) = I \vec{A} \cdot \vec{B} - i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (\text{G.8})$$

$$\begin{aligned} [\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}, \sigma_j] &= [\alpha^i \sigma_i, \sigma_j] = 2i\alpha^i \epsilon_{ijk} \sigma_k \\ &= -2i\epsilon_{jik} \alpha^i \sigma_k = -2i(\vec{\alpha} \times \vec{\sigma})_j \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (\text{G.10})$$

3次元空間ベクトル $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ とパウリ行列の内積を求めておく。

$$\vec{k} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} k_3 & k_1 - ik_2 \\ k_1 + ik_2 & -k_3 \end{pmatrix} \quad (\text{G.11})$$

4×4の単位行列を I^4 と表すことにし、ガンマ行列を以下のように定義する。ここでは、一般によく採用される Dirac 表示で、スピン 1/2 の粒子の量子力学の基本的性質を調べ直す。Dirac 表示とは、ガンマ行列の具体的成分を書き表す方法の一つで、各ガンマ行列は以下のように書き表される。

$$\begin{aligned} \gamma^0 = \beta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 = \beta\alpha^1 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 = \beta\alpha^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 = \beta\alpha^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

$I^{4\dagger} = I^4$, $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ でこれらはエルミートであるが残りのガンマ行列はエルミートでは無い。

$$\gamma^{i\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i^\dagger \\ \sigma_i^\dagger & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^i \quad (\text{G.13})$$

ここで $i=1,2,3$ である。ガンマ行列の複素共役を取ると以下ようになる。

$$\gamma^{0*} = \gamma^0, \quad \gamma^{1*} = \gamma^1, \quad \gamma^{2*} = -\gamma^2, \quad \gamma^{3*} = \gamma^3 \quad (\text{G.14})$$

またガンマ行列の転置を取ると以下ようになる。

$$\gamma^{0t} = \gamma^0, \quad \gamma^{1t} = -\gamma^1, \quad \gamma^{2t} = \gamma^2, \quad \gamma^{3t} = -\gamma^3 \quad (\text{G.15})$$

ガンマ行列間の基本的演算公式をまとめる。ここで $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ はミンコフスキーメトリックである。

$$(\gamma^0)^2 = I^4, \quad (\text{G.16})$$

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \begin{pmatrix} -\{\sigma_i, \sigma_j\} & 0 \\ 0 & -\{\sigma_i, \sigma_j\} \end{pmatrix} = -2\delta_{ij}I^4 \quad (\text{G.17})$$

$$\{\gamma^0, \gamma^i\} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{G.18})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}I^4 \quad (\text{G.19})$$

$$[\gamma^i, \gamma^j] = \begin{pmatrix} -[\sigma_i, \sigma_j] & 0 \\ 0 & -[\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix} = -2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k I^4 \quad (\text{G.20})$$

$$[\gamma^0, \gamma^i] = 2\sigma_i \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = 2\alpha_i \quad (\text{G.21})$$

$$\gamma^0\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^i\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^i, \quad \gamma^0\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0 \quad (\text{G.22})$$

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger} \quad (\text{G.23})$$

式 (G.21) では

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (\text{G.24})$$

で定義される行列 α^i, β を用いた。また、明記する必要が無い場合は I^4 を 1 と表記する。

$$\not{k} \not{k} = k_\nu k_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = k_\nu k_\mu (-2\eta^{\mu\nu}I^4 - \gamma^\mu \gamma^\nu) = -2k^2 I^4 - \not{k} \not{k}$$

よって

$$\not{k} \not{k} = -(-k_0^2 + k^2)I^4 \quad (\text{G.25})$$

以下のようにガンマ行列のせきで定義されるカイラリティ演算子 γ^5 を定義する。

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{G.26})$$

この行列はエルミート行列である。

$$\begin{aligned}
 \gamma^{5\dagger} &= -i\gamma^3\dagger\gamma^2\dagger\gamma^1\dagger\gamma^0\dagger \\
 &= -i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)\gamma^0 = i\gamma^3\gamma^2(-\gamma^0\gamma^1) \\
 &= -i\gamma^0\gamma^3\gamma^2\gamma^1 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^2 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
 &= \gamma^5
 \end{aligned} \tag{G.27}$$

これを用いると重要な働きをする以下の演算子を得る。

$$\frac{1+\gamma^5}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}, \quad \frac{1-\gamma^5}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \tag{G.28}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma^5\gamma^0 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
 &= -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3
 \end{aligned} \tag{G.29}$$

スピノールの z 軸方向のスピンを $\hbar/2$ 単位で求める演算子 Σ_3 が以下のように定義できる。

$$\Sigma_3 = i\frac{[\gamma^1, \gamma^2]}{2} = i\gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{G.30}$$

同様に任意の k 軸方向のスピン $\hbar/2$ 単位で求める演算子 Σ_k を以下のように定義できる。

$$\Sigma_k = i\frac{[\gamma^j, \gamma^l]}{2} = i\gamma^j\gamma^l = \gamma^5\gamma^0\gamma^k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \tag{G.31}$$

ここで i, j, k はサイクリックに x, y, z の異なるどれかの値を取る。スピン演算子および γ^5 と他のガンマ行列の演算公式をまとめる。

$$\begin{aligned}
 [\Sigma_k, \gamma^0] &= \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{G.32}$$

$$\{\Sigma_k, \gamma^0\} = 2\sigma_k\gamma^0 \tag{G.33}$$

$$[\gamma^5, \gamma^0] = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{G.34})$$

$$\{\gamma^5, \gamma^0\} = 0 \quad (\text{G.35})$$

$$\begin{aligned} [\Sigma_k, \gamma^0 \gamma^5] &= \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \\ &= \gamma^k - \gamma^k = 0 \end{aligned} \quad (\text{G.36})$$

$$\{\Sigma_k, \gamma^0 \gamma^5\} = 2\gamma^k \quad (\text{G.37})$$

$$[\Sigma_k, \gamma^5] = 0 \quad (\text{G.38})$$

二つの非可換な演算子 A, B に対して以下の式が成り立つ。

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = B + \lambda [A, B] + \frac{\lambda^2}{2!} [A, [A, B]] + \frac{\lambda^3}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots, \quad (\text{G.39})$$

この式は以下のように証明することができる。

$$f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$$

によって関数 $f(\lambda)$ を定義する。この関数の λ による導関数を計算する。

$$f'(\lambda) = A e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} - e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} A = [A, f(\lambda)]$$

$$f''(\lambda) = A f'(\lambda) - f'(\lambda) A = [A, [A, f(\lambda)]]$$

$$f'''(\lambda) = [A, [A, [A, f(\lambda)]]]$$

ここで $f(\lambda)$ を $\lambda = 0$ のまわりでテイラー展開すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= f(0) + f'(0)\lambda + \frac{1}{2!} f''(0)\lambda^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)\lambda^3 + \dots \\ &= B + [A, B]\lambda + \frac{1}{2!} [A, [A, B]]\lambda^2 + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]]\lambda^3 + \dots \end{aligned}$$

したがって与式が証明された。

次に演算子 A, B が交換関係 $[A, B] = C$ 但し C は C 数を満たすとき次ぎの関係式が成り立つ。

$$e^{\lambda(A+B) + \frac{\lambda^2}{2} C} = e^{\lambda A} e^{\lambda B}. \quad (\text{G.40})$$

この式を証明する。

$$\begin{aligned}
l.h.s. &= 1 + \lambda(A+B) + \frac{\lambda^2}{2}C + \frac{1}{2!} \left(\lambda^2(A^2 + AB + BA + B^2) + \lambda^3C(A+B) + \frac{\lambda^4}{4}C^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{3!} (\lambda^3(A^3 + AAB + ABA + BAA + ABB + BAB + BBA + B^3) + O(\lambda^4)) \\
&= 1 + \lambda(A+B) + \frac{\lambda^2}{2}(C + A^2 + B^2 + 2AB - C) \\
&\quad + \frac{1}{3!} \lambda^3(A^3 + B^3 + 3AAB - 3CA + 3ABB - 3CB + 3C(A+B)) \dots \\
&= 1 + \lambda(A+B) + \frac{\lambda^2}{2}(A^2 + B^2 + 2AB) + \frac{1}{3!} \lambda^3(A^3 + B^3 + 3AAB + 3ABB) \dots \\
r.h.s. &= (1 + \lambda A + \frac{\lambda^2}{2!}A^2 + \frac{\lambda^3}{3!}A^3 \dots) \\
&\quad \times (1 + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2!}B^2 + \frac{\lambda^3}{3!}B^3 \dots) \\
&= 1 + \lambda(A+B) + \frac{\lambda^2}{2}(A^2 + B^2 + 2AB) + \frac{\lambda^3}{3!}(A^3 + B^3 + 3AAB + 3ABB) \dots
\end{aligned}$$

よって証明された。この関係式を Baker-Hausdorff の関係式と呼ぶ。次にこの関係式をエレガントな方法で証明する。

$$g(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B} \quad (\text{G.41})$$

と置く。この式の両辺を λ で微分し $[A, B] = C$ 但し C は C 数を代入すると以下の微分方程式を得る。

$$\begin{aligned}
g'(\lambda) &= A e^{\lambda A} e^{\lambda B} + e^{\lambda A} B e^{\lambda B} \\
&= A g(\lambda) + e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} e^{\lambda A} e^{\lambda B} \\
&= A g(\lambda) + (B + \lambda[A, B]) g(\lambda) = (A + B + \lambda C) g(\lambda) \quad (\text{G.42})
\end{aligned}$$

を得る。この微分方程式を時 $g(0) = 1$ を代入することで Baker-Hausdorff の関係式が証明できる。

G.2 変換則

空間座標回転

簡単のため z 軸周りの無限小角 ε の座標回転を考える。

$$\begin{aligned}x' &= x + \varepsilon y \\y' &= y - \varepsilon x\end{aligned}\tag{G.43}$$

ベクトル形式で記述すると以下のようなになる。

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{\varepsilon} \times \vec{x}, \quad x'^i = x^i - \varepsilon^i_{jk} \varepsilon^j x^k\tag{G.44}$$

ここで $\vec{\varepsilon}$ は、回転軸の方向を向いた大きさが回転角を表す無限小ベクトルである。式 (G.44) は任意の回転軸周りの無限小回転に適応できる。例として任意のスカラー関数 $\phi(\vec{x})$ の無限小回転を考える。スカラー関数は回転に対して普遍であるから以下の関係式が成り立つ。

$$\phi'(\vec{x}') = \phi(\vec{x})\tag{G.45}$$

以下のように定義される Lie 微分

$$\delta^L \phi(\vec{x}) \equiv \phi'(\vec{x}') - \phi(\vec{x})\tag{G.46}$$

は微小量の一次までで以下のように計算される

$$\begin{aligned}\delta^L \phi(\vec{x}) &= \phi'(\vec{x}') - \phi(\vec{x}) - (\phi'(\vec{x}') - \phi'(\vec{x})) \\&= -(\phi'(\vec{x} - \vec{\varepsilon} \times \vec{x}) - \phi'(\vec{x})) \\&= -(\phi'(\vec{x}) - (\vec{\varepsilon} \times \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \phi'(\vec{x}) - \phi'(\vec{x})) \\&= (\vec{\varepsilon} \times \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} \phi'(\vec{x}) = \vec{\varepsilon} \cdot (\vec{x} \times \vec{\nabla}) \phi'(\vec{x}) \\&= \frac{i}{\hbar} (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{L} \phi(\vec{x})).\end{aligned}\tag{G.47}$$

ここで ε が微小量であるため ϕ' と ϕ の違いから現れる微小量は二次以上の微小量となるため無視した。また以下のように定義される角運動量演算子 \vec{L} を用いた。

$$\vec{L} = \vec{x} \times (-i\hbar \vec{\nabla})\tag{G.48}$$

式 (G.47) では、角運動量演算子がスカラー場 $\phi(x)$ に作用しているのみを表現するため演算子とスカラー場をカッコでくくった。しかし、演算子は一般に $\phi(x)$ と入れ替わりその後ろの関数に作用する場合もありうる。したがって、角運動量演算子をスカラー関数 $\phi(x)$ の前に作用すると

$$\vec{\varepsilon} \cdot \vec{L} \phi(\vec{x}) = (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{L} \phi(\vec{x})) + \phi(\vec{x}) \vec{\varepsilon} \cdot \vec{L},\tag{G.49}$$

のように $\phi(x)$ に作用する右辺第一項と $\phi(x)$ をスルーして後ろにある関数に作用する右辺第二項に分けられる。このことを考慮して式 (G.47) を微小量の一次までで表現すると以下ようになる。

$$\delta^L \phi(x) = \frac{i}{\hbar} (\vec{\epsilon} \cdot \vec{L} \phi(\vec{x}) - \phi(x) \vec{\epsilon} \cdot \vec{L}) = -\frac{i}{\hbar} [\phi(x), \vec{\epsilon} \cdot \vec{L}]. \quad (\text{G.50})$$

$$\phi'(x) = \left(1 + \frac{i}{\hbar} \vec{\epsilon} \cdot \vec{L}\right) \phi(x) \left(1 - \frac{i}{\hbar} \vec{\epsilon} \cdot \vec{L}\right). \quad (\text{G.51})$$

任意の回転軸周りの有限な角度 α の回転変換を回転軸方向を向いた大きさが回転角のベクトル $\vec{\alpha}$ を用いて表現する。この回転変換 $R(\vec{\alpha})$ を、大きな n を用いて $\vec{\epsilon} = \vec{\alpha}/n$ で定義される微小回転を n 回繰り返す操作に置き換えることができる。即ち

$$U(\vec{\alpha}) = \left(1 + \frac{i}{\hbar} \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{L}}{n}\right)^n \quad (\text{G.52})$$

式 (G.52) の右辺は $n \rightarrow \infty$ の極限で Exponential を使って書けることから、有限角度の回転変換は次のように与えられる。

$$U(\vec{\alpha}) = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{\alpha} \cdot \vec{L}} \quad (\text{G.53})$$

$$\phi'(\vec{x}) = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{\alpha} \cdot \vec{L}} \phi(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\alpha} \cdot \vec{L}} \quad (\text{G.54})$$

軌道角運動量 \vec{L} はエルミート演算子であり、 $\vec{L}^\dagger = \vec{L}$ なので

$$U^\dagger(\vec{\alpha}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\alpha} \cdot \vec{L}} = U(-\vec{\alpha}) = U^{-1}(\vec{\alpha}) \quad (\text{G.55})$$

であり、 U はエルミート共役が逆行列となるユニタリー行列である。

特殊相対性原理から Dirac 方程式は、ローレンツ不変である必要がある。この要請からスピノールに要求される変換則を調べる。Dirac 方程式 (D.14) を扱う。この方程式の解となる二成分スピノールは (D.35) と (D.36) から

$$\left(k^0 - \frac{mc}{\hbar}\right) \phi = \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \chi \quad (\text{G.56})$$

$$\left(k^0 + \frac{mc}{\hbar}\right) \chi = \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \phi \quad (\text{G.57})$$

を満たす。座標無限小回転 (G.44) により波数ベクトルの成分は以下のように変換される。

$$\vec{k}' = \vec{k} - \vec{\epsilon} \times \vec{k} \quad (\text{G.58})$$

座標回転後のスピノールを'をつけて ϕ' と表すこととする。Dirac 方程式がローレンツ不変であるためには、変換後も同じ形の方程式が成り立つ必要がある。即ち

$$\left(k^0 - \frac{mc}{\hbar}\right) \phi' = \vec{k}' \cdot \vec{\sigma} \chi' \quad (\text{G.59})$$

$$\left(k^0 + \frac{mc}{\hbar}\right) \chi' = \vec{k}' \cdot \vec{\sigma} \phi' \quad (\text{G.60})$$

座標回転後の新しい系でもパウリ行列の標識は不変とした。また粒子のエネルギー k_0 、質量 m は座標回転により変わらないことを用いた。スカラー関数の変換則 (G.47) から以下のように変換することが推測される。

$$\phi'(x') = (1 + i\vec{\epsilon} \cdot \frac{1}{2}\vec{\sigma}) \phi(x), \quad \chi'(x') = (1 + i\vec{\epsilon} \cdot \frac{1}{2}\vec{\sigma}) \chi(x) \quad (\text{G.61})$$

式 (G.59) に右から $(1 - i\vec{\epsilon} \cdot \frac{1}{2}\vec{\sigma})$ を作用すると

$$\begin{aligned} \left(k^0 - \frac{mc}{\hbar}\right) \phi(x) &= \left[(\vec{k} \cdot \vec{\sigma}) - i\frac{1}{2}(\vec{\epsilon} \cdot \vec{\sigma})(\vec{k} \cdot \vec{\sigma}) - \vec{\sigma} \cdot (\vec{k} \times \vec{\epsilon}) \right] \chi'(x') \\ &= \left[(\vec{k} \cdot \vec{\sigma}) - i\frac{1}{2}(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})(\vec{\epsilon} \cdot \vec{\sigma}) \right] \chi'(x') \\ &= (\vec{k} \cdot \vec{\sigma}) (1 - i\vec{\epsilon} \cdot \vec{\sigma}) \chi'(x') \\ &= (\vec{k} \cdot \vec{\sigma}) \chi(x) \end{aligned} \quad (\text{G.62})$$

を得る。ここで演算公式 (G.7)、(G.8) を用いた。同様の操作を式 (G.60) に施すと式 (G.60) から Dirac 方程式 (G.60) に至ることが示される。これらのことは、スピノールが微小座標回転変換に伴い (G.61) のように変換すれば、変換前後で Dirac 方程式が不変に保たれることを示している。言い換えると Dirac 方程式の空間回転変換に対する不変性を保証するためにはスピノールは (G.61) のように変換されれば良いことが示された。式 (G.54) の導出と同様の考察から $\vec{\alpha}$ の方向を回転軸とした有限角 α での回転変換によるスピノールの変換則が以下のように与えられる。

$$\phi'(x') = \exp[i\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha}/2] \phi(x), \quad \chi'(x') = \exp[i\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha}/2] \chi(x) \quad (\text{G.63})$$

簡単な例として $\vec{\alpha}$ が z 軸正の方向を向いている場合についてこの変換則を

考察する。この時

$$\begin{aligned}
 \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma} &= \alpha \sigma_3 \\
 \exp[i\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha}/2] &= 1 + i\alpha\sigma_3/2 + \frac{1}{2!}(i\alpha\sigma_3/2)^2 + \frac{1}{3!}(i\alpha\sigma_3/2)^3, \dots \\
 &= I - \frac{1}{2!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 I + i \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 + \dots\right] \sigma_3 \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \tag{G.64}
 \end{aligned}$$

z 軸周りの角度 α の座標回転によりスピノールの各成分の位相が $\alpha/2$ シフトする。位相が 2π シフトし、元のスピノールに戻るには α が 4π 変化する必要がある。即ち座標が二回転して、スピノールが一回元に戻る。つまりスピンの $1/2$ の状態である。座標回転に伴うスピノールの変換行列を U と表すと

$$U^\dagger = \exp[-i\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha}/2] \tag{G.65}$$

であり。エルミート共役な行列が逆行列となる。即ち U はユニタリー行列である。4成分を持つスピノール ψ の回転変換は以下のように書ける。

$$\psi'(x') = \exp\left[i\frac{1}{2}\vec{\Sigma} \cdot \vec{\alpha}\right] \psi(x) \tag{G.66}$$

以下この変換行列を \tilde{U} と表すことにする。

4元カレント (D.23) は、以下のように変換される。4元カレントの第ゼロ成分は座標回転によって以下のように変換される。

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}'(\vec{x}', t) \gamma^0 \psi'(\vec{x}', t) &= \psi^\dagger(\vec{x}, t) \tilde{U}^\dagger \gamma^0 \tilde{U} \psi(\vec{x}, t) \\
 &= \psi^\dagger(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) = \bar{\psi}(\vec{x}, t) \gamma^0 \psi(\vec{x}, t) \tag{G.67}
 \end{aligned}$$

即ち $\bar{\psi} \gamma^0 \psi$ はスカラーである。また $\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^0 \psi$ は、公式 (G.35) と (G.38) を使うと以下のように変換される。

$$\bar{\psi}'(\vec{x}', t) \gamma^5 \gamma^0 \psi'(\vec{x}', t) = \psi^\dagger(\vec{x}, t) \tilde{U}^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \tilde{U} \psi(\vec{x}, t)$$

$$\begin{aligned}
&= -\psi^\dagger(\vec{x}, t)\gamma^5\psi(\vec{x}, t) = \bar{\psi}(\vec{x}, t)\gamma^0\gamma^5\psi(\vec{x}, t) \\
&= \bar{\psi}(\vec{x}, t)\gamma^5\gamma^0\psi(\vec{x}, t) \tag{G.68}
\end{aligned}$$

したがって $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^0\psi$ は、回転変換に対してスカラーとして振る舞う。回転変換に対して以下量がスカラーであることも容易に示せる。

$$\bar{\psi}'(\vec{x}', t)\psi'(\vec{x}', t) = \bar{\psi}(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}, t) \tag{G.69}$$

$$\bar{\psi}'(\vec{x}', t)\gamma^5\psi'(\vec{x}', t) = \bar{\psi}(\vec{x}, t)\gamma^5\psi(\vec{x}, t) \tag{G.70}$$

4元カレントの空間成分の変換則を以下のように求めることができる。空間成分を具体的に書き下すと以下ようになる。

$$\vec{j} = \phi^\dagger \vec{\sigma} \chi + \chi^\dagger \vec{\sigma} \phi \tag{G.71}$$

無限小回転変換後のカレントの空間成分の第一項の i 成分は微量の一次まで以下のように変換を受ける。

$$\begin{aligned}
\phi^\dagger \sigma_i \chi' &= \phi^\dagger \left(1 - i\frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\sigma}}{2}\right) \sigma_i \left(1 + i\frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\sigma}}{2}\right) \chi \\
&= \phi^\dagger \sigma_i \chi - \frac{i}{2}(\epsilon_j \sigma_j \sigma_i - \sigma_i \epsilon_j \sigma_j) \\
&= \phi^\dagger \sigma_i \chi + \frac{i}{2} \epsilon_j 2i \epsilon_{ijk} \phi^\dagger \sigma_k \chi \\
&= \phi^\dagger \sigma_i \chi - (\vec{\epsilon} \times \vec{\sigma})_i \tag{G.72}
\end{aligned}$$

ここで公式 (G.8)、(G.9) を用いた。したがって、式 (G.72) は

$$\vec{j}'(x') = \vec{j}(x) - \vec{\epsilon} \times \vec{j}(x) \tag{G.73}$$

のように変換される。これは3次元ベクトルの変換則と同じように変換されることをしめしており4元カレントの空間成分が3次元ベクトルであることが証明できた。次に $\bar{\psi}\gamma^5\vec{\gamma}\psi$ の変換則を求める。この量は、以下のように書ける。

$$\bar{\psi}\gamma^5\vec{\gamma}\psi = -\psi^\dagger \vec{\sigma} \beta \psi = -\phi^\dagger \vec{\sigma} \phi + \chi^\dagger \vec{\sigma} \chi \tag{G.74}$$

これから変換則 (G.73) を示した手続きを辿れば、無限小座標回転変換に対して以下のように変換されることが示される。

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^5\vec{\gamma}\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\gamma^5\vec{\gamma}\psi(x) - \vec{\epsilon} \times \bar{\psi}(x)\gamma^5\vec{\gamma}\psi(x) \tag{G.75}$$

以上の話をローレンツ変換も含めた4次元時空での Dirac 方程式の共変性に一般化する。変換前後の座標が以下の式で結ばれるとする。

$$x^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu} \quad (\text{G.76})$$

これに伴いスピノールが以下の様に変換を受けるとする。

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \quad (\text{G.77})$$

ここで $S(\Lambda)$ は 4×4 の行列である。変換前後の座標での Dirac 方程式は以下の様に書ける。

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - m\psi(x) = 0 \quad (\text{G.78})$$

$$i\gamma^{\mu'}\partial_{\mu'}\psi'(x') - m\psi'(x') = 0 \quad (\text{G.79})$$

座標変換後の方程式 (G.79) に変換式 (G.76)、(G.77) を代入すると以下の式を得る。

$$i\gamma^{\nu'}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}}\partial_{\mu}S(\Lambda)\psi(x) - mS(\Lambda)\psi(x) = 0 \quad (\text{G.80})$$

ここで

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} \quad (\text{G.81})$$

はローレンツ変換 (G.76) の逆行列である。方程式 (G.80) に左から $S^{-1}(\Lambda)$ を作用すると

$$iS^{-1}(\Lambda)(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu'}\gamma^{\nu'}S(\Lambda)\partial_{\mu}\psi(x) - m\psi(x) = 0 \quad (\text{G.82})$$

となる。Dirac 方程式がローレンツ不変であるためにはこの方程式が方程式 (G.80) と等しくなければならない。この要請からローレンツ変換に伴うガンマ行列の以下の変換則を得る。

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu'}\gamma^{\nu'} = S(\Lambda)\gamma^{\mu}S^{-1}(\Lambda) \quad (\text{G.83})$$

次に無限小ローレンツ変換に対する $S(\Lambda)$ の具体的形を求める。無限小ローレンツ変換に対して微小量の一次まででローレンツ変換とその逆変換を表す変換行列の成分は以下の様に書ける。

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}, \quad (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu'} = \delta^{\mu}_{\nu} - \omega^{\mu}_{\nu} \quad (\text{G.84})$$

例として x 軸方向に速度 $\beta \ll 1$ で運動する座標への変換を取り上げる。この時変換係数は微小量の一次までで以下の様になる。

$$\begin{aligned} \Lambda^0_0 &\sim 1, & \Lambda^0_1 &\sim -\beta \\ \Lambda^1_0 &\sim -\beta, & \Lambda^1_1 &\sim 1 \end{aligned} \quad (\text{G.85})$$

これから $\omega_{\mu\nu}$ は以下の様になる。

$$\begin{aligned} \omega_{00} &= \eta_{00}(\Lambda^0_0 - \delta^0_0) \sim 0, & \omega_{01} &= \eta_{00}\Lambda^0_1 \sim \beta \\ \omega_{10} &= \eta_{11}\Lambda^1_0 \sim -\beta, & \omega_{11} &= \eta_{11}(\Lambda^1_1 - \delta^1_1) \sim 0 \end{aligned} \quad (\text{G.86})$$

無限小回転変換 (G.44) を表す変換行列は以下の様なる。

$$\Lambda_i^j = \delta_i^j - \varepsilon^i_{jk} \varepsilon^k_l \delta_l^j = \delta_i^j - \varepsilon^i_{jl} \varepsilon^j \quad (\text{G.87})$$

これより

$$\omega_{il} = -\varepsilon_{ijl} \varepsilon^j = \varepsilon_{ilj} \varepsilon^j = -\varepsilon_{lij} \varepsilon^j = -\omega_{li} \quad (\text{G.88})$$

ここで $\varepsilon_{ilj} = \eta_{ii} \varepsilon^i_{lj} = \varepsilon^i_{lj}$ を用いた。したがって、 $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ を満たす反対称テンソルである。反対称テンソル $\sigma_{\mu\nu}$ を用いて S とその逆変換が微小量の一次までで以下の様に書けるとする。

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &\sim I - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \\ S^{-1}(\Lambda) &\sim I + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{G.89})$$

式 (G.84) を関係式 (G.83) の左辺に代入する。

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu'} \gamma^{\nu} = \gamma^{\mu} - \omega^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} = \gamma^{\mu} - \eta_{\alpha\nu} \omega^{\mu\nu} \gamma^{\alpha} \quad (\text{G.90})$$

次に式 (G.89) を関係式 (G.83) の右辺に代入する。

$$S(\Lambda) \gamma^{\mu} S^{-1}(\Lambda) \sim \gamma^{\mu} + \frac{i}{4} \omega^{\alpha\beta} [\gamma^{\mu}, \sigma_{\alpha\beta}] \quad (\text{G.91})$$

式 (G.90) と (G.91) の比較から以下の式を得る。

$$\frac{i}{4} \omega^{\alpha\beta} [\gamma^{\mu}, \sigma_{\alpha\beta}] = -\eta_{\nu\beta} \omega^{\mu\beta} \gamma^{\nu} = -\omega^{\alpha\beta} \gamma_{\beta} \delta^{\mu}_{\alpha}$$

$$= -\frac{1}{2}(\omega^{\alpha\beta}\gamma_\beta\delta^\mu_\alpha - \omega^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\delta^\mu_\beta) \quad (\text{G.92})$$

Dirac 方程式がローレンツ不変であるためには、式 (G.92) は、任意の微小量 $\omega^{\alpha\beta}$ に対して成立する必要がある。したがって、

$$[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i(\gamma_\beta\delta^\mu_\alpha - \gamma_\alpha\delta^\mu_\beta) \quad (\text{G.93})$$

ここで $\gamma_\beta = \eta_{\beta\alpha}\gamma^\alpha$ である。以下の形で $\sigma_{\mu\nu}$ を定義すれば、関係式 (G.93) が満たされる。

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \quad (\text{G.94})$$

この式を式 (G.93) の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} 2i[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] &= \gamma^\mu(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha) - (\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha)\gamma^\mu \\ &= \eta_{\alpha\nu}(-\gamma^\nu\gamma^\mu - 2\eta^{\mu\nu}I)\gamma_\beta - \eta_{\beta\nu}(-\gamma^\nu\gamma^\mu - 2\eta^{\mu\nu}I)\gamma_\alpha \\ &\quad - \gamma_\alpha\eta_{\beta\nu}(-\gamma^\mu\gamma^\nu - 2\eta^{\mu\nu}I) + \gamma_\beta\eta_{\alpha\nu}(-\gamma^\mu\gamma^\nu - 2\eta^{\mu\nu}I) \\ &= (-\gamma_\alpha\gamma^\mu - 2\delta^\mu_\alpha I)\gamma_\beta - (-\gamma_\beta\gamma^\mu - 2\delta^\mu_\beta I)\gamma_\alpha \\ &\quad - \gamma_\alpha(-\gamma^\mu\gamma_\beta - 2\delta^\mu_\beta I) + \gamma_\beta(-\gamma^\mu\gamma_\alpha - 2\delta^\mu_\alpha I) \\ &= 4(\gamma_\alpha\delta^\mu_\beta - \gamma_\beta\delta^\mu_\alpha) \end{aligned} \quad (\text{G.95})$$

となり確かに関係式 (G.93) が成り立つ。この無限小変換を繰り返すことで有限角の座標回転および有限速度のローレンツ変換の変換行列として以下の式を得る。

$$S(\Lambda) = e^{-(i/4)\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}} \quad (\text{G.96})$$

角運動量演算子 $J_{\mu\nu}$ を座標回転に対するスカラー場のリー微分の (G.47) からの類推で以下の様にスピノールのリー微分を使って定義する。

$$\delta^L\psi(x) = -\frac{i}{2}J_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\psi(x) \quad (\text{G.97})$$

リー微分を定義に従って計算する。

$$\begin{aligned} \delta^L\psi(x) &= \psi'(x) - \psi(x) = \psi'(x') - \psi(x) - (\psi'(x') - \psi'(x)) \\ &\sim -\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\psi(x) - (\psi(x^\mu + \omega^\mu_{\nu}x^\nu) - \psi(x^\mu)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sim -\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\psi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \psi(x) \\
&= -\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\psi(x) + x_\mu \omega^{\mu\nu} \partial_\nu \psi(x)
\end{aligned} \tag{G.98}$$

式 (G.97) と (G.98) の比較から角運動量演算子の具体的な形が以下の様に求まる。

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \tag{G.99}$$

これと無限小時間空間推進の生成子即ち 4 元運動量 $P^\sigma = -i\partial^\sigma$ を用いて無限小ローレンツ変換の生成子を以下の様に定義できる。

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma = \frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sigma^{\nu\rho} \partial^\sigma \tag{G.100}$$

粒子のヘリシティをを求める演算子を導出するため 4 元波数ベクトル k と直交する規格化された space like ベクトル n を導入する。すると $n \cdot k = 0$, $n^2 = 1$ である。その様なベクトルの例として

$$n = \left(\frac{|\vec{k}|}{m}, \frac{k_0}{m} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \right) \tag{G.101}$$

を採用する。確かに

$$\begin{aligned}
n \cdot k &= -\frac{|\vec{k}|}{m} k_0 + \frac{k_0}{m} |\vec{k}| = 0 \\
n^2 &= -\frac{|\vec{k}|^2}{m^2} + \frac{k_0^2}{m^2} = \frac{m^2}{m^2} = 1
\end{aligned}$$

であり条件を満たす。準備のため次の計算を行う。

$$\begin{aligned}
2i\varepsilon_{01\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} &= \varepsilon_{0123}[\gamma^2, \gamma^3] + \varepsilon_{0132}[\gamma^3, \gamma^2] = 2\varepsilon_{0123}[\gamma^2, \gamma^3] \\
&= 2\varepsilon_{0123}(\gamma^2\gamma^3 - \gamma^3\gamma^2) = -4\varepsilon_{0123}\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= 4\varepsilon_{0123}\gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -4i\varepsilon_{0123}\gamma^0\gamma^1\gamma^5 \\
\varepsilon_{01\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} &= -2\varepsilon_{0123}\gamma^0\gamma^1\gamma^5 = -(\gamma^0\gamma^1 - \gamma^1\gamma^0)\gamma^5
\end{aligned} \tag{G.102}$$

$$\begin{aligned}
2i\varepsilon_{02\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} &= 2\varepsilon_{0213}[\gamma^1, \gamma^3] = 4\varepsilon_{0213}\gamma^1\gamma^3 \\
&= -4\varepsilon_{0213}\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^2\gamma^3 = -4\varepsilon_{0213}\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= -4i\varepsilon_{0231}\gamma^0\gamma^2\gamma^5
\end{aligned} \tag{G.103}$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} = i\sigma^{\mu\nu}\gamma^5 \quad (\text{G.104})$$

以下のようにベクトル n 方向の角運動量を求める演算子を定義する。ここで $\partial_\mu = ik_\mu$ と置き換える。

$$\begin{aligned} W \cdot n &= -\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\nu\rho}k^\sigma n^\mu = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}n^\mu k^\nu \sigma^{\rho\sigma} = \frac{i}{2}n_\mu k_\nu \sigma^{\mu\nu}\gamma^5 \\ &= \frac{1}{2}\gamma^5 \not{n} \not{k} \end{aligned} \quad (\text{G.105})$$

したがって、粒子静止系 $k = (m, 0, 0, 0)$ では、 $n = (0, \vec{n})$ となり

$$W \cdot n = \frac{1}{2}\gamma^5 \vec{n} \cdot \vec{\gamma} (-m\gamma^0) = \frac{1}{2}\gamma^5 \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{n} m \quad (\text{G.106})$$

よって、

$$W^0 = 0, \quad \frac{\vec{W}}{m} = \frac{1}{2}\gamma^5 \gamma^0 \vec{\gamma} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \quad (\text{G.107})$$

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (\text{G.108})$$

確かに (G.105) は、ベクトル n 方向のスピン角運動量を求める演算子である。ここで一般性を失うことなく粒子の進行方向を z 軸方向すなわち $k = (k_0, 0, 0, k)$ と取ることがができる。この時演算子 (G.105) は以下のようになる。

$$\begin{aligned} W \cdot n &= \frac{1}{2}\gamma^5 \left(-\frac{|\vec{k}|}{m}\gamma^0 + \frac{k_0}{m}\frac{\vec{k} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{k}|} \right) (-k_0\gamma^0 + \vec{k} \cdot \vec{\gamma}) \\ &= \frac{1}{2}\gamma^5 \left(\frac{|\vec{k}|}{m}k_0 - \frac{k_0^2}{m}\frac{\vec{k} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{k}|}\gamma^0 - \frac{|\vec{k}|}{m}\gamma^0 \vec{k} \cdot \vec{\gamma} + \frac{k_0}{m}\frac{(\vec{k} \cdot \vec{\gamma})^2}{|\vec{k}|} \right) \\ &= -\frac{m}{2}\gamma^5 \gamma^3 \gamma^0 \\ \frac{W \cdot n}{m} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{G.109})$$

したがって、スピノール (D.64) と (D.66) はヘリシティが正のスピン 1/2 の状態であり、スピノール (D.65) と (D.67) はヘリシティが負のスピン

$-1/2$ の状態である。ヘリシティー演算子をスピノール (D.49) と (D.50) に作用するとどうなるか $\not{k} \not{k} = -k^2 = -(-k_0^2 + |\vec{k}|^2) = m^2$ を使い計算する。

$$\begin{aligned} \frac{W \cdot n}{m} u^s(k) &= \frac{1}{2} \gamma^5 \not{n} \not{k} \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{2m(m+E)}} u^s(m, 0) \\ &= -\frac{1}{2} \gamma^5 \not{n} \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{2m(m+E)}} u^s(m, 0) \\ &= -\frac{1}{2} \gamma^5 \not{n} u^s(k) = \pm \frac{1}{2} u^s(k) \end{aligned} \quad (\text{G.110})$$

$$\begin{aligned} \frac{W \cdot n}{m} v^s(k) &= \frac{1}{2} \gamma^5 \not{n} \not{k} \frac{\not{k} + m}{\sqrt{2m(m+E)}} v^s(m, 0) \\ &= \frac{1}{2} \gamma^5 \not{n} \frac{\not{k} + m}{\sqrt{2m(m+E)}} v^s(m, 0) \\ &= \frac{1}{2} \gamma^5 \not{n} v^s(k) = \pm \frac{1}{2} v^s(k) \end{aligned} \quad (\text{G.111})$$

複合は $s=1$ の時正を $s=2$ の時負を取る。式 (G.110) と (G.111) の結果から正のヘリシティーを持つ粒子と負のヘリシティーを持つ反粒子のみ抽出すると射影演算子が以下のように定義し、その作用をいかにまとめる。

$$P(n) = \frac{1}{2}(I - \gamma^5 \not{n}) \quad (\text{G.112})$$

$$P(n)u^1(k) = u^1(k), \quad P(n)u^2(k) = 0, \quad P(n)v^1(k) = 0, \quad P(n)v^2(k) = v^2(k) \quad (\text{G.113})$$

この演算子は、負のヘリシティーを持った粒子と正のヘリシティーを持った反粒子はこの演算子をスピノールに作用すると消滅する。負のヘリシティーを持った粒子と正のヘリシティーを持った反粒子を抽出する演算子は n の向きを逆向きにすれば良く

$$P(-n) = \frac{1}{2}(I + \gamma^5 \not{n}) \quad (\text{G.114})$$

である。その作用は以下ようになる。

$$P(-n)u^1(k) = 0, \quad P(-n)u^2(k) = u^2(k), \quad P(-n)v^1(k) = v^1(k), \quad P(-n)v^2(k) = 0 \quad (\text{G.115})$$

このように射影演算子は、作用する状態が粒子状態であるか反粒子状態であるかによって効果が決まるため一律で行列の成分表示で書くことはできない。

超相対論的極限即ちマスの極限 $|\vec{k}| \rightarrow k_0$, $m \ll k_0$ を考える。粒子解の分散関係式は以下のようになる。

$$-k_0\gamma^0 + \vec{k} \cdot \vec{\gamma} + m = 0 \quad (\text{G.116})$$

したがって、

$$\begin{aligned} \not{k} &= -\frac{|\vec{k}|}{m}\gamma^0 + \frac{k_0}{m}\frac{\vec{k} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{k}|} = -\frac{|\vec{k}|}{m}\gamma^0 + \frac{k_0}{m}\frac{1}{|\vec{k}|}(k_0\gamma^0 - m) \\ &= \frac{-|\vec{k}|^2 + k_0^2}{m|\vec{k}|}\gamma^0 - \frac{k_0}{|\vec{k}|} = \frac{m}{|\vec{k}}\gamma^0 - \frac{k_0}{|\vec{k}|} \\ &\rightarrow -1 \end{aligned} \quad (\text{G.117})$$

でありマスの粒子に対する射影演算子は以下のようになる。

$$P(n) = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \quad (\text{G.118})$$

$$P(-n) = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad (\text{G.119})$$

一方、反粒子解の分散関係式は以下のものである。

$$k_0\gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} + m = 0 \quad (\text{G.120})$$

したがって、

$$\begin{aligned} \not{k} &= -\frac{|\vec{k}|}{m}\gamma^0 + \frac{k_0}{m}\frac{\vec{k} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{k}|} = -\frac{|\vec{k}|}{m}\gamma^0 + \frac{k_0}{m}\frac{1}{|\vec{k}|}(k_0\gamma^0 + m) \\ &= \frac{-|\vec{k}|^2 + k_0^2}{m|\vec{k}|}\gamma^0 + \frac{k_0}{|\vec{k}|} = \frac{m}{|\vec{k}}\gamma^0 + \frac{k_0}{|\vec{k}|} \\ &\rightarrow 1 \end{aligned} \quad (\text{G.121})$$

したがって、マスの反粒子に対する射影演算子は以下の形で書ける

$$P(n) = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad (\text{G.122})$$

$$P(-n) = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \quad (\text{G.123})$$

あとで示すようにマッスレス粒子に対する射影演算子 (G.118)、(G.123) は正のカイラリティー状態を抽出する演算子であり、(G.119)、(G.122) は負のカイラリティー状態を抽出する演算子である。したがって、 $P(n)$ により取り出される粒子 $u^1(k)$ は正のカイラリティー（右巻き）を持ち、反粒子 $v^2(k)$ は負カイラリティー（左巻き）を持つことになる。

Parity 変換

空間座標を右手系から左手系に変換する変換をパリティ変換と呼ぶ。パリティ変換を \mathbf{P} で表すと \mathbf{P} は以下の操作を表す。

$$\mathbf{P}: \vec{x} \rightarrow \vec{x}' = -\vec{x}, t \rightarrow t \quad (\text{G.124})$$

例えば速度ベクトルは、風が西から東に吹いているという物理的実態を表現する物理量なので、その向き大きさは座標系の取り方によらない。人間がパリティを変換して右手系から左手系にしたからといって自然現象である風が吹く方向は変化しない。その結果、パリティ変換後の座標系では、速度ベクトルの向きが逆になる。つまり $\mathbf{P}: \vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ と変換させる。このようにパリティ変換を受けるベクトルを極性ベクトル (Polar vector) と呼ぶ。極性ベクトルには、電場ベクトル、ベクトルポテンシャル、位置ベクトルなどがある。一方、角運動量ベクトルは $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{v}$ のように位置ベクトルと速度ベクトルの外積で定義されており、角運動量ベクトルの向きは右手系では \vec{x} から \vec{v} の方向に右ねじを回した時ネジが進む方向であるのに対して、左手系では左ネジを回したときネジが進む方向となる。結果、右手系と左手系では各運動量ベクトルの向きが逆転する。つまり $\mathbf{P}: \vec{L} \rightarrow \vec{L}$ である。このようにパリティ変換を受けるベクトルを軸性ベクトル (Axial vector) と呼ぶ。或いは擬ベクトル (Pseudo vector) とも呼ばれる。軸性ベクトルには、磁場ベクトル、スピベクトル ($\vec{\sigma}$) などがある。ローレンツ力 $\vec{v} \times \vec{B}$ は、極性ベクトルと軸性ベクトルの外積で定義されており、極性ベクトルである。ローレンツ力の向きが座標の取り方に依存しないことから当然の結果である。極性ベクトル同士の内積で定義されるスカラー量 $\vec{v} \cdot \vec{E}$ は単にスカラーと呼ばれる量でパリティ変換で符号を変えない。この例は、電場が粒子になす仕事率であり、仕事率の正負が座標系の取り方に依存し

ないことから自明である。一方、極性ベクトルと軸性ベクトルの内積で定義されるスカラー量 $\vec{v} \cdot \vec{B}$ は、擬スカラー (Pseudo scalar) と呼ばれる量でパリティ変換で符号を変える。

左手系を採用した物理学者と右手系を採用した物理学者間で相対論的電子の量子力学的振る舞いが変わってはいけないという要請から Dirac 方程式は、パリティ変換に対して不変であるべきである。その要請からパリティ変換後のスピノール $\psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}')$ と変換前のスピノール $\psi(\vec{x})$ の間の関係が得られる。パリティ変換 (G.124) 後の新しい座標系で Dirac 方程式は以下のように書ける。

$$i\gamma^0 \partial_0 \psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) + i\gamma^j \partial'_j \psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) - \frac{mc}{\hbar} \psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) = 0 \quad (\text{G.125})$$

ここで $\partial'_i = -\partial_i$ であるから方程式 (G.125) は以下のように書き換えられる。

$$i\gamma^0 \partial_0 \psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) - i\gamma^j \partial_j \psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) - \frac{mc}{\hbar} \psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) = 0 \quad (\text{G.126})$$

関係式 (G.18) を意識してこの式に左から γ^0 を作用すると以下のようになる。

$$0 = i\gamma^0 \partial_0 \gamma^0 \psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) + i\gamma^j \partial_j \gamma^0 \psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) - \frac{mc}{\hbar} \gamma^0 \psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) \quad (\text{G.127})$$

これからパリティ変換によるスピノールが以下のように変換を受ければ、パリティ変換に対する Dirac 方程式の不変性が保たれることが分かる。

$$\psi(\vec{x}, t) = \gamma^0 \psi_{\mathbf{P}}(-\vec{x}, t) \quad (\text{G.128})$$

以下のようにも書ける。

$$\psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}, t) = \gamma^0 \psi(-\vec{x}, t) = \gamma^0 \hat{\mathbf{P}}_0 \psi(\vec{x}, t) \quad (\text{G.129})$$

ここで登場した $\hat{\mathbf{P}}_0$ は座標系の向きを反転する操作 $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ を表す演算子である。

スピノールを $\psi(\vec{x}, t)$ から $\psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}, t)$ に変換するパリティ演算子を $\hat{\mathbf{P}}$ と表すと

$$\hat{\mathbf{P}}\psi(\vec{x}, t) = \gamma^0 \hat{\mathbf{P}}_0 \psi(\vec{x}, t) \quad (\text{G.130})$$

となり

$$\hat{\mathbf{P}} = \gamma^0 \hat{\mathbf{P}}_0 \quad (\text{G.131})$$

と書けることが分かる。パリティ変換を二度ほどこすと元に戻るので

$$\hat{\mathbf{P}}^2 \psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t) \quad (\text{G.132})$$

であり、 $\hat{\mathbf{P}}$ の固有値は ± 1 であることが分かる。

平面波解に γ^0 を施すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} \gamma^0 u(k, 1) &= N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-\hbar k}{\hbar k^0 + mc} \\ 0 \end{pmatrix} = u(k^0, -\vec{k}, 1) \\ \gamma^0 u(k, 2) &= N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar k}{\hbar k^0 + mc} \end{pmatrix} = u(k^0, -\vec{k}, 2) \\ \gamma^0 v(k, 1) &= N \begin{pmatrix} \frac{\hbar k}{\hbar k^0 + mc} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -v(k^0, -\vec{k}, 1) \\ \gamma^0 v(k, 2) &= N \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\hbar k}{\hbar k^0 + mc} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -v(k^0, -\vec{k}, 2) \end{aligned} \quad (\text{G.133})$$

量子化した場に対しパリティ変換を施す。スカラー場は、パリティ変換に対して普遍であり $\hat{\phi}_p(\vec{x}, t) = \hat{\phi}(-\vec{x}, t)$ である。パリティ変換演算子を \hat{P} とし、Dirac 場の演算子を $\hat{\psi}(\vec{x}, t)$ とする。変換後の Dirac 場演算子は以下のようにかける。

$$\hat{\psi}_P(\vec{x}, t) = \hat{P}\hat{\psi}(\vec{x}, t)\hat{P}^{-1} = \gamma^0\psi(-\vec{x}, t) \quad (\text{G.134})$$

ベクトル場は以下のように変換を受ける。

$$\vec{A}_P(\vec{x}, t) = -\vec{A}(-\vec{x}, t), \quad \hat{A}_P^0(\vec{x}, t) = \hat{A}^0(-\vec{x}, t) \quad (\text{G.135})$$

Dirac 場のパリティ変換を具体的に調べる。

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_P(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1,2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (\hat{P}c_{\vec{k}}^{(s)}\hat{P}^{-1}u^s(k)e^{ik\cdot x} + \hat{P}d_{\vec{k}}^{(s)\dagger}\hat{P}^{-1}v^s(k)e^{-ik\cdot x}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1,2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (c_{\vec{k}}^{(s)}\gamma^0 u^s(k)e^{-i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} + d_{\vec{k}}^{(s)\dagger}\gamma^0 v^s(k)e^{i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1,2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (c_{\vec{k}}^{(s)}u^s(k_0, -\vec{k})e^{-i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} - d_{\vec{k}}^{(s)\dagger}v^s(k_0, -\vec{k})e^{i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1,2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (c_{-\vec{k}}^{(s)}u^s(k_0, \vec{k})e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} - d_{-\vec{k}}^{(s)\dagger}v^s(k_0, \vec{k})e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \end{aligned} \quad (\text{G.136})$$

よって、粒子反粒子の生成消滅演算子は、パリティ変換により以下のように変換を受ける。

$$\hat{P}c_{\vec{k}}^{(s)}\hat{P}^{-1} = c^{(s)}(k_0, -\vec{k}), \quad \hat{P}d_{\vec{k}}^{(s)\dagger}\hat{P}^{-1} = -d^{(s)\dagger}(k_0, -\vec{k}) \quad (\text{G.137})$$

これらの結果は、粒子は even parity を持ち、反粒子は odd parity を持つことを示している。

ベクトル場のパリティ変換 (G.135) から光子が odd parity を持つことがわかる。

カイラリティー

γ^5 をカイラリティー演算子と呼ぶ。任意のスピンールに対して

$$\psi^+ = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi \quad (\text{G.138})$$

$$\psi^- = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi \quad (\text{G.139})$$

で定義される状態はそれぞれ

$$\gamma^5 \psi^+ = \frac{1}{2}(\gamma^5 + 1)\psi = \psi^+ \quad (\text{G.140})$$

$$\gamma^5 \psi^- = \frac{1}{2}(\gamma^5 - 1)\psi = -\psi^- \quad (\text{G.141})$$

となり、正のカイラリティ、負のカイラリティを持つ固有状態である。以下で定義される演算子

$$\vec{\Sigma} \cdot \vec{\hat{k}} \quad (\text{G.142})$$

$$\vec{\hat{k}} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \quad (\text{G.143})$$

をヘリシティー演算子と呼ぶ。この演算子をマスの粒子に作用させた結果は以下のようになる。マスの Dirac 方程式から

$$(-k_0 \gamma^0 + \vec{k} \cdot \vec{\gamma})\psi = 0 \quad (\text{G.144})$$

である。公式 (G.29) と (G.31) を用いるとこの演算子をマスのスピノールに作用させた結果は以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \vec{\Sigma} \cdot \vec{\hat{k}} \psi &= \gamma^5 \gamma^0 \vec{\hat{k}} \cdot \vec{\gamma} \psi = \gamma^5 \gamma^0 \frac{k^0}{|\vec{k}|} \gamma^0 \psi \\ &= \gamma^5 \psi \end{aligned} \quad (\text{G.145})$$

すなわちマスの粒子に対してはカイラリティはヘリシティーに等しい。ここでマスの粒子に対しては $k^0 = |\vec{k}|$ であることを用いた。固有値 +1 即ち正のカイラリティを持つ固有状態は $u^1(k)$ と $v^2(k)$ であり、固有値 -1 即ち負のカイラリティを持つ固有状態は $u^2(k)$ と $v^1(k)$ である。マスの粒子に対しては、カイラリティ演算子は $-\gamma^5$ となる。

カイラリティ演算子の固有状態について説明する。以下の二つの演算子を定義する。

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{1 + \gamma^5}{2} \\ P_L &= \frac{1 - \gamma^5}{2} \end{aligned} \quad (\text{G.146})$$

これらを任意のスピノール ψ に作用することで以下の状態を定義する。

$$\begin{aligned}\psi_R &= P_R \Psi \\ \psi_L &= P_L \Psi\end{aligned}\tag{G.147}$$

$\gamma^5 \gamma^5 = I$ であることを考慮して、カイラル演算子をこれらの状態に作用すると

$$\begin{aligned}\gamma^5 \psi_R &= \psi_R \\ \gamma^5 \psi_L &= -\psi_L\end{aligned}\tag{G.148}$$

となり、 ψ_R はカイラリティ演算子の固有値+1の固有状態であり、 ψ_L は固有値-1の固有状態である。したがって、 P_R は任意のスピンール状態を+1のカイラリティを持つ状態に射影する演算子であり、 P_L は-1のカイラリティを持つ状態に射影する演算子である。 $N = (E+m)^{1/2}, A = k/(E+m)$ としてカイラリティ演算子の8つの固有状態が得られる。

$$\begin{aligned}P_R u(k, 1) = \frac{1}{2}(u(k, 1) + v(k, 1)) &= \frac{N(1+A)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & P_L u(k, 1) = \frac{1}{2}(u(k, 1) - v(k, 1)) &= \frac{N(1-A)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ P_R u(k, 2) = \frac{1}{2}(u(k, 2) - v(k, 2)) &= \frac{N(1-A)}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & P_L u(k, 2) = \frac{1}{2}(u(k, 2) + v(k, 2)) &= \frac{N(1+A)}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{G.149}$$

$$\begin{aligned}P_R v(k, 1) = \frac{1}{2}(v(k, 1) + u(k, 1)) &= \frac{N(1+A)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & P_L v(k, 1) = -\frac{1}{2}(u(k, 1) - v(k, 1)) &= -\frac{N(1-A)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ P_R v(k, 2) = -\frac{1}{2}(u(k, 2) - v(k, 2)) &= -\frac{N(1-A)}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & P_L v(k, 2) = \frac{1}{2}(u(k, 2) + v(k, 2)) &= \frac{N(1+A)}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{G.150}$$

以上から正のカイラリティーを持つ固有状態 $\varphi_+(k, s)$ と負のカイラリティーを持つ固有状態 $\varphi_-(k, s)$ が求まる。ここで $s=1$ は正のヘリシティー状態、 $s=2$ は負のヘリシティー状態を表す。

$$\begin{aligned}\varphi_+(k, 1) &= \frac{1}{2}(u(k, 1) + v(k, 1)), & \varphi_+(k, 2) &= \frac{1}{2}(u(k, 2) - v(k, 2)), \\ \varphi_-(k, 1) &= \frac{1}{2}(u(k, 1) - v(k, 1)), & \varphi_-(k, 2) &= \frac{1}{2}(u(k, 2) + v(k, 2))\end{aligned}\quad (\text{G.151})$$

粒子のエネルギーを $E = \hbar k_0$ とおき $mc^2 \ll E$ の極限で微小量の 1 次までで A は以下のように近似できる。

$$A = \frac{\hbar kc}{E + mc^2} = \frac{\sqrt{E^2 - (mc^2)^2}}{E + mc^2} \sim 1 - \frac{mc^2}{E} \quad (\text{G.152})$$

カイラリティー +1 の状態の負のヘリシティー状態の振幅の正のヘリシティー状態の振幅に対する比は以下ようになる。

$$\left| \frac{\varphi_+(k, 2)}{\varphi_+(k, 1)} \right| \sim \frac{mc^2}{2E} \quad (\text{G.153})$$

即ち、カイラリティー +1 の状態は、正のヘリシティー状態に比べて負のヘリシティー状態が現れる確率は非常に小さくなる。カイラリティー-1 の状態の正のヘリシティー状態の振幅の負のヘリシティー状態の振幅に対する比も $mc^2/2E$ となり、非常に小さくなる。式 (G.153) は、質量ゼロ即ちマスの粒子では、カイラリティー固有値 +1 の固有状態はヘリシティー +1 の状態即ち右巻き状態と一致すること、カイラリティー固有値-1 の固有状態はヘリシティー-1 の状態即ち左巻き状態と一致することを示している。質量がゼロでない粒子の場合は、カイラリティーとヘリシティーは一致しない。カイラリティー演算子はローレンツスカラーであり、粒子に固有の量子数で、座標系の選択に依存しない量である。一方、質量を持った粒子に対するヘリシティーは、観測者が粒子を追い越すと符号が逆転し、座標系に依存する量である。

Parity 変換を施すと $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ となり粒子の進行方向が逆転するが、擬ベクトルであるスピン角運動量の符号は変わらない。結果、鏡映変換を施すとカイラリティーが逆転する。したがって、鏡映変換に対して理論が対象であるためには、正負両方のカイラリティーを持つ状態が対象に理論に組み

込まれている必要がある。

双一次形式のパリティ変換性を調べる。4元カレントの第ゼロ成分は

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) \gamma^0 \psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) &= \psi^\dagger(\vec{x}, t) \hat{\mathbf{P}}_0^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 \hat{\mathbf{P}}_0 \psi(\vec{x}, t) \\ &= \bar{\psi}(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t)\end{aligned}\quad (\text{G.154})$$

ここでガンマ行列と座標反転変換が可換であることを使った。これより第ゼロ成分はパリティ変換に対して不変であることが示された。確率振幅が、右手系左手系で不変であることは期待通りの結果である。 $\bar{\psi}\psi$ は極性スカラーである。次に $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ のパリティ変換を考える。

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) \gamma^5 \psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) &= \psi^\dagger(\vec{x}, t) \hat{\mathbf{P}}_0^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \hat{\mathbf{P}}_0 \psi(\vec{x}, t) \\ &= \psi^\dagger(\vec{x}, t) \gamma^5 \gamma^0 \psi(\vec{x}, t) = -\psi^\dagger(\vec{x}, t) \gamma^0 \gamma^5 \psi(\vec{x}, t) \\ &= -\bar{\psi}(\vec{x}, t) \gamma^5 \psi(\vec{x}, t)\end{aligned}\quad (\text{G.155})$$

変換則 (G.68) と合わせて $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ は軸性スカラーである。空間成分は、

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) \gamma^j \psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) &= \psi^\dagger(\vec{x}, t) \hat{\mathbf{P}}_0^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^j \gamma^0 \hat{\mathbf{P}}_0 \psi(\vec{x}, t) \\ &= -\psi^\dagger(\vec{x}, t) \hat{\mathbf{P}}_0^\dagger \gamma^0 \gamma^j \gamma^0 \hat{\mathbf{P}}_0 \psi(\vec{x}, t) \\ &= -\psi^\dagger(\vec{x}, t) \gamma^0 \gamma^j \gamma^0 \psi(\vec{x}, t) \\ &= -\bar{\psi}(\vec{x}, t) \gamma^j \psi(\vec{x}, t)\end{aligned}\quad (\text{G.156})$$

即ち空間成分は極性ベクトルである。一方、演算公式 (G.35)、(G.18) を用いると

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) \gamma^5 \gamma^j \psi_{\mathbf{P}}(\vec{x}', t) &= \psi^\dagger(\vec{x}, t) \hat{\mathbf{P}}_0^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^5 \gamma^j \gamma^0 \hat{\mathbf{P}}_0 \psi(\vec{x}, t) \\ &= \psi^\dagger(\vec{x}, t) \gamma^0 \gamma^5 \gamma^j \psi(\vec{x}, t) \\ &= \bar{\psi}(\vec{x}, t) \gamma^5 \gamma^j \psi(\vec{x}, t)\end{aligned}\quad (\text{G.157})$$

であり $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^j\psi$ は軸性ベクトルである。

Parity violation

Wu は、熱雑音によってスピンの向きが乱雑にならないよう十分冷やしてスピンの方向を揃えたコバルト 60 の崩壊現象 $\text{Co}^{60} \rightarrow \text{Ni}^{60} + e^- + \bar{\nu}_e$ の崩壊反応後の電子の運動量分布を調べたところ殆どの電子がコバルトのスピンの向きとは逆方向の運動量を持つことが示された。この反応が鏡映対称

であれば、コバルトのスピンの同じ方向に放出される電子数も同数であるべきである。即ち、この実験結果は、ベータ崩壊では鏡映対称性が破れていることを示している。鏡映変換を行っても粒子の進む方向は変わらない。しかし、軸性ベクトルであるスピン角運動量の向きは反転する。したがって、ベータ崩壊を鏡映変換した座標で観測すると電子のスピンは右巻き、反ニュートリノのスピンは左向きに変わる。しかし、ベータ崩壊で左巻き反ニュートリノの放出が見られない。このことは、弱い相互作用が鏡映変換不変性を破っていることを示している。

極性ベクトル (vector) で $v = (v^\mu)$ と軸性ベクトル (axial vector) である磁場ベクトル $a = (a^\mu)$ の足し算 $v - a$ で表される物理現象を表す方程式があったとする。ここでは次元のことは考えない。座標系のパリティ変換を行うと方程式の空間成分が $-\vec{v} + \vec{a}$ のように変換し、元の座標とは異なる形をとる。このような物理現象は Parity が破られているという。弱い相互作用が関与するベータディケイは、反応前後でパリティが破れている。したがって、それを表現する理論も極性ベクトルと軸性ベクトルの重ね合わせで表現される。そのような理論を $V - A$ 理論と呼ぶ。これまでの議論から弱い相互作用を表すハミルトニアンには $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ と $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ の二つが現れることが納得できる。別の言い方をすると弱い相互作用が関与する物理は、一方のカイラリティを持つ粒子・反粒子の組みによって構成される。

Charge conjugate

粒子と反粒子の入れ替えを行う変換、荷電共役 (charge conjugate) 変換 C を扱う。この変換は、質量を除く粒子の内部自由度の符号を反転させ、反粒子に変える変換である。例えば、スピン $+1/2$ 、電荷 $-e$ 、レプトン数 $+1$ の電子に荷電共役変換を作用すると、スピン $-1/2$ 、電荷 $+e$ 、レプトン数 -1 の陽電子に変換される。まず簡単な例として電荷を持ったスカラー場を扱う。電磁場と相互作用するスカラー粒子の KG 方程式 (H.11) とその複素共役 (H.12) を比較から、 ϕ は電荷 q の ϕ^* は電荷 $-q$ の粒子の方程式と見做すことができる。そこで荷電共役変換を表す変換行列を C 、反粒子の波動関数を ϕ_C と置くと

$$\phi_C = C\phi^* = \eta_C\phi^* \quad (\text{G.158})$$

と書けることが推測される。変換行列 C はユニタリ $C^\dagger = C^{-1}$ な対称行列 $C^t = C$ である。ここで η_C は任意の位相因子で絶対値が 1 になる。以下では 1 に取る。反粒子の保存 4 元カレントを求めるため方程式 (H.12) の ϕ^* を ϕ_C に置き換え左から ϕ_C^* を方程式 (H.11) の ϕ を ϕ_C^* に置き換え左から ϕ_C を掛けて差を取る。更に荷電共役変換により電磁場も変換を受けることを考慮して A^μ を変換後の電磁場 A_C^μ を用いて表す。その結果、以下の式を与える。

$$0 = \partial_\mu \left(\phi_C^* \partial^\mu \phi_C - \phi_C \partial^\mu \phi_C^* - 2i \frac{q}{c} A_C^\mu \phi_C^* \phi_C \right)$$

ここで式 (G.158) を振り返ると自由な反粒子 (上の式で $A^\mu = 0$ の場合) の確率密度 j^0 を正の値にするには、4 元保存カレントを以下のように定義する必要があることが分かる。

$$j_C^\mu = -i \left(\phi_C^* \partial^\mu \phi_C - \phi_C \partial^\mu \phi_C^* - 2i \frac{q}{c} A_C^\mu \phi_C^* \phi_C \right) \quad (\text{G.159})$$

したがって、反粒子の 4 元電流は以下ようになる。

$$\begin{aligned} j_{CQ}^\mu &= -i(-q) \left(\phi_C^* \partial^\mu \phi_C - \phi_C \partial^\mu \phi_C^* - 2i \frac{q}{c} A_C^\mu \phi_C^* \phi_C \right) \\ &= iq \left(\phi_C^* \partial^\mu \phi_C - \phi_C \partial^\mu \phi_C^* - 2i \frac{q}{c} A_C^\mu \phi_C^* \phi_C \right) \\ &= -iq(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) + 2 \frac{q^2}{c} A_C^\mu \phi^* \phi \end{aligned} \quad (\text{G.160})$$

ここで電磁場が

$$A_C^\mu = -A^\mu \quad (\text{G.161})$$

と変換されれば式 (G.160) は以下のように粒子の 4 元電流と関係付けられる。

$$\begin{aligned} j_{CQ}^\mu &= -iq(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) - 2 \frac{q^2}{c} A^\mu \phi^* \phi \\ &= -j_Q^\mu \end{aligned} \quad (\text{G.162})$$

この結果は、古典的な電磁場中の荷電粒子の運動を考えれば自明な結果で

す。電荷 $+q$ の粒子の電磁場 A^μ 中の軌跡と電荷 $-q$ の反粒子の電磁場 $-A^\mu$ の軌跡は全く同じである。しかし、電荷の符号が逆のため粒子の運動により運ばれる電流と反粒子の運動により運ばれる電流の向きは逆になる。

次に電子の状態関数への荷電共役変換の作用について調べる。電磁場と相互作用する電子の Dirac 方程式 (H.18) の複素共役を取ると以下のようになる。

$$0 = (-i\gamma^0\partial_0 - i\gamma^1\partial_1 + i\gamma^2\partial_2 - i\gamma^3\partial_3)\psi^* - \frac{e}{\hbar c}(A_0\gamma^0 + A_1\gamma^1 - A_2\gamma^2 + A_3\gamma^3)\psi^* - \frac{mc}{\hbar}\psi^* \quad (\text{G.163})$$

ここで関係式 (G.14) を用いた。電子のスピンノール ψ を荷電共役なスピンノール ψ_C に変換する変換行列を C とし、荷電共役なスピンノールとスピンノールの複素共役とを結ぶ関係式を以下のように書く。

$$\psi_C = C\bar{\psi}^\dagger \quad (\text{G.164})$$

ここで

$$C = -i\gamma^2 \quad (\text{G.165})$$

と置く。逆行列は $C^{-1} = C^\dagger = -i(\gamma^2)^\dagger = i\gamma^2$ となる。ガンマ行列に荷電共役変換を施すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} C\gamma^0C^{-1} &= -\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = \gamma^2\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0 \\ C\gamma^1C^{-1} &= -\gamma^2\gamma^1\gamma^2 = \gamma^2\gamma^2\gamma^1 = -\gamma^1 \\ C\gamma^2C^{-1} &= -\gamma^2\gamma^2\gamma^2 = \gamma^2 \\ C\gamma^3C^{-1} &= -\gamma^2\gamma^3\gamma^2 = \gamma^2\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^3 \end{aligned} \quad (\text{G.166})$$

ここで $\mu \neq 2$ に対して $\gamma^\mu\gamma^2 = -\gamma^2\gamma^\mu$ が成り立つことを用いた。方程式 (G.163) に左から C を掛けて、関係式 (G.166) と定義式 (G.164) を用いて整理すると以下の式をえる。

$$\begin{aligned} 0 &= (-iC\gamma^0C^{-1}\partial_0 - iC\gamma^1C^{-1}\partial_1 + iC\gamma^2C^{-1}\partial_2 - iC\gamma^3C^{-1}\partial_3)C\psi^* \\ &\quad - \frac{e}{\hbar c}(A_0C\gamma^0C^{-1} + A_1C\gamma^1C^{-1} - A_2C\gamma^2C^{-1} + A_3C\gamma^3C^{-1})C\psi^* - \frac{mc}{\hbar}C\psi^* \\ &= i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_C + \frac{e}{\hbar c}A_\mu\gamma^\mu\psi_C - \frac{mc}{\hbar}\psi_C \end{aligned} \quad (\text{G.167})$$

この方程式は電荷 $+e$ の電磁場中の Dirac 方程式である。家電共役変換を自由粒子の右回りスピノール $u(k,1)$ に作用すると

$$\begin{aligned} u_C(k,1)e^{-ik\cdot x} &= Cu^*(k,1)e^{-ik\cdot x} = (\hbar k_0 + mc)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar k}{\hbar k_0 + mc} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik\cdot x} \\ &= (\hbar k_0 + mc)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\hbar k}{\hbar k_0 + mc} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik\cdot x} = v(k,2)e^{-ik\cdot x} \end{aligned} \quad (\text{G.168})$$

この状態は、スピン $-\hbar/2$ 即ち左回りの反粒子の状態である。同様に左回り自由粒子スピノール $u(k,2)$ に作用すると

$$\begin{aligned} u_C(k,2)e^{-ik\cdot x} &= Cu^*(k,2)e^{-ik\cdot x} = (\hbar k_0 + mc)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\hbar k}{\hbar k_0 + mc} \end{pmatrix} e^{-ik\cdot x} \\ &= (\hbar k_0 + mc)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\hbar k}{\hbar k_0 + mc} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik\cdot x} = v(k,1)e^{-ik\cdot x} \end{aligned} \quad (\text{G.169})$$

この状態は、スピン $+\hbar/2$ 即ち右回りの反粒子の状態である。したがって、荷電共役変換は、電荷 $-e$ 、スピン $\pm\hbar/2$ の電子をその反粒子である電荷 $+e$ 、スピン $\mp\hbar/2$ (複合同順) の陽電子に変換する変換である。

荷電共役変換後の粒子 (陽電子) の電荷密度は以下ようになる。

$$\begin{aligned} e\bar{\psi}_C\gamma^0\psi_C &= e\psi_C^\dagger\psi_C = -ie\psi^t\gamma^{2\dagger}\gamma^0\gamma^0i\gamma^2\psi^* = -e\psi^t\gamma^2\gamma^2\psi^* = e\psi^t\psi^* = e(\psi^\dagger\psi)^* \\ &= -(-e\psi^\dagger\psi) \end{aligned} \quad (\text{G.170})$$

二番目の等号では関係式 (G.13) を用いた。最後の式は電子の電荷密度であ

り、陽電子の電荷密度は変換前の電子の電荷密度と大きさ同じで符号が反対であることを表している。陽電子の3次元電流と変換前の電子の3次元電流は以下に結び付けられる。

$$\begin{aligned} e\bar{\psi}_C\boldsymbol{\gamma}\psi_C &= -ie\psi^\dagger\boldsymbol{\gamma}^2\boldsymbol{\gamma}^0\boldsymbol{\gamma}^1i\boldsymbol{\gamma}^2\psi^* = -e\psi^\dagger\boldsymbol{\gamma}^2\boldsymbol{\gamma}^0\boldsymbol{\gamma}^1\boldsymbol{\gamma}^2\psi^* = -e\psi^\dagger\boldsymbol{\gamma}^2\boldsymbol{\gamma}^2\boldsymbol{\gamma}^0\boldsymbol{\gamma}^1\psi^* \\ &= e\psi^\dagger\boldsymbol{\gamma}^0\boldsymbol{\gamma}^1\psi^* = e(\psi^\dagger\boldsymbol{\gamma}^0\boldsymbol{\gamma}^1\psi)^*e(\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}^1\psi)^* \\ &= -(-e\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}^1\psi) \end{aligned} \quad (\text{G.171})$$

この結果は、陽電子の3次元電流密度は、変換前の電子の3次元電流密度と大きさが同じで符号が反対つまり逆向きの流れることを示している。

荷電共役変換が粒子を反粒子に変換する変換であることは、場の量子論を用いるとよりはっきりする。荷電共役変換を表す演算子を \hat{C} とし、スカラー場にこれを施すと以下のような変換を引き起こす演算子として定義する。ここで \hat{C} の具体的な形をとう必要はない。

$$\hat{C}\phi\hat{C}^{-1} = \phi^\dagger \quad (\text{G.172})$$

量子化されたスカラー場の表式 (D.33) にこの式を適用すると以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{C}\phi\hat{C}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\hat{C}a_{\vec{k}}\hat{C}^{-1}e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})} + \hat{C}b_{\vec{k}}^\dagger\hat{C}^{-1}e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a_{\vec{k}}^\dagger e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})} + b_{\vec{k}}e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}) \end{aligned} \quad (\text{G.173})$$

上下の式の比較から荷電共役変換により以下のように粒子の生成消滅演算子が反粒子の生成消滅演算子と結びつくことがわかる。

$$\hat{C}a_{\vec{k}}\hat{C}^{-1} = b_{\vec{k}}, \quad \hat{C}b_{\vec{k}}^\dagger\hat{C}^{-1} = a_{\vec{k}}^\dagger \quad (\text{G.174})$$

確かに、粒子の消滅演算子が反粒子の消滅演算子に、反粒子の生成演算子が粒子の生成演算子に変換されることが分かった。Dirac 場の荷電共役演算子を以下のような変換を引き起こす演算子として定義する。

$$\hat{C}\psi\hat{C}^{-1} = i\boldsymbol{\gamma}^2\psi^\dagger \quad (\text{G.175})$$

量子化された Dirac 場 (D.82) に変換 (G.175) を施すと以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned}
\hat{C}\psi\hat{C}^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=R,L} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (\hat{C}c_{\vec{k}}^{(s)}\hat{C}^{-1}u^s(k)e^{ik\cdot x} + \hat{C}d_{\vec{k}}^{(s)\dagger}\hat{C}^{-1}v^s(k)e^{-ik\cdot x}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=R,L} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (c_{\vec{k}}^{(s)\dagger}(-i\gamma^2)u^{s*}(k)e^{-ik\cdot x} + d_{\vec{k}}^{(s)}(-i\gamma^2)v^{s*}(k)e^{ik\cdot x}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{s=R,L} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (c_{\vec{k}}^{(s)\dagger}v^s(k)e^{ik\cdot x} + d_{\vec{k}}^{(s)}u^s(k)e^{-ik\cdot x}) \quad (\text{G.176})
\end{aligned}$$

ここでここまでの議論を踏まえて $v^{s'}(k) = -i\gamma^2 u^{s*}(k)$, $u^{s'}(k) = -i\gamma^2 v^{s*}(k)$ であることを用いた。ここでスピン状態 s' は s と逆向き即ち $s=L$ なら $s'=R$, $s=R$ なら $s'=L$ を取る。これから以下のような粒子・反粒子の生成消滅演算子間の関係式を得る。

$$\hat{C}c_{\vec{k}}^{(s)}\hat{C}^{-1} = d_{\vec{k}}^{(s')}, \quad \hat{C}d_{\vec{k}}^{(s)\dagger}\hat{C}^{-1} = c_{\vec{k}}^{(s')\dagger} \quad (\text{G.177})$$

電子の消滅演算子が逆向きスピンの陽電子の消滅演算子に陽電子の生成演算子が逆向きスピンの電子の生成演算子に変換されていることがわかる。

荷電共役変換に対して電磁気力と強い力は対称性が保たれているが、弱い力はパリティ同様破れている。

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (\text{G.178})$$

この崩壊過程をパイオン静止系で観測すると放出されるミューオンのヘリシティは常に負、即ち左巻きである。放出されるミューオンニュートリノのカイラリティは常に負、即ち左巻きであることになる。パイプラスの荷電共役粒子であるパイマイナスのベータ崩壊

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (\text{G.179})$$

を観測すると放出されるミューオンのヘリシティは今度は常に正、即ち右巻きである。即ちミューオン反ニュートリノのカイラリティは常に正、右巻きであることになる。反応 (G.178) が荷電共役に対して対称であるなら崩壊 (G.179) で放出されるミューオンの半数が崩壊 (G.178) と同じヘリシティつまり負のヘリシティを持つはずであるが、そうではなかった。この実験事実は、弱い力では荷電共役不変性が破れてることを示している。

CP 対称性

弱い相互作用は、パリティ保存則が破れた相互作用である。ベータ崩壊で観測される殆どが左巻きニュートリノか、右巻き反ニュートリノである。パリティ変換をすると粒子の運動量の向きが反転する。一方、スピンは擬ベクトルであるからパリティ変換によって符号を変えない。結果、パリティ変換によって粒子のヘリシティが変化し左巻きが右巻きに変換される。即ち、パリティ変換に伴って、荷電共役変換が同時起きていて、ニュートリノが反ニュートリノに変換されていると考えれば良いのである。この議論から弱い相互作用では、C や P の変換は単独では破れているが、二つを掛け合わせた CP 対称性は破れていないことが期待される。パリティと荷電共役は単独ではそれぞれ破れているが、組み合わせた対称性 CP が破れないように回復されているのではないかという考えである。例えば、反応 (G.178) では左巻きニュートリノのみ放出され、反応 (G.179) では右巻きニュートリノのみ放出されるという事実は、CP 対称性が弱い相互作用で保たれていることを示す証拠の一つである。

しかし、1960 年代の実験により CP 対称性が僅かに破れていることが証明された。CP 対称性の破れをクォークが 2 世代であるとする理論に取り込むのは困難で、小林-益川 (1973) はクォークが 3 世代であるとすることで自然に CP 対称性の破れを取り込んだ理論を構築できることを示した。その後 B 中間子の崩壊で 20% 近い CP 対称性の破れが起きうることが示され、その後 KEKB や PEP-II などの B factories と呼ばれる B 中間子の実験で検証された。検証に用いられた主な検出器は、BarBar と Belle である。

CP 対称性の破れは、宇宙の物質と反物質の量が全く同じなら、宇宙初期に対消滅が起きて物質は残っていないはずなのになぜ、物質が存在しているのかという問題、所謂バリオンアсимメトリーの問題を解く鍵を握っていると考えられている。

付録 H

電磁場と相互作用する粒子の量子力学

電磁場と相互作用する電荷 q 、質量 m の粒子の量子力学の基礎についてまとめる。

H.1 古典電磁気学

量子力学に進む前に古典電磁気学の正準形式についてまとめておく。非相対論的な速度で運動する電子と電磁場の相互作用および電子が作成する電磁場を決定するマクスウェル方程式を導くラグランジアンは以下のよう

$$L = \frac{mv^2}{2} - \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} + e\phi + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (\text{H.1})$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{H.2})$$

ここで $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ は 4 元電磁場ポテンシャルで有る。4 元電流 $j^\mu = (-ec, -e\vec{v})$ を用いて書き換えると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} L &= \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{c} j_\alpha A^\alpha - \frac{1}{16\pi} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \\ &= \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{c} j^\alpha A_\alpha - \frac{1}{16\pi} \eta^{\alpha\sigma} \eta^{\beta\delta} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) (\partial_\sigma A_\delta - \partial_\delta A_\sigma) \quad (\text{H.3}) \end{aligned}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{H.4})$$

オイラーラグランジ方程式に代入すると電子の運動方程式の x 成分が以下のように導き出せる。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_x} - \frac{\partial L}{\partial x} \\ &= \frac{d}{dt} \left(mv_x - \frac{e}{c} A_x \right) + \frac{e}{c} \partial_x (\vec{v} \cdot \vec{A}) - e \partial_x \phi \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

方程式 (F.1) で示した電磁場中の電子の運動方程式が確かに導出できる。電磁場ポテンシャルを変数として扱うことでマックスウエル方程式が導出できることを示す。

電磁場に対してオイラー・ラグランジ方程式を用いて、電磁場が満たす方程式を導く。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial \partial_\nu A_\mu} \\ &= \frac{1}{c} j^\mu \\ &\quad + \frac{1}{16\pi} \partial_\nu \eta^{\alpha\sigma} \eta^{\beta\delta} [(\delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu - \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu)(\partial_\sigma A_\delta - \partial_\delta A_\sigma) + (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\delta_\sigma^\nu \delta_\delta^\mu - \delta_\delta^\nu \delta_\sigma^\mu)] \\ &= \frac{1}{c} j^\mu + \frac{1}{4\pi} (\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu) \\ \square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu &= -\frac{4\pi}{c} j^\mu \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

得られた方程式 (H.6) は、確かにマックスウエル方程式である。ここで

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = -\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \Delta \quad (\text{H.7})$$

はダランベルシアンである。

H.2 スカラー粒子

手始めにスカラー粒子について扱う。スカラー粒子の状態関数をスカラー関数 $\phi(x)$ であらわす。自由なスカラー粒子は以下の Klein-Gordon 方程式を満たす。

$$\begin{aligned}
(E^2 - \vec{p}^2 c^2)\phi &= (mc^2)^2 \phi \\
(-\hbar^2 \partial_t^2 + \hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2)\phi &= (mc^2)^2 \phi \\
\left(-\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \vec{\nabla}^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\phi &= 0 \\
\partial_\mu \partial^\mu \phi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi &= 0
\end{aligned} \tag{H.8}$$

この方程式の複素共役を取ると以下ようになる。

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^* - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^* = 0 \tag{H.9}$$

方程式 (H.8) に右から ϕ^* を方程式 (H.9) に右から ϕ を掛けて引き算すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned}
0 &= \phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi - \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi^* \\
&= \partial_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)
\end{aligned} \tag{H.10}$$

この方程式は確率密度 $j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$ の保存則を表す。ここで $-i$ は j^0 が正の実数値を取り、確率密度と解釈できるようにするために掛けた。式 (F.5) の電荷を $-e \rightarrow q$ と置き換えて $P^\mu = -i\eta^{\mu\nu} \frac{\hbar}{c} \partial_\nu$ を代入すると以下の電磁場と相互作用するスカラー粒子の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
0 &= \eta_{\alpha\beta} \left(\eta^{\alpha\mu} (-i\hbar \partial_\mu) - \frac{q}{c} A^\alpha \right) \left(\eta^{\beta\nu} (-i\hbar \partial_\nu) - \frac{q}{c} A^\beta \right) \phi + (mc)^2 \phi \\
&= \left[-\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{q}{c}\right)^2 A_\mu A^\mu + i\hbar \frac{q}{c} (\partial_\mu A^\mu) + 2i\hbar \frac{q}{c} A^\mu \partial_\mu \right] \phi + (mc)^2 \phi \\
\left[\partial_\mu \partial^\mu - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \right] \phi &= \left[\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2 A_\mu A^\mu + i \frac{q}{c} (\partial_\mu A^\mu) + 2i \frac{q}{c} A^\mu \partial_\mu \right] \phi
\end{aligned} \tag{H.11}$$

この方程式の複素共役を取ると以下ようになる。

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \right] \phi^* = \left[\left(\frac{q}{\hbar c}\right)^2 A_\mu A^\mu - i \frac{q}{c} (\partial_\mu A^\mu) - 2i \frac{q}{c} A^\mu \partial_\mu \right] \phi^* \tag{H.12}$$

方程式 (H.11)、(H.12) にそれぞれ右から ϕ^* 、 ϕ を掛けて差を取ると以下のようにになる。

$$\begin{aligned}
\partial_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) &= 2i \frac{q}{c} (\partial_\mu A^\mu) \phi^* \phi + 2i \frac{q}{c} \phi^* A^\mu \partial_\mu \phi + 2i \frac{q}{c} \phi A^\mu \partial_\mu \phi^* \\
&= \partial_\mu \left[2i \frac{q}{c} A^\mu \phi^* \phi \right]
\end{aligned} \tag{H.13}$$

この式は、4元カレント

$$j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^* - 2i \frac{q}{c} A^\mu \phi^* \phi) \quad (\text{H.14})$$

が保存することを示している。以下のように4元電流を定義すると

$$j_Q^\mu = iqj^\mu = iq(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) - 2 \frac{q^2}{c} A^\mu \phi^* \phi \quad (\text{H.15})$$

電荷保存則を以下のように表すことができる。

$$\partial_\mu j_Q^\mu = 0 \quad (\text{H.16})$$

方程式 (H.11) を導出した操作は、偏微分 ∂_μ を $\partial_\mu \rightarrow \eta^{\mu\nu} \partial_\nu - i \frac{q}{\hbar c} A^\mu$ で置き換えることに対応している。そこで以下で定義される共変微分 (covariant derivative) を導入する。

$$D^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu - i \frac{q}{\hbar c} A^\mu \quad (\text{H.17})$$

電磁場と相互作用する粒子の量子力学的方程式を得るには偏微分を共変微分に置き換えれば良い。

H.3 スピン 1/2 粒子

電磁場と相互作用する電子の量子力学的方程式は、Dirac 方程式 (D.19) の偏微分を式 (H.17) に置き換えることにより以下のように書ける。

$$i \left(\partial_\mu + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu \right) \gamma^\mu \psi - \frac{mc}{\hbar} \psi = 0 \quad (\text{H.18})$$

この方程式のエルミート共役を取ると以下のようになる。

$$-i \partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - \frac{e}{\hbar c} A_\mu \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - \frac{mc}{\hbar} \psi^\dagger = 0$$

この式に右から γ^0 を掛けて adjoint 状態で書き表すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} -i \partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 - \frac{e}{\hbar c} A_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 - \frac{mc}{\hbar} \psi^\dagger \gamma^0 &= 0 \\ -i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - \frac{e}{\hbar c} A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - \frac{mc}{\hbar} \bar{\psi} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{H.19})$$

方程式 (H.18) に左から $\bar{\psi}$ を掛け (H.19) に右から ψ を掛け差を取ると

$$\begin{aligned}i(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) &= 0 \\ \partial_\mu i(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) &= 0\end{aligned}\tag{H.20}$$

電磁場と相互作用する電子の保存カレントは自由電子の保存カレント (D.23) と同じである。そこで4元電流を以下のように定義する。

$$j_Q^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\tag{H.21}$$

付録 I

相転移

ここでは、超伝導転移を例に相転移の物理の基礎を自発的対称性の破れの観点で系統的にまとめる。目的は二つある。最新の CMB 観測で用いられている超伝導検出器が用いられている。中でも光の吸収による超伝導体のインダクタンスの変化に伴う素子のレゾナンス周波数の変化を利用して、入射光強度を測定する Microwave Kinetic Inductance Detector 略称 MKID は次世代を担う検出器として期待されている。On chip FTS への応用のような夢の測定器の実現などバラ色の将来像も描かれている。一方で、まだまだ多くの開発要素が残されており、夢の実現にはこれらの克服が必須である。ブレークスルーを引き起こすような基礎開発実現の原動力を超伝導転移の基礎を系統的に学び直すことで MKID 開発の携わる研究者に与えることが一つ目の目的である。CMB 観測は、偏光 B モード観測によるインフレーション期に生成された原始重力波存在証明などにより地上の加速器実験では手が届かない高エネルギー状態の物理に観測的にメスを入れる機会を提供する。インフレーションは、Ground Unified Theory 略称 GUT が予言する真空の相転移により宇宙の始まりでは統一されていた強い力が電弱力と分離する現象と直接関わっている可能性が高い。GUT の相転移も自発的対称性の破れが関与した現象であり、具体的対応物がはっきりした超伝導転移を扱って自発的対称性の破れの物理を学ぶことで GUT の相転移の学習に取り組むためのステップを与えることがもう一つの目的である。

1.1 コヒーレント状態

この節では、相転移と関係の深い、量子光学を例にコヒーレント状態の基礎についてまとめる。消滅演算子の固有状態をコヒーレント状態と呼ぶ。

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (\text{I.1})$$

ここで α は任意の複素数である。コヒーレント状態をゼロ次のハミルトニアンの固有状態で展開した表現を求める。

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

定義より以下の式を得る。

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \sqrt{n+1} |n\rangle \end{aligned}$$

これから展開係数間の以下の漸化式を得る。

$$c_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} c_n$$

これから以下を得る。

$$c_n = \alpha^n \frac{1}{\sqrt{n!}} c_0$$

規格化条件 $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$ より

$$1 = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{1}{n!} = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2}$$

よって規格化されたコヒーレント状態は以下のように表現することができる。

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (\text{I.2})$$

コヒーレント状態の光子数の平均値は、光子数演算子 $N = a^\dagger a$ のコヒーレント状態による期待値を計算することで以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \langle \alpha | N | \alpha \rangle &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{n}{n!} \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{n}{n!} \\ &= |\alpha|^2 \end{aligned}$$

光子が n 個存在する確率は以下のように求まる。

$$P_n = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-\langle N \rangle} \frac{\langle N \rangle^n}{n!} \quad (\text{I.3})$$

ここで $\langle N \rangle = \langle \alpha | N | \alpha \rangle$ である。これはポアソン分布である。コヒーレント状態の光子数分布はポアソン分布に従うことが示された。

この状態の物理的性質を調べる。まず光子数の揺らぎの大きさを求める。光子数の分散値は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \langle \Delta N^2 \rangle &= \langle \alpha | N^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | N | \alpha \rangle^2 \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{n^2}{n!} - \langle N \rangle^2 \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{n(n-1) + n}{n!} - \langle N \rangle^2 \\ &= e^{-|\alpha|^2} \left(\sum_{n=2}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^{2n} \frac{1}{(n-1)!} \right) - \langle N \rangle^2 \\ &= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 - |\alpha|^4 = |\alpha|^2 \\ &= \langle N \rangle \end{aligned}$$

したがって、光子数の揺らぎは期待値のルートに等しいという有名なポアソン統計の結果が得られる。規格化された座標と運動量と生成消滅演算子は以下の関係で結ばれる。

$$\xi = \frac{1}{2}(a + a^\dagger) \quad (\text{I.4})$$

$$\eta = \frac{i}{2}(a^\dagger - a) \quad (\text{I.5})$$

これらから以下の式を得る。

$$[\xi, \eta] = \frac{i}{2} \quad (\text{I.6})$$

$$a = \xi + i\eta \quad (\text{I.7})$$

$$a^\dagger = \xi - i\eta \quad (\text{I.8})$$

ξ 、 η の交換関係からこれらの物理量は互いに共役で以下の不確定性関係を満たす。

$$\sigma_\xi \sigma_\eta \geq \frac{1}{4} \quad (\text{I.9})$$

ここで σ_ξ は ξ の標準偏差である。コヒーレント状態におけるこれらの物理量の分散を計算する。

$$\begin{aligned} \sigma_\xi^2 &= \langle \alpha | \xi^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \xi | \alpha \rangle^2 \\ &= \frac{1}{4} \langle \alpha | (aa + a^\dagger a^\dagger + 2a^\dagger a + 1) | \alpha \rangle - \frac{1}{4} (\alpha + \alpha^*)^2 \\ &= \frac{1}{4} [\alpha^2 + (\alpha^*)^2 + 2|\alpha|^2 + 1 - (\alpha^2 + 2|\alpha|^2 + (\alpha^*)^2)] \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}$$

どうように

$$\begin{aligned} \sigma_\eta^2 &= \langle \alpha | \eta^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \eta | \alpha \rangle^2 \\ &= -\frac{1}{4} \langle \alpha | (aa + a^\dagger a^\dagger - 2a^\dagger a - 1) | \alpha \rangle + \frac{1}{4} (-\alpha + \alpha^*)^2 \\ &= -\frac{1}{4} [\alpha^2 + (\alpha^*)^2 - 2|\alpha|^2 - 1 - (\alpha^2 - 2|\alpha|^2 + (\alpha^*)^2)] \\ &= \frac{1}{4} \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがってコヒーレント状態は、共役な二つの物理量、座標と運動量、の不

確定さが同じ大きさで、且つ最小不確定性関係

$$\sigma_\xi \sigma_\eta = \frac{1}{4}$$

を満たす状態である。以下 $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ と置くと

$$\langle \xi \rangle = \frac{\alpha + \alpha^*}{2} = \text{Re}(\alpha) = |\alpha| \cos \theta \quad (\text{I.10})$$

$$\langle \eta \rangle = \frac{\alpha - \alpha^*}{2i} = \text{Im}(\alpha) = |\alpha| \sin \theta \quad (\text{I.11})$$

この結果を ξ, η 平面で表現すると、 ξ, η は点 $(\sqrt{\langle N \rangle} \cos \theta, \sqrt{\langle N \rangle} \sin \theta)$ を中心とした半径 $1/2$ の円内のどこにあるか不確定になっていると言う事ができる。光子数を求める演算子が $N = a^\dagger a$ と a とそのエルミート共役は演算子のかけ算で表されている事をつかってエルミートな位相演算子 $\hat{\phi}$ を以下のように導入する。

$$a = e^{i\hat{\phi}} \sqrt{N} \quad (\text{I.12})$$

$$a^\dagger = \sqrt{N} e^{-i\hat{\phi}} \quad (\text{I.13})$$

これより a, a^\dagger の交換関係は以下ようになる。

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= e^{i\hat{\phi}} N e^{-i\hat{\phi}} - N \\ &= \left(N + i[\hat{\phi}, N] + \frac{i^2}{2!} [\hat{\phi}, [\hat{\phi}, N]] + \dots \right) - N \\ &= i[\hat{\phi}, N] + \frac{i^2}{2!} [\hat{\phi}, [\hat{\phi}, N]] + \dots \end{aligned}$$

これが $[a, a^\dagger] = 1$ に等しくなるためには

$$[\hat{\phi}, N] = -i \quad (\text{I.14})$$

で無ければならない。これより光子数と電磁波の位相は互いに共役な物理量であり以下の不確定性関係を満たす事が分かる。

$$\sigma_{\hat{\phi}} \sigma_N \geq \frac{1}{2} \quad (\text{I.15})$$

ここまでの結果からコヒーレント状態では $\sigma_N = \sqrt{\langle N \rangle}$ であることが分かっている所以位相の揺らぎは

$$\sigma_{\hat{\phi}} = \frac{1}{2\sqrt{N}}$$

で与えられる。したがって、コヒーレント状態で光子数を十分増やせば、位相の揺らぎを小さくする、即ち電磁波の位相をそろえる事が可能となる。一方光子数の揺らぎは増加するが、相対的な光子数の揺らぎは

$$\frac{\sigma_N}{\langle N \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}}$$

であり、光子数を増やせば、相対的な光子数の揺らぎを小さくする事ができる。コヒーレント状態で光子数を増やした極限が、古典的な電磁波に対応する状態と考えられている。コヒーレント状態における位相の揺らぎと α の位相の揺らぎの関係を調べる。光子数の平均値は $\langle N \rangle = |\alpha|^2$ であった。これを微分すると $\Delta \langle N \rangle = 2|\alpha|\Delta|\alpha|$ を得る。一方 $\Delta \langle N \rangle = \sigma_N$ とおけば $\sigma_N = |\alpha|$ であるから

$$\Delta|\alpha| = \frac{1}{2}$$

を得る。したがって、

$$\sigma_{\hat{\phi}} = \frac{1}{2\sqrt{\langle N \rangle}} = \frac{\Delta|\alpha|}{|\alpha|}$$

であり、これは、 $|\alpha|$ が $\pm\Delta|\alpha|$ 揺らぐ事に起因する、 α の位相角 θ の揺らぎ $\Delta\theta$ に対応する。即ちコヒーレント状態の位相の揺らぎは固有値の位相の揺らぎであり

$$\sigma_{\hat{\phi}} = \Delta\theta \tag{I.16}$$

である。ついでに述べておくと固有値の絶対値は光子数の揺らぎの大きさに対応する。

コヒーレント状態の定義から明らかなように真空状態 $|0\rangle$ は固有値 $\alpha = 0$ のコヒーレント状態である。実際コヒーレント状態で $\alpha = 0$ としてみると $|0\rangle$ が得られる。一般の α のコヒーレント状態は真空に以下で定義される変位演算子を作用する事で得られる。

$$D_\alpha \equiv e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \tag{I.17}$$

そのことを証明する。Baker-Hausdorff の関係式を用いると以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
 D_\alpha|0\rangle &= e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{-|\alpha|^2/2}|0\rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle
 \end{aligned}$$

二つ目の等号では、消滅演算子が真空状態に掛かると消滅することを用いた。

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (\text{I.18})$$

$$a^\dagger = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (\text{I.19})$$

$\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ と実部と虚部に分けると変位演算子はこれらを用いて以下のように書き換えられる。

$$D_\alpha = \exp \left[-\alpha_r \frac{\partial}{\partial \xi} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \quad (\text{I.20})$$

したがってコヒーレント状態の ξ, η 平面への射影は以下のような意味を持つ。

$$\begin{aligned}
 \langle \xi \eta | \alpha \rangle &= \langle \xi \eta | D_\alpha | 0 \rangle = \int \int d\xi' d\eta' \langle \xi \eta | D_\alpha | \xi' \eta' \rangle \langle \xi' \eta' | 0 \rangle \\
 &= \int \int d\xi' d\eta' D_\alpha(\xi, \eta; \xi', \eta') \langle \xi' \eta' | 0 \rangle \\
 &= \int \int d\xi' d\eta' D_\alpha(\xi, \eta) \delta(\xi' - \xi) \delta(\eta' - \eta) u_0(\xi') u_0(\eta') \\
 &= \exp \left[-\alpha_r \frac{\partial}{\partial \xi} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial \eta} \right] u_0(\xi) u_0(\eta) \\
 &= u_0(\xi - \alpha_r) u_0(\eta - \alpha_i) e^{i\alpha_r \alpha_i}
 \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

一つ目の等号では $|\xi \eta\rangle$ が完全系を張る事を使った。三つ目の等号では、量子力学におけるエルミート演算子が局所的であることを用いた。最後の

等号では、関数 $u_0(\xi - \alpha_r)u_0(\eta - \alpha_i)$ の点 (ξ, η) でのテーラー展開の定義式をその一つ上の式が与える事を使った。真空は $\xi - \eta$ 平面上で原点を中心とした半径 $1/2$ の円の中の ξ, η が不確定な値を取る状態である。従って、コヒーレント状態は $\xi - \eta$ 平面で真空状態が値を取る領域の原点を点 (α_r, α_i) にシフトした状態である。演算子 D_α がこのような状態のシフトを表すので変位演算子と呼んだ。

ここまでは、コヒーレント状態の時間変化を無視してきた。コヒーレント状態は調和振動子のハミルトニアンで与えられるゼロ次のハミルトニアン H_0 の元シュレディンガー方程式を満たすとす。

$$i\hbar \frac{\partial |\alpha(t)\rangle}{\partial t} = H_0 |\alpha(t)\rangle \quad (\text{I.22})$$

初期条件 $t=0$ で $|\alpha(0)\rangle = |\alpha\rangle$ とすると時間に依存するコヒーレント状態は形式的に以下のように書け、計算を進めると以下ようになる。

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\alpha\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n |\alpha|^n e^{in\theta} \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{-in\Omega t} e^{-\frac{i}{2}\Omega t} |n\rangle \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

したがって、時間に依存するコヒーレント状態は α を $|\alpha|e^{i(\theta - \Omega t)}$ で置き換えて $e^{-\frac{i}{2}\Omega t}$ を掛けたものに等しい。最後のファクターは零点振動からくるもので以下で議論する事に関わりがないので当面無視する。時間依存するコヒーレント状態の座標・運動量表示は以下ようになる。

$$\langle \xi \eta | \alpha(t) \rangle = u_0(\xi - |\alpha| \cos(\theta - \Omega t)) u_0(\eta - |\alpha| \sin(\theta - \Omega t)) \quad (\text{I.24})$$

したがって、コヒーレント状態の観測値が存在する領域は、一定半径の円を保ちながら原点をのまわりを角速度 Ω で回転する。このように位相空間上で時間的に整然と運動することが、この状態がコヒーレント状態と呼ばれる所以の一つである。

ここまでは、状態光子を念頭において議論してきたが、実際の所ボーズ粒子であれば何でもよい。以下でもう少し物理的に突っ込んだ議論を行うため具体的に電磁波を量子化した状態を扱う。量子化された電磁波の電場は

2章の議論から以下のように書ける。但し、ここでは簡単のため電磁波はスカラー波として扱う。また波数は k とし $\omega_k = ck$ であり、伝搬方向を z 軸とした。

$$\hat{E}(z, t) = iE_0(ae^{-i(\omega_k t - kz)} - a^\dagger e^{i\omega_k t - kz}) \quad (\text{I.25})$$

式 (5.69), (5.70) を用いて座標と運動量で書き換えると以下ようになる。

$$\hat{E}(z, t) = 2E_0(\xi \sin(\omega_k t - kz) - \eta \cos(\omega_k t - kz)) \quad (\text{I.26})$$

このように ξ 、 η は互いに位相が 90 度ずれた正弦波の重ね合わせの振幅を表している。このため ξ, η を用いた表示を直交位相表示、 ξ, η を直交位相振幅演算子と呼ぶ。

I.2 スクイーズド状態

この節ではスクイーズド状態の基礎についてまとめる。スクイーズド状態とは、共役な二つの物理量の間の不確定性関係を保ちつつ、片方の物理量の不確定さを極端に小さくした状態のことである。その代償として、相棒の物理量の不確定さは非常に大きくなり、その結果不確定性関係が保たれる。コヒーレント状態は、共役な物理量両方の不確定さが同量の状態であった。真空状態もコヒーレント状態の特別な状態であった。そこでコヒーレント状態からのスクイーズド状態の生成から議論を始める。スクイーズド演算子を以下のように定義する。

$$S(\zeta) = e^{\zeta a^{\dagger 2} - \zeta^* a^2} \quad (\text{I.27})$$

ζ はある複素数であり、当面は時間に依存しない定数とし振幅と位相を用いて以下のように表す。

$$\zeta = \frac{1}{2} r e^{-2i\phi} \quad (\text{I.28})$$

この後の計算に必要な下準備として以下の計算を行う。 $A = -(\zeta a^{\dagger 2} - \zeta^* a^2)$ と置く。

$$[A, ae^{i\phi}] = [-\zeta a^{\dagger 2}, ae^{i\phi}] = 2\zeta e^{i\phi} a^\dagger = r e^{-i\phi} a^\dagger \quad (\text{I.29})$$

$$[A, a^\dagger e^{-i\phi}] = [\zeta^* a^2, a^\dagger e^{-i\phi}] = 2\zeta^* e^{-i\phi} a = r e^{i\phi} a \quad (\text{I.30})$$

この結果を用いて Baker-Hausdorff の関係式を計算することで以下の結果を得る。

$$S^\dagger a e^{i\phi} S = a e^{i\phi} \cosh r + a^\dagger e^{-i\phi} \sinh r \quad (\text{I.31})$$

$$S^\dagger a^\dagger e^{-i\phi} S = a^\dagger e^{-i\phi} \cosh r + a e^{i\phi} \sinh r \quad (\text{I.32})$$

同様に $A^\dagger = -(\zeta^* a^2 - \zeta a^{\dagger 2})$ であり

$$[A^\dagger, a e^{i\phi}] = 2\zeta e^{i\phi} a^\dagger = -r e^{-i\phi} a^\dagger \quad (\text{I.33})$$

$$[A^\dagger, a^\dagger e^{-i\phi}] = 2\zeta^* e^{-i\phi} a = -r e^{i\phi} a \quad (\text{I.34})$$

よって

$$S a e^{i\phi} S^\dagger = a e^{i\phi} \cosh r - a^\dagger e^{-i\phi} \sinh r \quad (\text{I.35})$$

$$S a^\dagger e^{-i\phi} S^\dagger = a^\dagger e^{-i\phi} \cosh r - a e^{i\phi} \sinh r \quad (\text{I.36})$$

コヒーレント状態にスクイーズド演算子を作用することでスクイーズド状態が得られる。

$$|ss\rangle = S(\zeta)|\alpha\rangle \quad (\text{I.37})$$

スクイーズド状態によって物理量のスクイーズがどのように起こるか調べる。以下の二つのエルミート共役な演算子を定義する。

$$d_1 = \frac{1}{2}(a e^{i\phi} + a^\dagger e^{-i\phi}) \quad (\text{I.38})$$

$$d_2 = \frac{1}{2i}(a e^{i\phi} - a^\dagger e^{-i\phi}) \quad (\text{I.39})$$

前節で導入した直交位相振幅演算子 ξ, η は、これらから $\phi = 0$ とすることで得られる。これらは以下の交換関係を満たす。

$$[d_1, d_2] = \frac{i}{2} \quad (\text{I.40})$$

従って、これらは以下の不確定性関係を満たす。

$$\sigma_{d_1} \sigma_{d_2} \geq \frac{1}{4} \quad (\text{I.41})$$

ここで定義された二つの演算子はシュレディンガー描像での表記である。

そこでこれらをハイゼンベルグ描像の表記に変換する。

$$d_{1H} = S^\dagger d_1 S = \frac{e^r}{2} (ae^{i\phi} + a^\dagger e^{-i\phi}) \quad (\text{I.42})$$

$$d_{2H} = S^\dagger d_2 S = \frac{e^{-r}}{2i} (ae^{i\phi} - a^\dagger e^{i\phi}) \quad (\text{I.43})$$

この結果から分かるように $r \gg 1$ の時、 d_2 がスクイーズされる状態であり、 d_2 がストレッチされる状態である。同様の事を、シュレディンガー描像を用いて二つの演算子の標準編纂を求める事で示す。スクイーズド状態によるこれらの演算子の期待値及び2乗平均を計算する。

$$\begin{aligned} \langle ss|d_1|ss \rangle &= \frac{1}{2} \langle \alpha | S^\dagger (ae^{i\phi} + a^\dagger e^{-i\phi}) S | \alpha \rangle \\ &= \frac{1}{2} e^r (e^{i\phi} \alpha + e^{-i\phi} \alpha^*) \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

$$= e^r |\alpha| \cos(\theta + \phi) = e^r (\alpha_r \cos \phi - \alpha_i \sin \phi) \quad (\text{I.45})$$

$$\langle ss|d_2|ss \rangle = \frac{1}{2i} e^{-r} (e^{i\phi} \alpha - e^{-i\phi} \alpha^*) \quad (\text{I.46})$$

$$= e^{-r} |\alpha| \sin(\theta + \phi) = e^{-r} (\alpha_r \sin \phi + \alpha_i \cos \phi) \quad (\text{I.47})$$

$$\begin{aligned} \langle ss|d_1^2|ss \rangle &= \frac{1}{4} \langle \alpha | S^\dagger d_1 S S^\dagger d_1 S | \alpha \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle \alpha | e^r (a^\dagger e^{-i\phi} + ae^{i\phi}) e^r (a^\dagger e^{-i\phi} + ae^{i\phi}) | \alpha \rangle \\ &= \frac{e^{2r}}{4} (\alpha^{*2} e^{-2i\phi} + \alpha^2 e^{2i\phi} + 2|\alpha|^2 + 1) \end{aligned} \quad (\text{I.48})$$

$$\begin{aligned} \langle ss|d_2^2|ss \rangle &= -\frac{1}{4} \langle ss | e^{-r} (ae^{i\phi} - a^\dagger e^{-i\phi}) e^{-r} (ae^{i\phi} - a^\dagger e^{-i\phi}) | ss \rangle \\ &= -\frac{e^{-2r}}{4} (\alpha^{*2} e^{-2i\phi} + \alpha^2 e^{2i\phi} - 2|\alpha|^2 - 1) \end{aligned} \quad (\text{I.49})$$

これらからそれぞれの演算子の揺らぎは以下のように求まる。

$$\sigma_{d_1} = \frac{1}{2} e^r \quad (\text{I.50})$$

$$\sigma_{d_2} = \frac{1}{2} e^{-r} \quad (\text{I.51})$$

したがって、 r が大きくなれば d_2 が圧搾され d_1 の揺らぎが大きく引き延ばされる、言い換えると d_2 が確定し、 d_1 が非常に不確定になる。このように

r がスクイーズの度合いを表すパラメータなのでスクイーズドパラメータと呼ぶ。次にスクイーズされた方向が複素 α 平面上、即ち直交位相振幅演算子 $\xi - \eta$ 平面上、どちらに向いているかを調べる。 d_1 の平均値が作る軸上では、 d_2 の平均値が 0 である。従って、 $\langle ss|d_1|ss \rangle$ 軸は以下の直線である。

$$\alpha_i = -\tan \phi \alpha_r \quad (\text{I.52})$$

即ち、実軸を時計回りに角 ϕ 回転した方向である。一方 $\langle ss|d_2|ss \rangle$ 軸は、 $\langle ss|d_1|ss \rangle = 0$ より、以下の直線である。

$$\alpha_i = \cot \phi \alpha_r \quad (\text{I.53})$$

即ち虚軸を時計回りに角 ϕ 回転した方向である。 d_2 が圧搾される方向であるから、 $\phi = -\theta$ の時、位相が圧搾されることになる。一方 $\phi = \pi/2 - \theta$ の時、粒子数がスクイーズされることになる。

1.3 正準変換と母関数

一般化座標 q 、一般化速度 \dot{q} で記述される粒子の軌道を考える。この粒子の運動がラグランジアン L で記述されるとする。この粒子は以下のオイラー・ラグランジ方程式を満たす。

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (\text{I.54})$$

オイラー・ラグランジ方程式から粒子の運動方程式を導き出すラグランジアンは一意には決まらない。例として質量 m の一次元自由粒子の運動を考える。馴染みが深いラグランジアンは以下のものであろう。

$$L_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2. \quad (\text{I.55})$$

これをオイラー・ラグランジ方程式に代入すると以下の方程式が得られる。

$$m \ddot{x} = 0. \quad (\text{I.56})$$

次に $\alpha \neq 0$ なる定数 α を用いて

$$L_2 = e^{\alpha x}, \quad (\text{I.57})$$

で定義されるラグランジアンを考える。これをオイラー・ラグランジ方程式に代入すると以下の方程式を得る。

$$-\alpha^2 \ddot{x} e^{\alpha x} = 0. \quad (\text{I.58})$$

$\alpha \neq 0$ より、この式から以下の運動方程式を得る。

$$\ddot{x} = 0. \quad (\text{I.59})$$

確かに一次元自由粒子の運動方程式が得られる。

同じ粒子の運動を表す二つのラグランジアン L, L' が一般化座標 x のみの関数 $W(x)$ を用いて

$$L' = L + \frac{dW}{dt}, \quad (\text{I.60})$$

で結ばれる場合を考える。ここで W は x のみの関数であるから

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dx} \dot{x}, \quad (\text{I.61})$$

と書ける。これを用いて $\frac{dW}{dt}$ をオイラー・ラグランジ方程式の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dW}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{dW}{dt} \right) \right] &= \frac{d^2 W}{dx^2} \dot{x} - \frac{d}{dt} \left[\frac{dW}{dx} \right] \\ &= \frac{d^2 W}{dx^2} \dot{x} - \frac{d^2 W}{dx^2} \dot{x} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I.62})$$

となり恒等的にゼロとなる。したがって、 L' は L と全く同じ運動方程式を与える。言い換えるとラグランジアンには変換式 (I.60) の不定性が伴う。自由粒子の例で取り上げた L_1, L_2 の差は変換式 (I.60) の形では表せない。しかし、この例では最終的に得られる粒子の運動方程式は同じ (I.59) であるが、オイラー・ラグランジ方程式から得られる方程式は式 (I.56) と式 (I.58) のように異なる形をしていて互いに等しくない。一方、変換 (I.60) と恒等式 (I.62) より、二つのラグランジアンが変換 (I.60) で結ばれる場合は、オイラー・ラグランジ方程式から得られる方程式形が変換前後で全く等しくな

る。次にこれの逆も真であること、即ち二つのラグランジアンをオイラー・ラグランジュ方程式に代入して得られる方程式の形が互いに等しい時、これらのラグランジアンが変換 (I.60) で結ばれることを示す。ラグランジアンは x, \dot{x} の関数であるから二つのラグランジアンの差も x, \dot{x} の関数 $G(x, \dot{x})$ を用いて以下のように書けるはずである。

$$L' = L + G(x, \dot{x}). \quad (\text{I.63})$$

これらの二つのラグランジアンが満たすオイラー・ラグランジュ方程式が等しいという要請から

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}, \\ &= \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \end{aligned} \quad (\text{I.64})$$

となり、これから G が

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} = 0, \quad (\text{I.65})$$

を満たさなければならないことがわかる。 G に対する条件式 (I.65) をさらに変形すると G の満たすべき方程式が以下のように求まる。

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \dot{x}} \dot{x} - \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{x}^2} \ddot{x} = 0, \quad (\text{I.66})$$

G は \ddot{x} を含まないので、その x, \dot{x} による微分係数から \ddot{x} を含むことは現れない。したがって、方程式 (I.65) が恒等的に成り立つためには、 \ddot{x} の係数がゼロ即ち、

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{x}^2} = 0, \quad (\text{I.67})$$

が恒等的に成り立つ必要がある。この方程式の一般解は、 x のみの任意関数 $f(x), g(x)$ を用いて以下のように書ける。

$$G(x, \dot{x}) = f(x)\dot{x} + g(x). \quad (\text{I.68})$$

この解 (I.68) を方程式 (I.68) に代入すると以下の結果を得る。

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial g}{\partial x} = 0. \quad (\text{I.69})$$

したがって、 $g(x)$ は定数でなければならない。ここで x のみの関数 $W(x)$ を用いて $f(x)$ を

$$\frac{dW}{dx} \equiv f(x), \quad (\text{I.70})$$

と表すと以上の結果は、二つのラグランジアンが与えるオイラー・ラグランジ方程式の形が互いに等しい時、二つのラグランジアンは

$$L' = L + \frac{dW}{dx} \dot{x} + \text{const.} = L + \frac{dW}{dt} + \text{const.}, \quad (\text{I.71})$$

と書けることを示している。定数の不訂正をゼロとすれば、これが逆が真であることの証明になっている。二つのラグランジアンが与えるオイラー・ラグランジ方程式の形が互いに等しいことと、これらのラグランジアンが変換式 (I.60) で結ばれることが互いに必要十分条件であることがわかった。

ここまでの準備を踏まえて正準変換について解説する。一般化座標 q 、一般化運動量 p 、これらを変数とするハミルトニアン $H = H(q, p)$ で表される粒子の一次元運動は以下の正準運動方程式で記述される。

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p}, \quad (\text{I.72})$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q}. \quad (\text{I.73})$$

変数変換

$$q = q(Q, P), \quad (\text{I.74})$$

$$p = p(Q, P), \quad (\text{I.75})$$

により q, p が Q, P に変換されるとする。変換後の新しい変数が正準変数であるためには、 Q, P で定義されるハミルトニアン $K = K(Q, P)$ が存在し、以下の方程式が満たされなければならない。

$$\dot{Q} = \frac{\partial K(Q, P)}{\partial P}, \quad (\text{I.76})$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K(Q, P)}{\partial Q}. \quad (\text{I.77})$$

上記した同一の粒子の運動を表す二つのラグランジアン L_1, L_2 それぞれから得られるオイラー・ラグランジ方程式が必ずしも同じ形にならないことと同様に、一般にはハミルトンの運動方程式 (I.72),(I.73) の組みと (I.76),(I.77) の組みは同じ形とは限らない。無限に存在する正準変数間の変換の中で、ハミルトンの運動方程式の形を変えない変換を正準変換と呼ぶ。

正準変換について具体的に論ずるためにハミルトンの運動方程式の変分原理からの導出を議論する。作用積分をハミルトニアンを用いて以下のように定義する。

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{q}p - H(q, p)). \quad (\text{I.78})$$

粒子の軌跡に以下のような変分を与える。

$$q \rightarrow q' = q + \eta, \quad (\text{I.79})$$

$$p \rightarrow p' = p + \zeta. \quad (\text{I.80})$$

但し、位相空間上の始点と終点は固定し、

$$\eta(t_1) = 0, \eta(t_2) = 0, \quad (\text{I.81})$$

$$\zeta(t_1) = 0, \zeta(t_2) = 0, \quad (\text{I.82})$$

を満たす。軌道の変分による作用積分の変分は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\zeta \dot{q} + \dot{\eta} p - \frac{\partial H}{\partial q} \eta - \frac{\partial H}{\partial p} \zeta \right), \\ &= [\eta(t)p(t)]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\zeta \dot{q} - \dot{p} \eta - \frac{\partial H}{\partial q} \eta - \frac{\partial H}{\partial p} \zeta \right), \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\left[\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right] \zeta - \left[\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right] \eta \right). \end{aligned} \quad (\text{I.83})$$

最後の等号では、境界条件 (I.81) を用いた。粒子の軌道は、作用積分を最小にする軌道を選ぶという最小作用の原理から、 q, p が粒子の軌道であれば作用積分が最小となる。したがって、粒子の真の軌道からの任意の変分 η, ζ に対してその一次までで $\delta I = 0$ である。これから以下の二つの方程式を得る。

$$\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} = 0, \quad (\text{I.84})$$

$$\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} = 0. \quad (\text{I.85})$$

二つのラグランジアンが一般化座標 q のみの関数 $W(q)$ を用いて変換 (I.60) で結ばれるとき、オイラー・ラグランジ方程式から同じ形の方程式が得られることを既に示した。一方、 \dot{q} と q の関数であるラグランジアンと

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad (\text{I.86})$$

で定義される一般化運動量と q の関数であるハミルトニアンは以下の関係で結ばれることを知っている。

$$H(q, p) = \dot{q}p - L(\dot{q}, q). \quad (\text{I.87})$$

そこで以下のように定義される q, p の関数ラグランジアンもどき $\bar{L}(q, p)$ を導入する。

$$\bar{L}(q, p) = p\dot{q} - H(q, p). \quad (\text{I.88})$$

変数変換 (I.93), (I.94) で結ばれる変数 Q, P を用いて定義されるラグランジアンもどきは以下のように定義される。

$$\bar{L}'(Q, P) = P\dot{Q} - K(Q, P). \quad (\text{I.89})$$

変換 (I.60) で結ばれる二つのラグランジアンから得られるオイラー・ラグランジ方程式の形が同じになるという教訓からハミルトンの運動方程式 (I.72) と (I.73) の組みと (I.76) と (I.77) の組みから得られる方程式の形が同じになるためには、二つのラグランジアンもどきが q, Q の関数 $W(q, Q)$ を用いて以下の関係で結ばれていればよいことが推測される。

$$\bar{L}(q, p) = \bar{L}'(Q, P) + \frac{dW(q, Q)}{dt}. \quad (\text{I.90})$$

W の全微分は以下のように書ける。

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial W}{\partial Q} \dot{Q}. \quad (\text{I.91})$$

これを関係式 (I.90) に代入すると以下ようになる。

$$\dot{q}p - H(q, p) = \dot{Q}P - K(Q, P) + \frac{\partial W}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial W}{\partial Q} \dot{Q}. \quad (\text{I.92})$$

これを変換式 (I.90) に代入すると、変数変換後の変数も正準方程式を満たすためには

$$p = \frac{\partial W(q, Q)}{\partial q}, \quad (\text{I.93})$$

$$P = -\frac{\partial W(q, Q)}{\partial Q}, \quad (\text{I.94})$$

$$H(q, p) = K(Q, P), \quad (\text{I.95})$$

が満たされていけばよいことが分かる。変換式 (I.93) と (I.94) により q, p から Q, P の変換が与えられている場合、方程式 (I.93), (I.94) の解として $W(q, Q)$ が求まる。逆に $W(q, Q)$ が与えられている時、変換式 (I.93), (I.94) により q, p から Q, P への変換が与えられる。変換後の変数がハミルトンの運動方程式を満たすような変数変換を正準変換と呼ぶ。変換式 (I.93), (I.94) が正準変換の一般式であり、 $W(q, Q)$ を変換の母関数 (generator) と呼ぶ。

正準変換の例として 1 次元調和振動子を扱う。質量 1 で角振動数 1 の 1 次元調和振動子のハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + q^2). \quad (\text{I.96})$$

これに以下の母関数で定義される正準変換を施す。

$$W(q, Q) = \frac{1}{2} q^2 \cot Q. \quad (\text{I.97})$$

この母関数で表現される変数変換は以下ようになる。

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = q \cot Q, \quad (\text{I.98})$$

$$P = -\frac{\partial W}{\partial Q} = \frac{1}{2} q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}, \quad (\text{I.99})$$

$$H(q, p) = K(Q, P). \quad (\text{I.100})$$

初めの二つの式を整理すると以下の関係式をえる。

$$q = \sqrt{2P} \sin Q, \quad (\text{I.101})$$

$$p = \sqrt{2P} \cos Q. \quad (\text{I.102})$$

新しい変数を用いてハミルトニアン (I.96) は以下のようにかける。

$$H = P = K. \quad (\text{I.103})$$

ハミルトニアンが Q を含まないので Q は循環座標であり共役な運動量 P が保存することがわかる。実際ハミルトンの運動方程式は、

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 1, \quad (\text{I.104})$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0, \quad (\text{I.105})$$

となり確かに P が保存する。この例では P は系のハミルトニアンに等しく、これはエネルギー保存則を表している。

正準変換の母関数は、変換前後の一般化座標 q, Q のみの関数である必要はない。たとえば、以下のルジャンドル変換で $W(q, Q)$ と結ばれる新しい関数 $W'(q, P)$ を考える。

$$W'(q, P) = W(q, Q) + PQ. \quad (\text{I.106})$$

正準変換の関係式 (I.93), (I.94) を用いると

$$\begin{aligned} dW' &= dW + PdQ + QdP = \frac{\partial W}{\partial q} dq + \frac{\partial W}{\partial Q} dQ + PdQ + QdP, \\ &= \frac{\partial W}{\partial q} dq + QdP, \end{aligned} \quad (\text{I.107})$$

となり W' が q, P の関数であることがわかる。変数変換の式 (I.106) をこの変換に伴うラグランジアンもどきの変換式 (I.90) に代入すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} p\dot{q} - H(q, p) &= P\dot{Q} - K(Q, P) - \dot{P}Q - P\dot{Q} + \frac{\partial W'}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial W'}{\partial P} \dot{P}, \\ &= -K(Q, P) - \dot{P}Q + \frac{\partial W'}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial W'}{\partial P} \dot{P}. \end{aligned} \quad (\text{I.108})$$

したがって、 W' が以下の関係式を満たせば、正準変換である。

$$p = \frac{\partial W'(q, P)}{\partial q}, \quad (\text{I.109})$$

$$Q = \frac{\partial W'(q, P)}{\partial P}. \quad (\text{I.110})$$

ここで $H(q, p) = K(Q, P)$ は変わらず成立する。このように q, P の関数 W' も正準変換の母関数として選ぶことができる。

恒等変換

$$q = Q, \quad (\text{I.111})$$

$$p = P, \quad (\text{I.112})$$

を与える母関数を探す。これを以下のように書き換える。

$$Q = q, \quad (\text{I.113})$$

$$p = P. \quad (\text{I.114})$$

これから

$$W'(q, P) = Pq, \quad (\text{I.115})$$

とすれば変数変換 (I.109), (I.110) に代入すると以下のようになり

$$p = \frac{\partial W'}{\partial q} = P, \quad (\text{I.116})$$

$$Q = \frac{\partial W'}{\partial P} = q, \quad (\text{I.117})$$

確かに恒等変換が導かれる。

変換後の変数と変換前の変数の差が無限小となる無限小変換を考える。関数 $G(q, P)$ とし、恒等変換からのズレの大きさが小さいことを表現する微小量 ε を導入して以下の無限小変換の母関数を定義する。

$$W'(q, P) = Pq + \varepsilon G(q, P). \quad (\text{I.118})$$

このから微小量の一次までで以下の変数変換の関係式をえる。

$$p = P + \varepsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial q} \sim P + \varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial q}, \quad (\text{I.119})$$

$$Q = q + \varepsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial P} \sim q + \varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial p}. \quad (\text{I.120})$$

関数 G の変数を P から p に入れ替えたのは、これらの差はこの変換の関係式に微小量の 2 次以上の高次の差のみの現れるので、1 次までの近似でその差を無視したためである。変換の関係式 (I.119) と (I.120) から変換前後の変数の変化量を G で表す以下の関係式が得られる。

$$\delta q \equiv Q - q = \varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial p}, \quad (\text{I.121})$$

$$\delta p \equiv P - p = -\varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial q}. \quad (\text{I.122})$$

このような性質から $G(q, p)$ を無限小変換の母関数と呼ぶ。次節で定義されるポアソン括弧式を用いると以下の形にまとめられる。

$$\delta q = \varepsilon [q, G(q, p)]_c, \quad (\text{I.123})$$

$$\delta p = \varepsilon [p, G(q, p)]_c. \quad (\text{I.124})$$

最小作用の原理からハミルトンの運動方程式の導出には、境界条件 (I.81) のみの要請で十分であり、境界条件 (I.82) は必要なかった。後者の条件は、正準変換 (I.90) の自由度を考慮した上で、正準方程式が成り立つことが作用積分を最小にする軌道であるためには必要な条件であることを示す。母関数として (I.106) で定義される W' を用いる。正準変換後の作用積分は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\dot{Q}P - K(Q, P) + \frac{d}{dt} (W'(q, P) - PQ) \right), \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{Q}P - K(Q, P)) + [W'(q, P) - QP]_{t=t_1}^{t=t_2}. \end{aligned} \quad (\text{I.125})$$

変換後の変数に対して最小作用を満たす軌跡が、変換後の変数がハミルトンの運動方程式であるためには、最後の項からの変分の寄与がゼロでなければならない。その為には、境界条件 (I.82) が変換前後の変数に対して成り立つ必要がある。

1.4 ネーターの定理

ある変換に対してハミルトニアンが不変の時、その変換を表す母関数に対応する物理量が保存する。これがネーターの定理である。この証明のためポアッソン括弧式を定義する。任意の q, p の関数である $A(q, p), B(q, p)$ に対してポアッソン括弧式は以下のように定義される。

$$[A, B]_c \equiv \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q}. \quad (\text{I.126})$$

ここで交換関係式と区別するため添字の c をつけた。

以下 q, p が粒子の軌道を表すとす。するとこれらはハミルトンの運動方程式 (I.72), (I.73) を満たす。ある物理量 $F = F(q, p)$ の粒子の軌道に沿った時間全微分を考える。但し、 F は時間に陽に依存しないとす。すると

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = [F, H]_c, \quad (\text{I.127})$$

となりポアッソン括弧式を使って書ける。無限小座標変換 (I.118) によるハミルトニアンの変分を求める。

$$\begin{aligned} \delta H &\equiv H(Q, P) - H(q, p) = \frac{\partial H}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H}{\partial p} \delta p, \\ &= \varepsilon \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} = -\varepsilon [G, H]_c. \end{aligned} \quad (\text{I.128})$$

ここで (I.121), (I.122) を用いた。これら (I.127) と (I.128) を用いると変換の母関数の粒子の軌道に沿った時間全微分とハミルトニアンとのポアッソン括弧式の間以下の関係式が得られる。

$$\frac{dG}{dt} = [G, H]_c. \quad (\text{I.129})$$

この方程式は、母関数 G で表される変換に対してハミルトニアンが不変すなわち $\delta H = 0$ の時、 G に対応する物理量が粒子の運動に伴って保存することを示している。

三つの具体例を取り上げる。時間推進変換を考える。

$$t' = t + \varepsilon, \quad (\text{I.130})$$

この変換で粒子の位相空間中の座標が以下のように変換される。

$$Q(t + \varepsilon) = q(t), \quad (\text{I.131})$$

$$P(t + \varepsilon) = p(t). \quad (\text{I.132})$$

したがって、変数変換前後での座標の同時刻での変化量すなわちリ－微分は以下ようになる。

$$\delta^L q(t) = Q(t) - q(t) = q(t - \varepsilon) - q(t) = -\dot{q}\varepsilon = -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (\text{I.133})$$

$$\delta^L p(t) = P(t) - p(t) = p(t - \varepsilon) - p(t) = -\dot{p}\varepsilon = \varepsilon \frac{\partial H}{\partial q}. \quad (\text{I.134})$$

ここでハミルトンの運動方程式を用いた。したがって、無限小時間推進変換の母関数はハミルトニアンであり

$$G = -H, \quad (\text{I.135})$$

である。したがって、ネーターの定理からハミルトニアンが時間推進に対して不変であるときエネルギーが保存する。空間推進変換を考える。

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\varepsilon}, \quad (\text{I.136})$$

$$\vec{p}' = \vec{p}. \quad (\text{I.137})$$

この変換による粒子の位相空間中の座標の変化量は以下ようになる。

$$\delta \vec{q}(t) = \vec{Q}(t) - \vec{q}(t) = \vec{\varepsilon}, \quad (\text{I.138})$$

$$\delta \vec{p}(t) = 0. \quad (\text{I.139})$$

この変換を与える母関数は以下のものである。

$$G = \frac{\vec{\varepsilon} \cdot \vec{p}}{\varepsilon}. \quad (\text{I.140})$$

ここで ε は $\vec{\varepsilon}$ の絶対値である。したがって、ハミルトニアンが空間推進に対して不変であるとき保存する量は運動量である。次に3次元空間での単位ベクトル \vec{e} を軸とした回転角 ε の無限小回転を考える。

$$\vec{x}' = \vec{x} + \varepsilon \vec{x} \times \vec{e}. \quad (\text{I.141})$$

この変換により一般化座標と一般化運動量は以下のように変換される。

$$\vec{Q}(t) = \vec{q}(t) + \varepsilon \vec{q}(t) \times \vec{e}, \quad (\text{I.142})$$

$$\vec{P}(t) = \vec{p}(t) + \varepsilon m \dot{\vec{x}} \times \vec{e}. \quad (\text{I.143})$$

したがって、関係式 (I.123)、(I.124) より変換前後の位相空間中の粒子の座標の変化量は以下のようになる。

$$\delta \vec{q}(t) = \varepsilon \vec{q}(t) \times \vec{e}, \quad (\text{I.144})$$

$$\delta \vec{p}(t) = \varepsilon \vec{p}(t) \times \vec{e}. \quad (\text{I.145})$$

これから無限小空間回転の母関数が以下のように与えられることが分かる。

$$G = (\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{e} = \varepsilon^{ijk} e_i p_j q_k. \quad (\text{I.146})$$

これを確かめてみよう。

$$\frac{\partial G}{\partial q_\ell} = \varepsilon^{ijk} e_i \delta_{j\ell} q_k = \varepsilon^{i\ell k} e_i q_k = \varepsilon^{\ell ki} q_k e_i = (\vec{q} \times \vec{e})_\ell, \quad (\text{I.147})$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_\ell} = \varepsilon^{ijk} e_i p_j \delta_{\ell k} = \varepsilon^{ij\ell} e_i p_j = -\varepsilon^{\ell ji} p_j e_i = -(\vec{p} \times \vec{e})_\ell. \quad (\text{I.148})$$

母関数と変数の変分の関係式にこれらを代入すると確かに (I.144), (I.145) が再現される。したがって、無限小回転に対してハミルトニアンが不変である時、保存量は回転軸の周りの角運動量である。

1.5 ネーターの定理の量子場への拡張

ハミルトニアン H で表される系の状態関数の時間発展は以下のシュレディンガー方程式で記述される。

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi. \quad (\text{I.149})$$

解は以下のように表される。

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle. \quad (\text{I.150})$$

ある物理量 G の期待値は以下のように計算される。

$$\langle \psi(t) | G | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | e^{iHt/\hbar} G e^{-iHt/\hbar} | \psi(0) \rangle. \quad (\text{I.151})$$

これから以下のように定義されるハイゼンベルグ描像の演算子を定義する。

$$G(t) = e^{iHt/\hbar} G e^{-iHt/\hbar}. \quad (\text{I.152})$$

この $G(t)$ の時間発展を記述する以下の方程式をえる。

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dG(t)}{dt} &= e^{iHt/\hbar} (-HG + GH) e^{-iHt/\hbar}, \\ &= e^{iHt/\hbar} [G, H] e^{-iHt/\hbar}, \end{aligned} \quad (\text{I.153})$$

$$= [G(t), H]. \quad (\text{I.154})$$

したがって、 G が H と交換する時物理量 G は保存する。ある場の四元カレント j^μ が保存則

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (\text{I.155})$$

を満たすとする。この保存則は積分系で

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt} \int d^3x j^0 = 0, \quad (\text{I.156})$$

と書ける。即ち

$$G(t) = \int d^3x j^0, \quad (\text{I.157})$$

が保存量であり、これが変換の母関数である。ある場 $\phi_\alpha(x)$ のネーターカレントの第0成分は式 (3.12) より以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \varepsilon j^0 &= \frac{1}{c} \left(\delta x^0 L(x) + \sum_\alpha \frac{\partial L(x)}{\partial \partial_0 \phi_\alpha(x)} \delta^L \phi_\alpha(x) \right), \\ &= \frac{1}{c} \delta x^0 L(x) + \sum_\alpha \pi_\alpha(x) \delta^L \phi_\alpha(x). \end{aligned} \quad (\text{I.158})$$

ここで $L(x)$ はラグランジアン密度であり、左辺の ε は無限小変換の大きさを特徴付ける変数である。また正準運動量の定義

$$\pi_\alpha(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_\alpha(x)} = \frac{1}{c} \frac{\partial L}{\partial \partial_0 \phi_\alpha(x)}, \quad (\text{I.159})$$

を用いた。

母関数 $G(t)$ で表される一般の微小変換に対する実スカラー場 $\phi(x)$ のリー微分が以下のように書ける。

$$i\hbar\delta^L\phi(x) = \varepsilon[\phi(x), G]. \quad (\text{I.160})$$

実スカラー場では、

$$\delta^L\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) - (\phi'(x') - \phi'(x)) = -\delta x^\nu \partial_\nu \phi(x),$$

である。この関係式は以下の関係式を用いて証明できる。実スカラー場には内部自由度が存在しないため場の量は、座標の変換（時間・空間推進・空間回転・ローレンツ変換）のみが対象となる。

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = i\hbar\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (\text{I.161})$$

$$[\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}', t)] = i\hbar c^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (\text{I.162})$$

$$[\phi(\vec{x}, t), \partial_i \phi(\vec{x}', t)] = 0. \quad (\text{I.163})$$

初めの二つは自明であるが、 ϕ を以下のように粒子と反粒子の生成消滅演算子で展開した式を代入すると具体的に証明できる。

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (a_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{x}}). \quad (\text{I.164})$$

以下のように証明できる。

$$[\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}', t)] = \frac{i\hbar}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\omega_k} \omega_k (e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} + e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}) = \frac{i\hbar}{V} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')},$$

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}, t), \partial_i \phi(\vec{x}', t)] &= \frac{i\hbar}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\omega_k} (-k_i e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} - k_i e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}) \\ &= \frac{i\hbar}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\omega_k} (-k_i e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} + k_i e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}) = 0. \end{aligned}$$

これらの二つの式の結果の違いは、角周波数 ω_k は \vec{k} の向きに寄らずに常に正の値をとるのに対して \vec{k} は向きにより正負の符号を変えることからきている。

具体例として微小回転による実スカラー場の変化 (G.47) を取り上げる。以下 \vec{L} は角運動量演算子である。

$$i\hbar\delta^L\phi(x) = -\varepsilon\vec{n}\cdot\vec{L}\phi(x) = [\phi(x), \varepsilon\vec{n}\cdot\vec{L}] = \varepsilon[\phi(x), G]. \quad (\text{I.165})$$

ここで \vec{n} は回転軸を示す単位ベクトルであり、 ε はその軸のまわりの回転

角、最後の G は (I.146) で与えられる回転変換の母関数である。この例では、 G とハミルトニアンが交換するとき、系の角運動量が保存する。この関係式から、変化量が有限な α の場合の母関数 G で与えられる変換による場の変換を与える式が以下のように書けることがわかる。

$$\phi'(x) = e^{i\alpha G/\hbar} \phi(x) e^{-i\alpha G/\hbar}. \quad (\text{I.166})$$

内部自由度もつ場、例えば $U(1)$ 位相変換の自由度をもつ複素スカラー場、の内部自由度に関する変換に対して関係式 (I.170) が成り立つことを解説する。例えば無限小位相変換に対し、複素スカラー場は以下のように変換を受ける。

$$\begin{aligned} \phi'(x) &\sim (1 + i\alpha)\phi(x), \\ \delta^L\phi(x) &= i\alpha\phi(x). \end{aligned} \quad (\text{I.167})$$

したがって、 $\phi(x)$ と $\delta^L\phi(x')$ は交換する。一般の場の場合も内部自由度の変換に対して、この関係式と同様の理由から、リー微分と場自身は交換する。内部自由度に対する変換なので $\delta x^\nu = 0$ である。この時、変換の母関数は以下のように必ず書ける。

$$G(t) = \int d^3x' \pi(x') \delta^L\phi(x'). \quad (\text{I.168})$$

したがって、

$$[\phi(x), G(t)] = \int d^3x' i\hbar \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \delta^L\phi(x') = i\hbar \delta^L\phi(x), \quad (\text{I.169})$$

となり関係式 (I.170) が成り立つ。

ここでは回転変換を例に取ったが、母関数 $G(t)$ で表される一般の微小変換に対する場 $\phi_\alpha(x)$ のリー微分も以下のように書ける。

$$i\hbar \delta^L\phi_\alpha(x) = \varepsilon[\phi_\alpha(x), G]. \quad (\text{I.170})$$

I.6 基底状態の縮退

ハミルトニアンの基底状態がエネルギー固有値 E で縮退が無いとする。

$$H|E\rangle = E|E\rangle. \quad (\text{I.171})$$

ハミルトニアンと交換する母関数 G で表される変換をこの基底状態に施したとする。

$$HG|E\rangle = GH|E\rangle = EG|E\rangle. \quad (\text{I.172})$$

この結果は、 $G|E\rangle$ も H のエネルギー固有値 E の固有状態であること即ち基底状態であることを示している。今基底状態に縮退が無いとしているから

$$G|E\rangle = g_E|E\rangle, \quad (\text{I.173})$$

のように基底状態 $|E\rangle$ の線型結合即ち $|E\rangle$ に比例する。 g_E は G の固有値であり G が物理量であるからエルミート演算子であり、その固有値 g_E は実数である。関係式 (I.165) の両辺を基底状態 $|E\rangle$ で挟むと以下ようになる。

$$\begin{aligned} \langle E|\delta^L\phi(x)|E\rangle &= -\varepsilon\frac{i}{\hbar}\langle E|[\phi(x), G]|E\rangle, \\ &= -\varepsilon\frac{i}{\hbar}(\langle E|\phi(x)g_E|E\rangle - \langle E|g_E\phi(x)|E\rangle), \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.174})$$

縮退していない基底状態に対して、変換の母関数が保存する即ちその変換に対して系の対称性が保たれている時、場のリー微分の基底状態による期待値はゼロでなければならない。

次に基底状態に縮退がある場合を考える。基底状態を $|E, \xi_E\rangle$ と表し、

$$\langle E, \xi_E|E, \xi_E\rangle = \delta_{\xi_E, \eta_E}, \quad (\text{I.175})$$

のように $\xi_E \neq \eta_E$ の状態同士は、同じエネルギー固有値 E の固有状態であっても直交する。また

$$H|E, \xi_E\rangle = E|E, \xi_E\rangle, \quad (\text{I.176})$$

を満たす。この式の両辺に G を掛けて G, H が可換であることを用いると以下の関係式を得る。

$$GH|E, \xi_E\rangle = EG|E, \xi_E\rangle = HG|E, \xi_E\rangle. \quad (\text{I.177})$$

この結果は、 $G|E, \xi_E\rangle$ が H のエネルギー固有値 E に対する固有関数であることを示している。したがって、

$$G|E, \xi_E\rangle = \sum_{\eta_E} g_{\xi_E, \eta_E} |E, \eta_E\rangle, \quad (\text{I.178})$$

の様に基底状態の線型結合で表される。ここで展開係数は以下の様に計算される。

$$g_{\xi_E, \eta_E} = \langle E, \eta_E | G |E, \xi_E\rangle. \quad (\text{I.179})$$

関係式 (I.165) の両辺を $\langle E, \xi_E |$ と $|E, \xi_E\rangle$ で挟むと以下の結果を得る。

$$\begin{aligned} \langle E, \xi_E | \delta^L \phi(x) |E, \xi_E\rangle &= -\varepsilon \frac{i}{\hbar} \langle E, \xi_E | [\phi(x), G] |E, \xi_E\rangle, \\ &= -\varepsilon \frac{i}{\hbar} \left(\langle E, \xi_E | \phi(x) \sum_{\eta_E} g_{\xi_E, \eta_E} |E, \eta_E\rangle - \sum_{\eta_E} \langle E, \eta_E | g_{\eta_E, \xi_E} \phi(x) |E, \xi_E\rangle \right), \\ &= -\varepsilon \frac{i}{\hbar} \sum_{\eta_E} (\langle E, \xi_E | \phi(x) |E, \eta_E\rangle g_{\xi_E, \eta_E} - g_{\eta_E, \xi_E} \langle E, \eta_E | \phi(x) |E, \xi_E\rangle). \end{aligned} \quad (\text{I.180})$$

これは必ずしもゼロにならない。この結果は、系がある変換に対して不変即ち変換の母関数とハミルトニアンが交換する時、その系を表す場のリー微分の期待値がゼロで無い基底状態が存在すれば、基底状態が縮退していることを示している。式 (I.180) を Goldstone の交換関係式と呼ぶ。

I.7 Goldstone の定理

以下のように定義される場 $\phi(x)$ を考える。

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (\text{I.181})$$

$$\phi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (\text{I.182})$$

ここで V は系の体積、 $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^\dagger$ は、場を構成する量子の生成消滅演算子である。以下のように書けるハミルトニアンを用いてこの場の量がハイゼンベルグの運動方程式を満たすと定義した。

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}. \quad (\text{I.183})$$

ここでゼロ点振動のエネルギーは取り除いた。また系のエネルギー $\hbar \omega_k$ は、波数 \vec{k} と分散関係式で結ばれる。定義 (I.181), (I.182) より以下の場の交換関係式を得る。

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi^\dagger(\vec{x}', t)] = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (\text{I.184})$$

これらが以下のハイゼンベルグの運動方程式を満たすように式 (I.181) の指数の $e^{-i\hbar \omega_k t}$ の符号を選択した。

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \phi(x) &= [\phi(x), H], \\ l.h.s. &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \\ r.h.s. &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \hbar \omega_k [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger a_{\vec{k}'}] e^{-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k a_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \end{aligned} \quad (\text{I.185})$$

ハイゼンベルグの運動方程式から場の時間発展が時刻 $t = 0$ の時の場の量を用いて以下のように書ける。

$$\phi(x) = e^{iHt/\hbar} \phi(\vec{x}, 0) e^{-iHt/\hbar}. \quad (\text{I.186})$$

ここでハミルトニアンは時間に依存しないとした。この関係式はハミルトニアンが時間推進変換の母関数であることと関係している。次に運動量演算子を以下のように定義する。

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}. \quad (\text{I.187})$$

すると以下のような場の量との交換関係式を得る。

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}, t), \vec{P}] &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \hbar \vec{k} [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger a_{\vec{k}'}] e^{-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} a_{\vec{k}} e^{-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \\ &= -i\hbar \vec{\nabla} \phi(\vec{x}, t) = (\vec{P} \phi(x)). \end{aligned} \quad (\text{I.188})$$

この結果から時刻 $t = 0$ で原点 $\vec{x} = 0$ における場の量 $\psi(0)$ を用いて任意の時刻、任意の場所での場の演算子が以下のように書けることがわかる。

$$\phi(x) = e^{iHt/\hbar - i\vec{P}\cdot\vec{x}/\hbar} \phi(0) e^{-iHt/\hbar + i\vec{P}\cdot\vec{x}/\hbar}. \quad (\text{I.189})$$

最後の式は、時間 t の時間推進および \vec{x} 方向への大きさ $|\vec{x}|$ の空間推進を施した結果と見做すことができる。したがって、任意の関数 $f(\vec{x}, t)$ に対して以下の関係式が成り立つ。

$$f(\vec{x}, t) = e^{iHt/\hbar - i\vec{P}\cdot\vec{x}/\hbar} f(0) e^{-iHt/\hbar + i\vec{P}\cdot\vec{x}/\hbar}. \quad (\text{I.190})$$

ここで式 (I.180) の時間依存性を調べてみる。

$$\begin{aligned} \partial_{t'} \langle E, \xi_E | [\phi(\vec{x}, t), G(t')] | E, \xi_E \rangle &= \int d^3x' \langle E, \xi_E | [\phi(\vec{x}, t), \partial_{t'} J^0(\vec{x}', t')] | E, \xi_E \rangle, \\ &= - \int d^3x' \langle E, \xi_E | [\phi(\vec{x}, t), \partial_{t'} J^i(\vec{x}', t')] | E, \xi_E \rangle, \\ &= - \int dS_{t'} \langle E, \xi_E | [\phi(\vec{x}, t), J^i(\vec{x}', t')] | E, \xi_E \rangle, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.191})$$

ここで J^0 が保存量であること、考えている領域の境界面上での積分がゼロになることを使った。

保存量の第ゼロ成分は時間空間の原点での量を用いて以下のように表すことができる。

$$J^0(x) = e^{iHt/\hbar - i\vec{P}\cdot\vec{x}/\hbar} J^0(0) e^{-iHt/\hbar + i\vec{P}\cdot\vec{x}/\hbar}. \quad (\text{I.192})$$

基底状態の縮退が現れる時、異なる量子状態の基底状態間で基底状態を占有する量子の数が異なることを意味している。そこで基底状態を占める量子の数が n の状態 $|n\rangle$ が様々な値を取ることで基底状態の縮退が現れているとする。この状態が完全系を張ることを用いて、基底状態 Goldstone の交換関係を以下のように計算することができる。

$$\begin{aligned} \langle E, \xi_E | \delta^L \phi(x) | E, \xi_E \rangle &= -\varepsilon \frac{i}{\hbar} \sum_n \int d^3x' \left(\langle E, \xi_E | \phi(x) | n \rangle \langle n | J^0(x') | E, \xi_E \rangle - \langle E, \xi_E | J^0(x') | n \rangle \langle n | \phi(x) | E, \xi_E \rangle \right) \\ &= -\varepsilon \frac{i}{\hbar} \sum_n \int d^3x' \left(\langle E, \xi_E | \phi(x) | n \rangle \langle n | J^0(0) | E, \xi_E \rangle e^{i\omega_n t' - i\vec{p}_{n0}\cdot\vec{x}'/\hbar} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\langle E, \xi_E | J^0(0) | n \rangle \langle n | \phi(x) | E, \xi_E \rangle e^{-i\omega_{n0}t' + i\vec{p}_{n0} \cdot \vec{x}'/\hbar} \\
& = -\varepsilon V \frac{i}{\hbar} \sum_n \left(\langle E, \xi_E | \phi(x) | n \rangle \langle n | J^0(0) | E, \xi_E \rangle e^{i\omega_{n0}t'} \delta^3(\vec{p}_{n0}/\hbar) \right. \\
& \quad \left. - \langle E, \xi_E | J^0(0) | n \rangle \langle n | \phi(x) | E, \xi_E \rangle e^{-i\omega_{n0}t'} \delta^3(\vec{p}_{n0}/\hbar) \right)
\end{aligned}$$

(I.193)

\vec{x}' の積分から $\delta^3(\vec{p}_{n0})$ が現れ、縮退した異なる基底状態を結びつける量子の運動量が $\vec{p}_{n0} = 0$ であることが導かれる。式 (I.191) から (I.193) は、 t' に依存しない。そのためには $\omega_{n0} = 0$ でなければならない。即ちこの量子は、運動量ゼロの時、エネルギーがゼロとなる粒子である。このことは、縮退した基底状態間を結びつける量子は質量がゼロで無ければならぬことを示している。言い換えると基底状態が縮退している時、質量ゼロの量子が存在し、その量子が基底状態に占める数に無限の可能性があるため基底状態の縮退が発生する。

以上をまとめると以下のようなになる。変換の母関数 G が保存量である、即ち $dG/dt = 0$ であるが、Goldstone の交換関係がゼロでな有限な値を取る場合を考える。この時、励起エネルギーがゼロ即ち質量ゼロで $\vec{k} = 0$ のボソン量子が素励起として現れる。言い換えると励起エネルギーゼロの素励起が現れることで基底状態の無限の縮退が可能となる。これが Goldstone の定理であり、現れた素励起を Nambu-Goldstone boson と呼ぶ。基底状態が、ある変換に対して不変でなくなったとき、系の対称性が自発的に破れたと表現される。一方、保存則は保たれる。

具体例としてシュレディンガー場で表される自由なボーズ粒子系を扱う。この場は以下の方程式を満たす。

$$i\hbar\partial_t\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x), \quad (\text{I.194})$$

$$-i\hbar\partial_t\psi^\dagger(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^\dagger(x), \quad (\text{I.195})$$

これらからの以下の保存則を得る。

$$\partial_t J^0(x) + \partial_i J^i(x) = 0, \quad (\text{I.196})$$

$$J^0 = i\hbar(\psi(x) - \psi^\dagger(x)), \quad (\text{I.197})$$

$$J^i(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \partial_i(\psi(x) + \psi^\dagger(x)), \quad (\text{I.198})$$

方程式 (I.194),(I.195) および保存量 J^0, J^i は、任意の実数 ε を用いて

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x) + \varepsilon, \quad (\text{I.199})$$

$$\psi^\dagger(x) \rightarrow \psi^\dagger(x) + \varepsilon, \quad (\text{I.200})$$

なる変換に対して不変である。この変換の母関数

$$G = \int d^3x J^0(x), \quad (\text{I.201})$$

と場の量の交換関係

$$[\psi(\vec{x}, t), \psi^\dagger(\vec{x}', t)] = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (\text{I.202})$$

$$[\psi(\vec{x}, t), \psi(\vec{x}', t)] = [\psi^\dagger(\vec{x}, t), \psi^\dagger(\vec{x}', t)] = 0, \quad (\text{I.203})$$

を用いると母関数と場の量の以下の交換関係を得る。

$$[\psi(\vec{x}, t), G(t)] = i\hbar \int d^3x' (-\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')) = -i\hbar, \quad (\text{I.204})$$

$$[\psi^\dagger(\vec{x}, t), G(t)] = -i\hbar. \quad (\text{I.205})$$

この結果と Baker-Hausdorff の関係を用いると

$$\begin{aligned} e^{-i\varepsilon G/\hbar} \psi(x) e^{i\varepsilon G/\hbar} &= \psi(x) - i\varepsilon/\hbar [G(t), \psi(x)] + \frac{1}{2!} (-i\varepsilon/\hbar)^2 [G(t), [G(t), \psi(x)]] + \dots, \\ &= \psi(x) - i\varepsilon/\hbar (i\hbar) = \psi(x) + \varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{I.206})$$

を得て、確かに変換 (I.199) を得る。 $\psi^\dagger(x)$ に対しても同様に (I.200) を示すことができる。シュレディンガー場のハミルトニアンは

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3x \vec{\nabla} \psi^\dagger(x) \cdot \vec{\nabla} \psi(x), \quad (\text{I.207})$$

$$(\text{I.208})$$

で与えられる。これを用いると確かにハイゼンベルグの運動方程式から

$$i\hbar \partial_t \psi(x) = [\psi(\vec{x}, t), H(t)] = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3x' \vec{\nabla}' [\psi(\vec{x}, t), \psi^\dagger(\vec{x}', t)] \cdot \vec{\nabla}' \psi(\vec{x}', t),$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3x' \vec{\nabla}' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \psi(\vec{x}', t), \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x),
\end{aligned} \tag{I.209}$$

のようにシュレディンガー場が満たす方程式 (I.194) を得る。変換の母関数とハミルトニアンとの交換関係は以下のように

$$\begin{aligned}
[G(t), H] &= i\hbar \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3x' \int d^3x ([\psi(\vec{x}', t), \vec{\nabla} \psi^\dagger(\vec{x}, t)] \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t) - \vec{\nabla} \psi^\dagger(\vec{x}, t) \cdot [\psi^\dagger(\vec{x}', t), \vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t)]), \\
&= i\hbar \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3x (-\nabla^2 \psi(x) - \nabla^2 \psi^\dagger(x)), \\
&= i\hbar \int d^3x i\hbar (\partial_t \psi(x) - \partial_t \psi^\dagger(x)) = i\hbar \int d^3x \partial_t J^0(x), \\
&= -i\hbar \int d^3x \partial_t J^i(x) = 0.
\end{aligned} \tag{I.210}$$

となる。ここで保存則 (I.196) が成り立ち、境界での表面積分がゼロになることを使った。即ち、考えている領域内で G が保存する時、母関数とハミルトニアンが交換する。場のフーリエ積分表示は生成消滅演算子を用いて以下のように書ける。

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i\omega_k t}, \tag{I.211}$$

$$\psi^\dagger(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{i\omega_k t}. \tag{I.212}$$

これらの交換関係は

$$[\psi(\vec{x}, t), \psi^\dagger(\vec{x}', t)] = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \tag{I.213}$$

となり要求される交換関係式を満たす。表式 (I.211), (I.212) を代入するとハミルトニアンと母関数はそれぞれ以下ようになる。

$$H = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}, \tag{I.214}$$

$$G = \frac{i\hbar}{\sqrt{V}} \int d^3x \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}),$$

$$\begin{aligned}
&= i\hbar\sqrt{V}\sum_{\vec{k}}(a_{\vec{k}}\delta_{\vec{k},0} - a_{\vec{k}}^\dagger\delta_{\vec{k},0}), \\
&= i\hbar\sqrt{V}(a_0 - a_0^\dagger). \tag{I.215}
\end{aligned}$$

これからハミルトニアンには $\vec{k}=0$ のモードの寄与は無い。一方、母関数は $\vec{k}=0$ のモードのみが寄与している。したがって、 $[G,H]=0$ となるのは当然である。

任意の \vec{k} に対して以下の式を満たす真空状態を定義する。

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0. \tag{I.216}$$

$\vec{k}=0$ つまり基底状態に粒子が n_0 個詰まった状態は以下のように書ける。

$$|0, n_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_0!}}(a_0^\dagger)^{n_0}|0\rangle. \tag{I.217}$$

この状態は任意の正の整数 n_0 に対してエネルギー固有値 0 の基底状態を表す。即ち基底状態に無限の縮退が存在する例である。交換関係式 (I.204) より $\delta^L\psi(x)$ の真空期待値は $-i\hbar$ となり有限の値を取る。この変換により基底状態 (真空) は以下のようにコヒーレント状態に変換される。

$$\begin{aligned}
|0'\rangle &= e^{iG}|0\rangle = e^{-\hbar\sqrt{V}(a_0 - a_0^\dagger)}|0\rangle, \\
&= e^{-\hbar^2 V/2} \sum_{n_0} \frac{(\hbar\sqrt{V})^{n_0}}{\sqrt{n_0!}} |0, n_0\rangle. \tag{I.218}
\end{aligned}$$

a_0^\dagger で励起される量子が Goldstone ボソンである。変換後の基底状態は、Goldstone ボソンがポアソン分布した状態である。対称性の破れが起きた後の基底状態 (I.218) の元の基底状態 $|0, n_0\rangle$ での展開係数は、 $V \rightarrow \infty$ の極限で 0 になる。即ち体積無限大の極限では、対称性の破れ後の基底状態は $|0, n_0\rangle$ が張るフォック空間の基底の線型結合で表せなくなる。つまり対称性の破れ後の基底状態と $|0, n_0\rangle$ のそれぞれが張るフォック空間が互いに全く独立な世界を表現することになる。言い換えるとこの結果は、基底状態の選択を系の対称性に依じて適切に行わなければならない可能性があることを示唆している。

1.8 超流動

1.9 超伝導

金属中の自由電子の系の極低温での状態を扱う。金属中の自由電子のハミルトニアンは以下のように書けるだろう。

$$H_0 = \int d^3x \left(\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} \varphi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \cdot \vec{\nabla} \varphi_{\uparrow}(x) + \vec{\nabla} \varphi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \cdot \vec{\nabla} \varphi_{\downarrow}(x)) - \mu (\varphi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \varphi_{\uparrow}(x) + \varphi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \varphi_{\downarrow}(x)) \right). \quad (\text{I.219})$$

ここで $\varphi_{\uparrow}, \varphi_{\downarrow}$ はそれぞれ上向きスピン、下向きスピン電子を表す場である。金属中の電子は、金属中の自由電子との相互作用と金属中のイオンとの相互作用を受ける。電子同士の相互作用は、斥力として働く。金属イオンとの相互作用には二種類ある。一つは、イオンの熱的振動による電子の散乱で、これは電気抵抗の原因となる。一方、正の電荷を持つイオンは、負の電荷を持つ電子にクーロン力によって引きつけられる。この結果生じた正電荷分布の偏りは、他の電子を引きつける。即ち電子が、そのクーロン力でイオンを引きつけ作った正電荷分布の偏りが、他の電子を引きつける引力として働くことになるのである。電子が indistinguishable なフェルミ粒子であることから 2 電子系の状態関数は、スピンの入れ替えに対して反対称なスピン一重項に二つの電子の位置の入れ替えに対して対称な位置に依存する波動関数を掛け合わせた、スピン一重項状態関数と、スピンの入れ替えに対して対称なスピン三重項に二つの電子の位置の入れ替えに対して反対称な位置に依存する波動関数を掛け合わせたスピン三重項状態関数の二種類がある。スピン三重項状態関数では、電子間に排他原理由来の交換力が働きお互いを遠ざけあう。一方スピン一重項状態関数では、交換力が働かない。そこで以下では、二つの電子が引き合う上で有利な、スピン一重項状態関数のみが超伝導現象に関わる相互作用に現れるとする。すると相互作用ハミルトニアンは以下のようにかける。

$$H_1 = -\frac{g}{2} \int d^3x [\varphi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \varphi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \varphi_{\downarrow}(x) \varphi_{\uparrow}(x) + \varphi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \varphi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \varphi_{\uparrow}(x) \varphi_{\downarrow}(x)] \quad (\text{I.220})$$

ここで結合定数 g には、電子間に働くクーロン力の効果とイオンを介した電子間相互作用が取り込まれているとし、 $g > 0$ とすることで正味電子間には引力が働いていることになる。

電子のフェルミ粒子性から電子場 $\varphi_l(x)$ は以下の反交換関係式を満たす。

$$\{\varphi_l(\vec{x}, t), \varphi_{l'}^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta_{l,l'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (\text{I.221})$$

$$\{\varphi_l(\vec{x}, t), \varphi_{l'}(\vec{x}', t)\} = 0. \quad (\text{I.222})$$

ハイゼンベルグの運動方程式から電子場の時間発展を与える以下の方程式をえる。

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \varphi_l(x) &= [\varphi_l(x), H], \\ [\varphi_l(x), H_0] &= \sum_{l'} \int d^3x' \left[\frac{\hbar^2}{2m} (\varphi_l(x) \vec{\nabla} \varphi_{l'}^\dagger(x') \cdot \vec{\nabla} \varphi_{l'}(x') - \vec{\nabla} \varphi_{l'}^\dagger(x') \cdot \vec{\nabla} \varphi_{l'}(x') \varphi_l(x)) \right. \\ &\quad \left. - \mu (\varphi_l(x) \varphi_{l'}^\dagger(x') \varphi_{l'}(x') - \varphi_{l'}^\dagger(x') \varphi_{l'}(x') \varphi_l(x)) \right] \\ &= \sum_{l'} \int d^3x' \left[\frac{\hbar^2}{2m} (\varphi_l(x) \partial_{l'} \varphi_{l'}^\dagger(x') \partial^{l'} \varphi_{l'}(x') + \partial_{l'} \varphi_{l'}^\dagger(x') \varphi_l(x) \partial^{l'} \varphi_{l'}(x')) \right. \\ &\quad \left. - \mu (\varphi_l(x) \varphi_{l'}^\dagger(x') \varphi_{l'}(x') + \varphi_{l'}^\dagger(x') \varphi_l(x) \varphi_{l'}(x')) \right] \\ &= \int d^3x' \left[\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{l'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \partial^{l'} \varphi_l(x') - \mu \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \varphi_l(x') \right] \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi_l(x) - \mu \varphi_l(x). \\ [\varphi_l(x), H_1] &= -\frac{g}{2} \sum_{l' \neq l''} \int d^3x' (\varphi_l(x) \varphi_{l'}^\dagger(x') \varphi_{l''}^\dagger(x') \varphi_{l''}(x') \varphi_{l'}(x') - \varphi_{l'}^\dagger(x') \varphi_{l''}^\dagger(x') \varphi_{l''}(x') \varphi_{l'}(x') \varphi_l(x)) \\ &= -\frac{g}{2} \int d^3x' (\varphi_l(x) \varphi_l^\dagger(x') \varphi_{l''}^\dagger(x') \varphi_{l''}(x') \varphi_l(x') + \varphi_l^\dagger(x') \varphi_l(x) \varphi_{l''}^\dagger(x') \varphi_{l''}(x') \varphi_l(x')) \\ &\quad - \varphi_l(x) \varphi_l^\dagger(x') \varphi_{l'}^\dagger(x') \varphi_{l'}(x') \varphi_{l''}(x') - \varphi_{l'}^\dagger(x') \varphi_l(x) \varphi_{l'}^\dagger(x') \varphi_{l'}(x') \varphi_{l''}(x') \\ &= -\frac{g}{2} (\varphi_{l'}^\dagger(x) \varphi_{l'}(x) \varphi_l(x) - \varphi_{l'}^\dagger(x) \varphi_l(x) \varphi_{l'}(x)) \\ &= -g \varphi_{l'}^\dagger(x) \varphi_{l'}(x) \varphi_l(x), \\ i\hbar \partial_t \varphi_l(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi_l(x) - \mu \varphi_l(x) - g \varphi_{l'}^\dagger(x) \varphi_{l'}(x) \varphi_l(x), \quad (\text{I.223}) \end{aligned}$$

ここで $l' \neq l$ 。両辺のエルミート共役を取ることで以下の方程式を得る。

$$-i\hbar\partial_t\varphi_l^\dagger(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi_l^\dagger(x) - \mu\varphi_l^\dagger(x) - g\varphi_l^\dagger(x)\varphi_{l'}^\dagger(x)\varphi_{l'}(x). \quad (\text{I.224})$$

方程式 (I.223) の左から $\varphi_l^\dagger(x)$ を掛けて、方程式 (I.224) の右から $\varphi_l(x)$ を掛けて互いに差を取ると以下の連続の式を得る。

$$i\hbar\partial_t(\varphi_l^\dagger(x)\varphi_l(x)) = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\cdot(\varphi_l^\dagger(x)\vec{\nabla}\varphi_l(x) - \vec{\nabla}\varphi_l^\dagger(x)\varphi_l(x)),$$

$$\partial_t j_0(x) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(x) = 0, \quad (\text{I.225})$$

$$j_0(x) \equiv \sum_l \varphi_l^\dagger(x)\varphi_l(x), \quad (\text{I.226})$$

$$\vec{j}(x) \equiv -i\frac{\hbar}{2m}\sum_l(\varphi_l^\dagger(x)\vec{\nabla}\varphi_l(x) - \vec{\nabla}\varphi_l^\dagger(x)\varphi_l(x)). \quad (\text{I.227})$$

$$(\text{I.228})$$

j_0 は、粒子数演算子なので、この式は粒子数保存を表している。粒子数保存は、位相変換に対するハミルトニアンの不変性と直接結びついていることを以下に示す。

$$\varphi_l'(x) = e^{i\alpha}\varphi_l(x), \quad (\text{I.229})$$

$$\varphi_l'^\dagger(x) = \varphi_l^\dagger(x)e^{-i\alpha}. \quad (\text{I.230})$$

この変換に対してハミルトニアン $H_0 + H_1$ および方程式 (I.223)、(I.224) が不変であることは自明である。 $\alpha \ll 1$ の微小変換の時、

$$\delta^L\varphi_l(x) \sim i\alpha\varphi_l(x), \quad (\text{I.231})$$

$$\delta x^0 = 0, \quad (\text{I.232})$$

となりネーターカレントの第ゼロ成分 (I.158) が以下ようになる。

$$j^0(x) = i\alpha\sum_l\pi_l(x)\varphi_l(x). \quad (\text{I.233})$$

ここで

$$\{\varphi_l(\vec{x}, t), \pi_{l'}(\vec{x}', t)\} = i\hbar\delta_{l,l'}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (\text{I.234})$$

より

$$\pi_l(x) = i\hbar\varphi_l^\dagger(x), \quad (\text{I.235})$$

である。以上から位相変換に対する系の不変性が粒子保存と直結していることが証明された。位相変換の母関数は以下ようになる。

$$G = -\alpha\hbar \int d^3x \sum_l \varphi_l^\dagger(x) \varphi_l(x). \quad (\text{I.236})$$

これから

$$i\hbar\delta^L \varphi_l(x) = [\varphi_l(x), G] = -\alpha\hbar \varphi_l(x), \quad (\text{I.237})$$

$$-i\hbar\delta^L \varphi_l^\dagger(x) = [\varphi_l^\dagger(x), G] = \alpha\hbar \varphi_l^\dagger(x). \quad (\text{I.238})$$

電子場 $\varphi_l(x)$ を以下の同時刻反交換関係を満たす演算子

$$\{C_{\vec{k},l}(t), C_{\vec{k}',l'}^\dagger(t)\} = \delta_{l,l'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'}, \quad (\text{I.239})$$

を用いて以下のようにかける。ここで $l, l' = \uparrow \text{ or } \downarrow$ である。

$$\varphi_l(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} C_{\vec{k},l}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (\text{I.240})$$

これを用いると母関数 (I.236) は以下のように書ける。

$$G = -\alpha\hbar \sum_l \sum_{\vec{k}} C_{\vec{k},l}^\dagger(t) C_{\vec{k},l}(t). \quad (\text{I.241})$$

確かに全粒子数を導出する演算子であることが分かる。

I.9.1 Fermi 縮退、Fermi 基底状態

金属中の自由電子の基底状態は、超伝導転移を無視すると極低温の極限では金属中の電子はフェルミ波数

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} = 4 \times 10^7. \quad (\text{I.242})$$

フェルミエネルギー

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = 0.66 \text{eV}, \quad (\text{I.243})$$

以下の準位を全てビッシリ詰めた状態である。これが金属中の自由電子の基底状態であり、ここでは簡単のために $|0\rangle$ で表す。これを Fermi 基底状態と呼ぶことにする。ここで $n_e = 6 \times 10^{22} \text{cm}^{-3}$ とした。この値は、アルミ中

のすべての原子から一つずつ電子が剥ぎ取られたとした時の値である。金属中の自由電子のハミルトニアン (I.219) の化学ポテンシャル μ が掛かった項は自由電子数を表す演算子であり基底状態に作用すると金属中の全自由電子数が現れる。したがって、 $\mu = \varepsilon_F$ とすれば、このハミルトニアンは、基底状態をエネルギーゼロに取り直したものであることが分かる。電子場を $\varphi_l(x)$ 式 (I.240) を用いて表すと、自由電子のハミルトニアンは以下のように書ける。

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} \sum_l (\varepsilon(k) - \varepsilon_F) C_{\vec{k},l}^\dagger C_{\vec{k},l}, \quad (\text{I.244})$$

$$\varepsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (\text{I.245})$$

$$E_k = \varepsilon(k) - \varepsilon_F. \quad (\text{I.246})$$

ここで $k \geq k_F$ の時、 $E_k \geq 0$ とゼロ以上の値を取るが、 $k < k_F$ の時 $E_k < 0$ となり負のエネルギーを取る。この事を意識して式 (I.240) を書き換える。

$$\begin{aligned} \varphi_l(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\sum_{\vec{k}(k \geq k_F)} C_{\vec{k},l} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - iE_k t/\hbar} + \sum_{\vec{k}(k < k_F)} C_{\vec{k},l} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} + i|E_k|t/\hbar} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\sum_{\vec{k}(k \geq k_F)} C_{\vec{k},l} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - iE_k t/\hbar} + \sum_{\vec{k}(k < k_F)} C_{-\vec{k},l} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i|E_k|t/\hbar} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.247})$$

最後の等号では、 $-\vec{k}$ の方向に進行するエネルギー $|E_k|$ の粒子が生成されたとする見方に変えるための変形を施した。ここで $E_k < 0$ の電子を $C_{\vec{k},l}$ により消滅させることは、物理的には Fermi 面以下に詰まっていた電子を一つ取り除くことに対応しており、正の電荷を持つエネルギー $|E_k|$ の粒子（正孔 ホール）が生成されたと解釈することができる。また運動量 $\hbar\vec{k}$ のフェルミ面以下の電子を取り除くことは、運動量 $-\hbar\vec{k}$ の粒子をホールを生成することと等価である。そこで以下の置き換えを行う。

$$D_{-\vec{k},l}^\dagger = C_{\vec{k},l}, \quad \text{for } k < k_F, \quad (\text{I.248})$$

$$D_{-\vec{k},l} = C_{\vec{k},l}^\dagger, \quad \text{for } k < k_F, \quad (\text{I.249})$$

ここで D, D^\dagger は $k < k_F$ を満たすホールの生成消滅演算子で、 C, C^\dagger も $k \geq k_F$ の電子の生成消滅演算子で以下の式を満たすものと再定義する。また $l = \uparrow$

の時 $l' = \downarrow$, $l = \downarrow$ のとき $l' = \uparrow$ のように生成（消滅）されるホールは、消滅（生成）した電子と逆のスピンを持つ。

$$C_{\vec{k},l} |0\rangle = 0, \quad (\text{I.250})$$

$$D_{\vec{k},l'} |0\rangle = 0. \quad (\text{I.251})$$

この置き換えにより場の量およびハミルトニアンは以下のように書き換えられる。

$$\varphi_l(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\sum_{\vec{k}(k \geq k_F)} C_{\vec{k},l} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - iE_k t/\hbar} + \sum_{\vec{k}(k < k_F)} D_{\vec{k},l'}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i|E_k|t/\hbar} \right), \quad (\text{I.252})$$

$$H_0 = \sum_{\vec{k}(k \geq k_F)} \sum_l E_k C_{\vec{k},l}^\dagger C_{\vec{k},l} + \sum_{\vec{k}(k < k_F)} \sum_{l'} |E_k| (D_{\vec{k},l'}^\dagger D_{\vec{k},l'} - 1). \quad (\text{I.253})$$

以下では、ゼロ点振動を無視する。

I.9.2 南部表示

超伝導転移に伴う対称性の自発的破れがどのように起きているかを見るために金属中の自由電子場を以下のような定式化で表現する。南部表示と呼ばれる以下の表現を定義する。

$$\phi(x) \equiv \begin{pmatrix} \varphi_\uparrow(x) \\ \varphi_\downarrow^\dagger(x) \end{pmatrix}. \quad (\text{I.254})$$

パウリのスピン行列を用いると場同士の掛け算について以下の関係式を得る。

$$\varphi_\downarrow \varphi_\uparrow = \phi^\dagger \sigma_- \phi, \quad (\text{I.255})$$

$$\varphi_\uparrow^\dagger \varphi_\downarrow^\dagger = \phi^\dagger \sigma_+ \phi, \quad (\text{I.256})$$

$$\varphi_\uparrow^\dagger \varphi_\uparrow = \frac{1}{2} \phi^\dagger (1 + \sigma_3) \phi, \quad (\text{I.257})$$

$$\varphi_\downarrow \varphi_\downarrow^\dagger = \frac{1}{2} \phi^\dagger (1 - \sigma_3) \phi. \quad (\text{I.258})$$

ここで

$$\sigma_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2), \quad (\text{I.259})$$

であり、スピンの向きの昇降演算子である。方程式 (I.223),(I.224) より

$$\left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \varepsilon_F \right) \varphi_{\uparrow} = -g\varphi_{\downarrow}^{\dagger}\varphi_{\downarrow}\varphi_{\uparrow}, \quad (\text{I.260})$$

$$\left(-i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \varepsilon_F \right) \varphi_{\downarrow}^{\dagger} = g\varphi_{\uparrow}^{\dagger}\varphi_{\downarrow}^{\dagger}\varphi_{\uparrow}, \quad (\text{I.261})$$

となる。これらは以下の形にまとめられる。

$$\begin{aligned} \left(i\hbar\sigma_3\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \varepsilon_F \right) \phi(x) &= -g\sigma_+\phi(x)(\phi^{\dagger}(x)\sigma_-\phi(x)) + g(\phi^{\dagger}(x)\sigma_+\phi(x))\sigma_-\phi(x) \\ &= -\frac{g}{2} \left(\sigma_+\phi(\phi^{\dagger}\sigma_1\phi) - (\phi^{\dagger}\sigma_1\phi)\sigma_-\phi \right) \\ &\quad + i\frac{g}{2} \left(\sigma_+\phi(\phi^{\dagger}\sigma_2\phi) + (\phi^{\dagger}\sigma_2\phi)\sigma_-\phi \right). \end{aligned} \quad (\text{I.262})$$

位相変換 (I.229),(I.230) を南部表示を用いてまとめると以下のように書ける。

$$\phi'(x) = e^{i\sigma_3\alpha}\phi(x). \quad (\text{I.263})$$

二成分スピノールの変換則 (G.63) と比較すると位相変換に対する南部表示の変換則は仮想空間に於ける第三軸の周りの回転と解釈することができる。南部表示の各成分が満たす方程式が位相変換に対して不変であることから、変換 (I.263) に対して、方程式 (I.262) が不変であることは自明である。後の議論にも有益なので、このことを具体的に示しておく。まず以下の量を Backer-Hausdolf を用いて計算しておく。

$$\begin{aligned} e^{i\sigma_3\alpha}\sigma_1e^{-i\sigma_3\alpha} &= \sigma_1 + (i\alpha)[\sigma_3, \sigma_1] + \frac{(i\alpha)^2}{2!}[\sigma_3, [\sigma_3, \sigma_1]] + \frac{(i\alpha)^3}{3!}[\sigma_3, [\sigma_3, [\sigma_3, \sigma_1]]], \dots \\ &= \sigma_1 \left(1 - \frac{(2\alpha)^2}{2!} + \dots \right) - \sigma_2 \left(2\alpha - \frac{(2\alpha)^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \cos 2\alpha\sigma_1 - \sin 2\alpha\sigma_2, \end{aligned} \quad (\text{I.264})$$

$$e^{i\sigma_3\alpha}\sigma_2e^{-i\sigma_3\alpha} = \sigma_2 + (i\alpha)[\sigma_3, \sigma_2] + \frac{(i\alpha)^2}{2!}[\sigma_3, [\sigma_3, \sigma_2]] + \frac{(i\alpha)^3}{3!}[\sigma_3, [\sigma_3, [\sigma_3, \sigma_2]]], \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_2 \left(1 - \frac{(2\alpha)^2}{2!} +, \dots \right) + \sigma_1 \left(2\alpha - \frac{(2\alpha)^3}{3!}, \dots \right) \\
&= \sin 2\alpha \sigma_1 + \cos 2\alpha \sigma_2,
\end{aligned} \tag{I.265}$$

保存カレントを南部表示で書くと以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
j_0(x) &= \varphi_\uparrow^\dagger \varphi_\uparrow + \varphi_\downarrow^\dagger \varphi_\downarrow = \varphi_\uparrow^\dagger \varphi_\uparrow - \varphi_\downarrow \varphi_\downarrow^\dagger \\
&= \phi^\dagger(x) \sigma_3 \phi(x),
\end{aligned} \tag{I.266}$$

$$\begin{aligned}
\vec{j}(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m} (\varphi_\uparrow^\dagger \vec{\nabla} \varphi_\uparrow + \varphi_\downarrow^\dagger \vec{\nabla} \varphi_\downarrow - \vec{\nabla} \varphi_\uparrow^\dagger \varphi_\uparrow - \vec{\nabla} \varphi_\downarrow^\dagger \varphi_\downarrow), \\
&= -i \frac{\hbar}{2m} (\phi^\dagger(x) \vec{\nabla} \phi(x) - \vec{\nabla} \phi^\dagger(x) \phi(x)).
\end{aligned} \tag{I.267}$$

したがって、南部表示での位相変換の母関数は以下のようなになる。

$$G = \int d^3x \phi^\dagger(x) \sigma_3 \phi(x). \tag{I.268}$$

南部表示の場の量が満たす方程式 (I.262) の右辺相互作用項に現れる $\phi^\dagger \sigma_1 \phi, \phi^\dagger \sigma_2 \phi, j_0$ が南部表示の位相変換を座標回転に対応させるときに導入した仮想空間の第一軸、第二軸、第三軸の3次元空間を張ると考えるのは妥当な拡張である。すると位相変換は、これらが張る仮想三次元空間内での第三軸の周りの角度 2α の回転と考えることができる。これらの量の交換関係は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
[\phi^\dagger(x) \sigma_3 \phi(x), \phi^\dagger(x') \sigma_2 \phi(x')]_{t'=t} &= (\varphi_\uparrow^\dagger(x) \varphi_\uparrow(x) - \varphi_\downarrow(x) \varphi_\downarrow^\dagger(x)) (-i \varphi_\uparrow^\dagger(x') \varphi_\downarrow^\dagger(x') + i \varphi_\downarrow(x') \varphi_\uparrow(x')) \\
&\quad - (-i \varphi_\uparrow^\dagger(x') \varphi_\downarrow^\dagger(x') + i \varphi_\downarrow(x') \varphi_\uparrow(x')) (\varphi_\uparrow^\dagger(x) \varphi_\uparrow(x) - \varphi_\downarrow(x) \varphi_\downarrow^\dagger(x)) \\
&= -2i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \varphi_\uparrow^\dagger(x) \varphi_\downarrow^\dagger(x) - 2i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \varphi_\downarrow(x) \varphi_\uparrow(x) \\
&= -2i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \phi^\dagger(x) \sigma_1 \phi(x).
\end{aligned} \tag{I.269}$$

$$\begin{aligned}
[\phi^\dagger(x) \sigma_3 \phi(x), \phi^\dagger(x') \sigma_1 \phi(x')]_{t'=t} &= (\varphi_\uparrow^\dagger(x) \varphi_\uparrow(x) - \varphi_\downarrow(x) \varphi_\downarrow^\dagger(x)) (\varphi_\uparrow^\dagger(x') \varphi_\downarrow^\dagger(x') + \varphi_\downarrow(x') \varphi_\uparrow(x')) \\
&\quad - (\varphi_\uparrow^\dagger(x') \varphi_\downarrow^\dagger(x') + \varphi_\downarrow(x') \varphi_\uparrow(x')) (\varphi_\uparrow^\dagger(x) \varphi_\uparrow(x) - \varphi_\downarrow(x) \varphi_\downarrow^\dagger(x)) \\
&= 2\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \varphi_\uparrow^\dagger(x) \varphi_\downarrow^\dagger(x) - 2\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \varphi_\downarrow(x) \varphi_\uparrow(x) \\
&= 2i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \phi^\dagger(x) \sigma_2 \phi(x).
\end{aligned} \tag{I.270}$$

これらの結果を整理する。上記に現れた物理量を用いて以下の量を定義し

$$j_{0,1}(x) \equiv \phi^\dagger(x) \sigma_1 \phi(x), \tag{I.271}$$

$$j_{0,2}(x) \equiv \phi^\dagger(x) \sigma_2 \phi(x), \quad (\text{I.272})$$

$$j_{0,3}(x) \equiv \phi^\dagger(x) \sigma_3 \phi(x), \quad (\text{I.273})$$

これらを成分をとする 3 次元ベクトルを定義する。

$$\vec{j}(x) = (j_{0,1}(x), j_{0,2}(x), j_{0,3}(x)). \quad (\text{I.274})$$

これらは変換 (I.263) に対して以下のように変換を受ける。

$$j_{0,1}(x) = \cos 2\alpha j'_{0,1}(x) - \sin 2\alpha j'_{0,2}(x), \quad (\text{I.275})$$

$$j_{0,2}(x) = \sin 2\alpha j'_{0,1}(x) + \cos 2\alpha j'_{0,2}(x). \quad (\text{I.276})$$

ここで (I.264), (I.265) を用いた。この結果は、位相変換 (I.263) が仮想 3 次元空間内のベクトル $\vec{j}(x)$ を第三軸を軸として角度 2α 回転させる変換に対応していることを示している。各成分は以下の交換関係を満たす。

$$[j_{0,1}(x), j_{0,2}(x')]_{t'=t} = 2i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') j_{0,3}(x), \quad (\text{I.277})$$

$$[j_{0,2}(x), j_{0,3}(x')]_{t'=t} = 2i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') j_{0,1}(x), \quad (\text{I.278})$$

$$[j_{0,3}(x), j_{0,1}(x')]_{t'=t} = 2i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') j_{0,2}(x). \quad (\text{I.279})$$

これらは本質的にパウリのスピン行列の交換関係である。これらを用いて Goldstone の交換関係は以下のように表される。

$$[G(t), j_{0,1}(x)] = 2i j_{0,2}(x), \quad (\text{I.280})$$

$$[G(t), j_{0,2}(x)] = -2i j_{0,1}(x), \quad (\text{I.281})$$

$$[G(t), j_{0,3}(x)] = 0. \quad (\text{I.282})$$

これらの結果も、場の量の位相 α の変換は、ベクトル \vec{j} を仮想空間の第三軸を軸とした角度 2α の回転に対応することを示している。

まずは Goldstone の交換関係がゼロとなる場合について考える。この時、漸近場は以下の方程式に従う。

$$\left(i\hbar\sigma_3\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \varepsilon_F \right) \phi_0^{in}(x) = 0. \quad (\text{I.283})$$

漸近場が式 (I.252) で表されるとして、南部表示の各成分が満たす方程式が以下のように書ける。

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \left[\sum_{\vec{k}, k \geq k_F} \left(E_k - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \varepsilon_F \right) C_{\vec{k}, \uparrow} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - iE_k t / \hbar} \right. \\ \left. + \sum_{\vec{k}, k < k_F} \left(-|E_k| - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \varepsilon_F \right) D_{\vec{k}, \downarrow}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i|E_k| t / \hbar} \right] = 0 \quad (\text{I.284})$$

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \left[\sum_{\vec{k}, k \geq k_F} \left(E_k - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \varepsilon_F \right) C_{\vec{k}, \uparrow}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + iE_k t / \hbar} \right. \\ \left. + \sum_{\vec{k}, k < k_F} \left(-|E_k| - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \varepsilon_F \right) D_{\vec{k}, \downarrow} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i|E_k| t / \hbar} \right] = 0 \quad (\text{I.285})$$

これらの結果は $k \geq k_F$ の Fermi 面より上の準位では、 $C_{\vec{k}, l}, C_{\vec{k}, l}^\dagger$ がエネルギー $E_k = \hbar^2 k^2 / 2m - \varepsilon_F$ でスピン l の電子の消滅生成演算子であり、 $k < k_F$ の Fermi 面より下の準位では、 $D_{\vec{k}, l}, D_{\vec{k}, l}^\dagger$ がエネルギー $E_k = \varepsilon_F - \hbar^2 k^2 / 2m$ でスピン l のホールの消滅生成演算子を表すことを示している。場の位相変換に対する Goldstone の交換関係がゼロの時、漸近場を表す量子は電子とホールである。

次に位相変換に対する Goldstone の交換関係がゼロでない有限の値をとる場合を考える。一般性を失うことなく $\langle 0 | j_{0,1} | 0 \rangle \neq 0, \langle 0 | j_{0,2} | 0 \rangle = 0$ と仮想空間の座標系をとる事ができる。そこで

$$\langle 0 | [G(t), j_{0,1}(x)] | 0 \rangle = 2i \langle 0 | j_{0,2}(x) | 0 \rangle = 0, \quad (\text{I.286})$$

$$\langle 0 | [G(t), j_{0,2}(x)] | 0 \rangle = -2i \langle 0 | j_{0,1}(x) | 0 \rangle = i \frac{4\Delta}{g}. \quad (\text{I.287})$$

のように新しい正のゼロでない実数 Δ を導入して、Goldstone の交換関係の値を表した。一般の場合は、場の量に位相変換 (I.263) を施して、 \vec{j} に仮想空間内で第三軸を軸とした回転を施せば良い。関係式 (I.275), (I.276) から一般の座標系での Goldstone の交換関係式が以下のように求まる。

$$\langle 0 | [G(t), j'_{0,2}(x)] | 0 \rangle = -2i \langle 0 | (\cos 2\alpha j_{0,1}(x) + \sin 2\alpha j_{0,2}(x)) | 0 \rangle \\ = i \frac{4\Delta}{g} \cos 2\alpha, \quad (\text{I.288})$$

$$\begin{aligned}\langle 0|[G(t), j'_{0,1}(x)]|0\rangle &= 2i\langle 0|(-\sin 2\alpha j_{0,1}(x) + \cos 2\alpha j_{0,2}(x))|0\rangle \\ &= i\frac{4\Delta}{g}\sin 2\alpha,\end{aligned}\quad (\text{I.289})$$

相互作用の存在により基底状態の自発的対称性の破れが起きた状態の場の振る舞いを調べる。Fermi 面以下の順位が全て埋まった状態を基底状態とする Fermi 真空 $|0\rangle$ と区別するためこの基底状態を $|BCS\rangle$ と呼ぶことにする。Goldstone の交換関係が (I.289), (I.289) のような値を取ることを意識して方程式 (I.262) を以下のように変形する。

$$\begin{aligned}\left(i\hbar\sigma_3\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \varepsilon_F - i(\sigma_2\cos 2\alpha + \sigma_1\sin 2\alpha)\Delta\right)\phi(x) &= -\frac{g}{2}\left[\sigma_+\phi(x)\left(\phi^\dagger(x)\sigma_1\phi(x) + \frac{2\Delta}{g}\cos 2\alpha\right)\right. \\ &\quad \left.-\left(\phi^\dagger(x)\sigma_1\phi(x) + \frac{2\Delta}{g}\cos 2\alpha\right)\sigma_-\phi\right] \\ &\quad + i\frac{g}{2}\left[\sigma_+\phi(x)\left(\phi^\dagger(x)\sigma_2\phi(x) - \frac{2\Delta}{g}\sin 2\alpha\right)\right. \\ &\quad \left.+\left(\phi^\dagger(x)\sigma_2\phi(x) - \frac{2\Delta}{g}\sin 2\alpha\right)\sigma_-\phi\right] \\ &\equiv J(x).\end{aligned}\quad (\text{I.290})$$

この方程式の右辺を $J(x)$ と定義した。また左辺に現れた以下の因子は

$$-i(\sigma_2\cos 2\alpha + \sigma_1\sin 2\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -e^{2i\alpha} \\ e^{-2i\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.291})$$

である。新たな基底状態周辺の場の振る舞いを扱うことにすると新たに定義された相互作用項の寄与は十分小さいと近似できる。漸近場は以下の方程式を満たすとして良い。

$$\left(i\hbar\sigma_3\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \varepsilon_F - i(\sigma_2\cos 2\alpha + \sigma_1\sin 2\alpha)\Delta\right)\phi^{in}(x) = 0. \quad (\text{I.292})$$

この方程式の二つの固有解を求める。そこで固有モードを

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_k t} \quad (\text{I.293})$$

と置いて方程式 (I.292) に代入する。

$$\begin{pmatrix} \hbar\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \varepsilon_F & -\Delta e^{2i\alpha} \\ \Delta e^{-2i\alpha} & -\hbar\omega - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \varepsilon_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_k t} = 0. \quad (\text{I.294})$$

以下

$$\xi_k \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \varepsilon_F, \quad (\text{I.295})$$

を用いて表す。方程式 (I.294) が自明では無い解を持つのは、固有ベクトルの前に掛かる行列が逆行列を持た無いときである。これから以下の固有値方程式を得る。

$$-(\hbar\omega)^2 + \xi_k^2 + \Delta^2 = 0. \quad (\text{I.296})$$

これより固有値が以下の二つであることが分かる。

$$\begin{aligned} \hbar\omega_k^+ &= E_k, \\ \hbar\omega_k^- &= -E_k, \\ E_k &\equiv \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}. \end{aligned} \quad (\text{I.297})$$

固有値 $+E_k$ に対応する規格化された固有ベクトルは以下のようになる。

$$\vec{u}_k^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{E_k}\right)} \\ \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k}\right)} e^{-2i\alpha} \end{pmatrix} e^{i\theta_k^+} = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k e^{-2i\alpha} \end{pmatrix} e^{i\theta_k^+}. \quad (\text{I.298})$$

ここで θ_k は固有ベクトルの各成分に位相の不定性があることを反映して導入した位相因子であり、 u_k, v_k は実数値を取る。固有値 $-E_k$ に対応する規格化された固有ベクトルは以下のようになる。

$$\vec{u}_k^- = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k}\right)} \\ -\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{E_k}\right)} e^{-2i\alpha} \end{pmatrix} e^{i\theta_k^-} = \begin{pmatrix} v_k \\ -u_k e^{-2i\alpha} \end{pmatrix} e^{i\theta_k^-}. \quad (\text{I.299})$$

ベクトルの内積は、片方のエルミート共役との積で定義する。一般の固有ベクトルは、様々な位相の固有ベクトルの重ね合わせであるが以下では簡単のため位相が $\alpha, \theta_k^+ = 0, \theta_k^- = 2\alpha$ で固定された状態を扱う。このように位相を固定して扱う表示を位相表示と呼ぶ。式 (I.240) のように電子の消滅演算子で電子場を展開した時の南部表示の電子場をこれら固有ベクトルで展開

すると以下ようになる。以下では、 $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ の係数のみ取り出して比較する。

$$\begin{pmatrix} C_{\vec{k},\uparrow}(t) \\ C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger(t) \end{pmatrix} = \alpha_{\vec{k},\uparrow}(t) \vec{u}_{\vec{k}}^+ e^{-i\omega_k t} - \alpha_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger(t) \vec{u}_{\vec{k}}^- e^{i\omega_k t}. \quad (\text{I.300})$$

ここで固有関数 $\vec{u}_{\vec{k}}^+$ の展開係数を $\alpha_{\vec{k}}$ としたのは、この固有関数が表すモードが $C_{\vec{k},\uparrow}$ と同じ正のエネルギーを持った運動量 $\hbar\vec{k}$ スピン上向きのモードであるからである。一方、固有関数 $\vec{u}_{\vec{k}}^-$ の展開係数を $\alpha_{-\vec{k},\downarrow}$ としたのは、この固有関数がエネルギー $-\hbar\omega_k$ を持ち運動量 $-\vec{k}$ 、スピン上向きのモードを表しており、このモードを消滅することは正のエネルギー $\hbar\omega_k$ を持ち運動量 $-\hbar\vec{k}$ 、スピン下向きのモードを生成することと等価であることを意識した結果である。この選択が正しい選択であることを後ほど漸近場のハミルトニアンをこれらの演算子で書き下して見る事が確かめる。式 (I.300) から以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} C_{\vec{k},\uparrow} &= u_k \alpha_{\vec{k},\uparrow} e^{-i\omega_k t} - v_k e^{2i\alpha} \alpha_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger e^{i\omega_k t}, \\ C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger &= v_k e^{-2i\alpha} \alpha_{\vec{k},\uparrow} e^{-i\omega_k t} + u_k \alpha_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger e^{i\omega_k t}, \end{aligned} \quad (\text{I.301})$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\vec{k},\uparrow}(t) &= [u_k C_{\vec{k},\uparrow}(t) + v_k e^{2i\alpha} C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger(t)] e^{i\omega_k t}, \\ \alpha_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger(t) &= [-v_k e^{-2i\alpha} C_{\vec{k},\uparrow}(t) + u_k C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger(t)] e^{-i\omega_k t}, \end{aligned} \quad (\text{I.302})$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\vec{k},\uparrow}^\dagger(t) &= [u_k C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger(t) + v_k e^{-2i\alpha} C_{-\vec{k},\downarrow}(t)] e^{-i\omega_k t}, \\ \alpha_{-\vec{k},\downarrow}(t) &= [-v_k e^{2i\alpha} C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger(t) + u_k C_{-\vec{k},\downarrow}(t)] e^{i\omega_k t}. \end{aligned} \quad (\text{I.303})$$

固有ベクトルで電子の生成消滅演算子を展開した時の展開係数間の反交換関係を求める。

$$\begin{aligned} \{\alpha_{\vec{k},\uparrow}(t), \alpha_{\vec{k}',\uparrow}^\dagger(t)\} &= (u_k^2 \{C_{\vec{k},\uparrow}(t), C_{\vec{k}',\uparrow}^\dagger(t)\} + v_k^2 \{C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger(t), C_{-\vec{k}',\downarrow}(t)\}) e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} \\ &= (u_k^2 + v_k^2) \delta_{\vec{k},\vec{k}'} = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}, \end{aligned} \quad (\text{I.304})$$

$$\{\alpha_{\vec{k},\uparrow}(t), \alpha_{\vec{k}',\uparrow}(t)\} = 0, \quad (\text{I.305})$$

$$\{\alpha_{\vec{k},\uparrow}(t), \alpha_{-\vec{k}',\downarrow}^\dagger(t)\} = 0, \quad (\text{I.306})$$

$$\{\alpha_{\vec{k},\uparrow}(t), \alpha_{-\vec{k}',\downarrow}(t)\} = 0, \quad (\text{I.307})$$

$$\{\alpha_{\vec{k},\uparrow}^\dagger(t), \alpha_{\vec{k}',\uparrow}^\dagger(t)\} = 0, \quad (\text{I.308})$$

$$\begin{aligned} \{\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger(t), \alpha_{-\vec{k}',\downarrow}^\dagger(t)\} &= (v_k^2 \{C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger(t), C_{\vec{k}',\uparrow}^\dagger(t)\} + u_k^2 \{C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger(t), C_{-\vec{k}',\downarrow}^\dagger(t)\}) e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t} \\ &= (u_k^2 + v_k^2) \delta_{\vec{k},\vec{k}'} = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}, \end{aligned} \quad (\text{I.309})$$

$$\{\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger(t), \alpha_{-\vec{k}',\downarrow}^\dagger(t)\} = 0, \quad (\text{I.310})$$

$$\{\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger(t), \alpha_{-\vec{k}',\downarrow}^\dagger(t)\} = 0. \quad (\text{I.311})$$

このように $\alpha_{\vec{k},l}$ はフェルミ粒子と同じ反交換関係を満たす。

演算子 $\alpha_{\text{veck},l}$ の物理的性質をさらに調べるため漸近場のハミルトニアンをこの演算子を用いて表す。漸近場の満たす方程式 (I.292) をハイゼンベルグの方程式から導出できるハミルトニアンを導出する。そこで方程式 (I.292) に左から σ_3 をかける。ここでは簡単の為に位相 $\alpha = 0$ とした。

$$i\hbar \partial_t \phi^{in}(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sigma_3 \nabla^2 - \varepsilon_F \sigma_3 + i\sigma_3 (\sigma_2 \cos 2\alpha + \sigma_1 \sin 2\alpha) \Delta \right) \phi^{in}(x). \quad (\text{I.312})$$

これからハミルトニアンが以下のものであれば良いことがわかる。

$$\begin{aligned} H_{in} &= \int d^3x \left(\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \phi^{in\dagger}(x) \sigma_3 \vec{\nabla} \phi^{in}(x) - \varepsilon_F \phi^{in\dagger}(x) \sigma_3 \phi^{in}(x) + i\Delta \phi^{in\dagger}(x) \sigma_3 (\sigma_2 \cos 2\alpha + \sigma_1 \sin 2\alpha) \phi^{in}(x) \right) \\ &= \int d^3x \left(\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} \phi_{\uparrow}^{in\dagger}(x) \cdot \vec{\nabla} \phi_{\uparrow}^{in}(x) - \vec{\nabla} \phi_{\downarrow}^{in}(x) \cdot \vec{\nabla} \phi_{\downarrow}^{in\dagger}(x)) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_F (\phi_{\uparrow}^{in\dagger}(x) \phi_{\uparrow}^{in}(x) - \phi_{\downarrow}^{in}(x) \phi_{\downarrow}^{in\dagger}(x)) \right. \\ &\quad \left. + \Delta (\phi_{\uparrow}^{in\dagger}(x) \phi_{\downarrow}^{in\dagger}(x) e^{2i\alpha} + \phi_{\downarrow}^{in}(x) \phi_{\uparrow}^{in}(x) e^{-2i\alpha}) \right). \end{aligned} \quad (\text{I.313})$$

ここで漸近場を

$$\phi^{in}(x) = \begin{pmatrix} \phi_{\uparrow}(x) \\ \phi_{\downarrow}^\dagger(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{I.314})$$

と表した。各成分は以下の反交換関係を満たす。

$$\{\phi_l^{in}(x), \phi_{l'}^{in\dagger}(x')\}_{l'=t} = \delta_{l,l'} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (\text{I.315})$$

$$\{\phi_l^{in}(x), \phi_{l'}^{in}(x')\}_{l'=t} = 0. \quad (\text{I.316})$$

ハイゼンベルグの運動方程式は以下のようになり、

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\phi_{\uparrow}^{in}(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi_{\uparrow}^{in}(x) - \varepsilon_F\phi_{\uparrow}^{in} + \Delta\phi_{\downarrow}^{in\dagger}(x)e^{2i\alpha}, \\ i\hbar\partial_t\phi_{\downarrow}^{in\dagger}(x) &= \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi_{\downarrow}^{in\dagger}(x) + \varepsilon_F\phi_{\downarrow}^{in\dagger}(x) + \Delta\phi_{\uparrow}^{in}(x)e^{-2i\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{I.317})$$

これは、方程式 (I.292) と確かに一致する。漸近場を表式 (I.241) で表し、 ϕ は南部表示 (I.254) で定義されるとして関係式 (I.301) を代入してハミルトニアン (I.313) の書き換えを行う。

$$\begin{aligned} H_{in} &= \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'}\int d^3x\left[\left(\frac{\hbar^2\vec{k}\cdot\vec{k}'}{2m} - \varepsilon_F\right)\left(C_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}C_{\vec{k}',\uparrow}e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}} - C_{\vec{k},\downarrow}^{\dagger}C_{\vec{k}',\downarrow}e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}\right)\right. \\ &\quad \left. + \Delta\left(C_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}C_{\vec{k}',\downarrow}^{\dagger}e^{2i\alpha}e^{-i(\vec{k}'+\vec{k})\cdot\vec{x}} + C_{\vec{k},\downarrow}^{\dagger}C_{\vec{k}',\uparrow}^{\dagger}e^{-2i\alpha}e^{i(\vec{k}'+\vec{k})\cdot\vec{x}}\right)\right] \\ &= \sum_{\vec{k}}\left[\xi_{\vec{k}}\left(C_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}C_{\vec{k},\uparrow} + C_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger}C_{-\vec{k},\downarrow}\right) + \Delta\left(C_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}C_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger}e^{2i\alpha} + C_{-\vec{k},\downarrow}C_{\vec{k},\uparrow}e^{-2i\alpha}\right)\right] \quad (\text{I.318}) \\ &= \sum_{\vec{k}}\left[\xi_{\vec{k}}\left(u_{\vec{k}}^2\alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}\alpha_{\vec{k},\uparrow} + v_{\vec{k}}^2\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger}\alpha_{-\vec{k},\downarrow} - u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}e^{2i\alpha}\alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger}e^{2i\omega_{\vec{k}}t} - u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}e^{-2i\alpha}\alpha_{-\vec{k},\downarrow}\alpha_{\vec{k},\uparrow}e^{-2i\omega_{\vec{k}}t}\right.\right. \\ &\quad \left. + v_{\vec{k}}^2\alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}\alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger} + u_{\vec{k}}^2\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger}\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger} + u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}e^{-2i\alpha}\alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}\alpha_{-\vec{k},\downarrow}e^{-2i\omega_{\vec{k}}t} + u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}e^{2i\alpha}\alpha_{-\vec{k},\downarrow}\alpha_{\vec{k},\uparrow}e^{2i\omega_{\vec{k}}t}\right) \\ &\quad + \Delta\left(u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}\alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger} - u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger}\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger} + u_{\vec{k}}^2e^{2i\alpha}\alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger}e^{2i\omega_{\vec{k}}t} - v_{\vec{k}}^2e^{-2i\alpha}\alpha_{-\vec{k},\downarrow}\alpha_{\vec{k},\uparrow}e^{-2i\omega_{\vec{k}}t}\right. \\ &\quad \left. + v_{\vec{k}}u_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}\alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger} - u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger}\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger} - v_{\vec{k}}^2e^{2i\alpha}\alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger}e^{2i\omega_{\vec{k}}t} + u_{\vec{k}}^2e^{-2i\alpha}\alpha_{-\vec{k},\downarrow}\alpha_{\vec{k},\uparrow}e^{-2i\omega_{\vec{k}}t}\right) \\ &= \sum_{\vec{k}}\left(\alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}\alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}\left((u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2)\xi_{\vec{k}} + 2u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\Delta\right) + \alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger}\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger}\left((u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2)\xi_{\vec{k}} + 2u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\Delta\right)\right. \\ &\quad \left. + \alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger}\left(-2u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\xi_{\vec{k}} + (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2)\Delta\right)e^{2i\alpha}e^{2i\omega_{\vec{k}}t} + \alpha_{-\vec{k},\downarrow}\alpha_{\vec{k},\uparrow}\left(-2u_{\vec{k}}v_{\vec{k}}\xi_{\vec{k}} + (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2)\Delta\right)e^{-2i\alpha}e^{-2i\omega_{\vec{k}}t}\right) \\ &= \sum_{\vec{k}}\left[E_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger}\alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger} + E_{\vec{k}}\alpha_{\vec{k},\downarrow}^{\dagger}\alpha_{\vec{k},\downarrow}^{\dagger}\right]. \quad (\text{I.319}) \end{aligned}$$

計算の途中で $\xi_{\vec{k}}, E_{\vec{k}}, \omega_{\vec{k}}$ が \vec{k} の大きさのみの関数であること、和の順番を入れ替えることで $-\vec{k} \rightarrow \vec{k}$ にできることを用いた。この結果は、 α が正のエネルギー $E_{\vec{k}}$ を持った二つの独立なスピンの自由度を持つ量子の生成消滅演

算子であり、式 (I.300) のやり方が妥当であることを示している。この変換 (I.300) のように漸近場のハミルトニアンを対角化する変換を Bogoliubov 変換と呼ぶ。

電子の生成消滅演算子に対する基底状態 $|0\rangle$ は、Bogoliubov 変換で現れた新しい量子の基底状態ではない。それは $\Delta \neq 0$ の時、

$$\alpha_{\vec{k},\uparrow}|0\rangle = v_k e^{i\omega_k t} |-\vec{k},\downarrow\rangle \neq 0, \quad (\text{I.320})$$

とゼロにならないことから確かめられる。そこで Bogoliubov 変換により変換を受けた新しい基底状態を求め、この基底状態を以下 BCS 基底状態と呼び、 $|BCS\rangle$ で表す。この基底状態は、すべての可能な \vec{k} に対して以下の方程式を満たす状態として定義される。

$$\alpha_{\vec{k},\uparrow}|BCS\rangle = 0, \quad (\text{I.321})$$

$$\alpha_{-\vec{k},\downarrow}|BCS\rangle = 0. \quad (\text{I.322})$$

ある一つのモード \vec{k} に対する基底状態は、 $\alpha_{\vec{k},\uparrow}$ が $C_{\vec{k},\uparrow}, C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger$ から構成されることから以下のように書き表される。

$$|BCS\rangle_{\vec{k}} = A_1|0\rangle + A_2 C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger|0\rangle + A_3 C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger + A_4 C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger|0\rangle. \quad (\text{I.323})$$

定義式 (I.321) からこの式の展開係数を決定する以下の方程式をえる。

$$\begin{aligned} 0 &= \left[A_1 v_k e^{2i\alpha} C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger|0\rangle + A_2 v_k e^{2i\alpha} C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger|0\rangle + A_2 u_k C_{\vec{k},\uparrow} C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger|0\rangle + A_4 u_k C_{\vec{k},\uparrow} C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger|0\rangle \right] e^{i\omega_k t} \\ &= \left[A_2 u_k|0\rangle + (A_1 v_k e^{2i\alpha} - A_4 u_k) C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger|0\rangle + A_2 v_k e^{2i\alpha} C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger|0\rangle \right]. \end{aligned} \quad (\text{I.324})$$

それぞれの電子状態を表す状態ベクトルの係数がゼロでなければならないという要請から、展開係数が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} A_2 &= 0, \\ A_4 &= \frac{v_k}{u_k} e^{2i\alpha} A_1. \end{aligned} \quad (\text{I.325})$$

A_3 は方程式 (I.321) では制限されないが、方程式 (I.322) から $A_3 = 0$ であることが導かれる。規格化条件を用いると

$$A_1 = u_k e^{i\theta_A},$$

$$A_4 = v_k e^{2i\alpha} e^{i\theta_A}. \quad (\text{I.326})$$

以下 $\theta_A = 0$ とする。したがって、位相表示における BCS 基底状態が以下のように求まる。

$$|BCS\rangle = \prod_{\vec{k}} \left[u_k |0\rangle_{\vec{k}} + v_k e^{2i\alpha} C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger |0\rangle_{\vec{k}} \right] e^{i\omega_k t}. \quad (\text{I.327})$$

一般の基底状態は、様々の異なる位相 α の状態の重ね合わせで表され、式 (I.274) で定義されるベクトル $\vec{j}(x)$ の真空期待値は仮想三次元空間内の第一軸と第二軸が張る面内の様々な方向を向いた状態の重ね合わせとなる。その中で状態 (I.327) は、位相 α を一つに固定し、 $\vec{j}(x)$ の真空期待値が第一軸と第二軸の張る面内で特定の方向を向く。状態 (I.327) が、位相表示と呼ばれる理由がこのことからよく理解できると思う。ここで $|0\rangle_{\vec{k}}$ は、

$$|0\rangle_{\vec{k}} = |0\rangle_{\vec{k}\uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}\downarrow}, \quad (\text{I.328})$$

であり、量子状態 (\vec{k}, \uparrow) と $(-\vec{k}, \downarrow)$ が共に電子に閉められていない状態を表している。したがって、異なる \vec{k}' に対する $|0\rangle_{\vec{k}}$ は $|0\rangle_{\vec{k}}$ と直交する。以下の計算のため BCS 基底状態を以下の表記で表しておく。

$$|BCS\rangle = \prod_{\vec{k}} \left[u_k |0\rangle_{\vec{k}\uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}\downarrow} + v_k e^{2i\alpha} |1\rangle_{\vec{k}\uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}\downarrow} \right] e^{i\omega_k t}. \quad (\text{I.329})$$

このことから $|BCS\rangle$ が規格化条件

$$\langle BCS|BCS\rangle = \prod_{\vec{k}} (u_k^2 + v_k^2) = 1, \quad (\text{I.330})$$

を満たすことが示される。

I.9.3 BCS 基底状態の性質

基底状態が BCS 基底状態で表される時 Goldstone の交換関係の値がどうなるか調べてみよう。以下計算を簡単にするため位相 $\alpha = 0$ とする。

$$\langle BCS|J_{0,1}|BCS\rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \langle BCS| (C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{\vec{k}',\downarrow}^\dagger e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} + C_{\vec{k},\downarrow} C_{\vec{k}',\uparrow} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}) |BCS\rangle$$

$$= -\frac{2}{V} \sum_{\vec{k}} u_k v_k. \quad (\text{I.331})$$

式 (I.327) で表される状態は、 \vec{k} の状態に何も電子が入っていない状態と \vec{k} の状態に上向きスピンの電子が一個入り同時に $-\vec{k}$ の状態に下向きスピンの電子が一個入ってペアーを組んだ状態の重ね合わせ状態である。電子系が Fermi 基底状態にある時

$$u_k = \begin{cases} 0 & (k \leq k_F) \\ 1 & (k > k_F) \end{cases}, \quad v_k = \begin{cases} 1 & (k \leq k_F) \\ 0 & (k > k_F) \end{cases} \quad (\text{I.332})$$

である。したがって、電子が Fermi 基底状態にあるとき Goldstone の交換関係の値が期待通りゼロとなる。一方、超伝導転移後の BCS 基底状態にあるとき

$$u_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{E_k}\right)}, \quad v_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k}\right)}, \quad (\text{I.333})$$

となり Goldstone の交換関係の値は以下のようにになる。

$$\langle BCS | J_{0,1} | BCS \rangle = -\frac{2\Delta}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{E_k} = -\frac{\Delta}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{E_k} dk. \quad (\text{I.334})$$

したがって、 $\Delta \neq 0$ の時、確かに Goldstone の交換関係が有限の値を持つことが確認できる。

図 I.1 に Δ と Fermi エネルギーの比が 0.04 の時の BCS 基底状態の u_k^2 と v_k^2 の k 依存性を示した。Fermi 面のエネルギー準位で電子対が占める割合が丁度 50% になる。実際の金属では、 $\Delta \sim 10^{-3} \text{eV}$ 、 $\Delta/\epsilon_F \sim 1.5 \times 10^{-3}$ 程度であり、この図から Fermi 基底状態からのズレが現れるのは、Fermi 面近傍のごく限られた領域であることが分かる。BCS 基底状態に Fermi 基底状態からのズレを発生させた物理的原因は、電子の存在により引き寄せられたイオン化した格子の配列が作る静電ポテンシャルにより電子間に生じた引力である。電子の運動により格子イオンによる静電ポテンシャルは波として金属中を伝播する。この波を量子化したものがフォノンである。電子対発生の原因は電子間のフォノンの交換により引き起こされていると言い

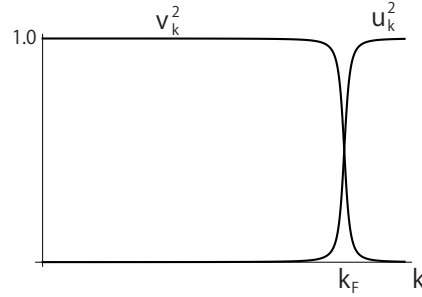


図 I.1 BCS 基底状態の準位占有率の波数分布。

換えることができる。最もエネルギーの高いを持つフォノンのエネルギーはデバイ温度により以下のように与えられる。

$$\hbar\omega_D = k_B T_D. \quad (\text{I.335})$$

例えばアルミニウムのデバイ温度は 428K、 $k_B T = 0.0365\text{eV}$ である。フォノンの交換が電子対の引力源とすると束縛エネルギーの最大値は $\hbar\omega_D$ 程度であることが期待される。そこで BCS 基底状態に Fermi 基底状態からのズレが生じるエネルギー範囲が Fermi 面を境に $|\xi_k| \leq \hbar\omega_D$ であるとし以下の近似を行う。

$$u_k = \begin{cases} 0 & (\xi_k < -\hbar\omega_D) \\ \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{E_k}\right)} & (-\hbar\omega_D \leq \xi_k \leq \hbar\omega_D) \\ 1 & (\xi_k > \hbar\omega_D) \end{cases}$$

$$v_k = \begin{cases} 1 & (\xi_k < -\hbar\omega_D) \\ \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k}\right)} & (-\hbar\omega_D \geq \xi_k \geq \hbar\omega_D) \\ 0 & (\xi_k > \hbar\omega_D) \end{cases} \quad (\text{I.336})$$

BCS 基底状態を後の計算に扱いやすい形で表しておく。

次に電子系の基底状態が BCS 基底状態 (I.336) にある時を考える。 $\varepsilon_F - \hbar\omega_D$ 以下のエネルギー準位が、ギッシリ詰まった状態を BCS-Fermi 基底と定義する。BCS-Fermi 基底は以下のように定義される。

$$|0\rangle' = \prod_{\vec{k}, \varepsilon_k \leq \varepsilon_F - \hbar\omega_D} C_{-\vec{k}, \downarrow}^\dagger C_{\vec{k}, \uparrow}^\dagger |0\rangle. \quad (\text{I.341})$$

BCS-Fermi 基底に入っている電子数を $N - 2\nu$ とすると以下のようになる。

$$\begin{aligned} N - 2\nu &= \frac{V}{\pi^2} \int_{-\varepsilon_F}^{-\hbar\omega_D} \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{2}(\xi_k + \varepsilon_F)^{1/2} d\xi_k, \\ &= \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} (\varepsilon_F - \hbar\omega_D)^{3/2}. \end{aligned} \quad (\text{I.342})$$

この近似の元で BCS 基底状態は以下のように再定義される。

$$|BCS\rangle \sim \prod_{\vec{k}, \varepsilon_k > \varepsilon_F - \hbar\omega_D} \left[u_k |0\rangle' + v_k e^{2i\alpha} C_{-\vec{k}, \downarrow}^\dagger C_{\vec{k}, \uparrow}^\dagger |0\rangle' \right] e^{i\omega_k t}. \quad (\text{I.343})$$

ここで以下の演算子を新たに定義する。

$$B_{\vec{k}}^\dagger \equiv C_{-\vec{k}, \downarrow}^\dagger C_{\vec{k}, \uparrow}^\dagger, \quad B_{\vec{k}} \equiv C_{\vec{k}, \uparrow} C_{-\vec{k}, \downarrow}. \quad (\text{I.344})$$

これらは以下の交換関係を満たす。

$$[B_{\vec{k}}, B_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \left(1 - C_{\vec{k}, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}, \uparrow} - C_{-\vec{k}, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}, \downarrow} \right), \quad (\text{I.345})$$

$$[B_{\vec{k}}, B_{\vec{k}'}] = 0. \quad (\text{I.346})$$

$$[B_{\vec{k}}^\dagger, B_{\vec{k}'}^\dagger] = 0. \quad (\text{I.347})$$

したがって、 $B_{\vec{k}}, B_{\vec{k}}^\dagger$ はボーズ粒子ライクな交換関係を満たす演算子である。特に粒子がほとんど詰まっていない状態に対しては、ほぼボーズ粒子の交換関係を満たすと考えて良い。一方、Fermi 縮退を起こしている状態に対しては、全ての交換関係はゼロでありボーズ粒子性は失われる。定義 (I.344) より $B_{\vec{k}}, B_{\vec{k}}^\dagger$ は、運動量 $\hbar\vec{k}$ で上向きスピンの電子と運動量 $-\hbar\vec{k}$ と下向きスピンの電子のペアの生成消滅演算子である。このペアをクーパーペア (Cooper pair) と呼ぶ。物理的理解を深めるために以下のような変形を施す。以下では簡単のため

$$[B_{\vec{k}}, B_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}, \quad (\text{I.348})$$

と近似しクーパーペアを完全なボーズ粒子性を持つとして扱う。

$$\begin{aligned}
 |BCS\rangle &\sim \prod_{\vec{k}, \varepsilon_k > \varepsilon_F - \hbar\omega_D} u_k [|0\rangle' + w_k e^{2i\alpha} B_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle'] e^{i\omega_k t}, \\
 &= \prod_{\vec{k}, \varepsilon_k > \varepsilon_F - \hbar\omega_D} u_k \exp[w_k e^{2i\alpha} B_{\vec{k}}^\dagger] |0\rangle'. \\
 w_k &\equiv \frac{v_k}{u_k}. \tag{I.349}
 \end{aligned}$$

二つ目の等号では、電子のフェルミ粒子性より同一の量子状態の生成演算子が二つ以上掛かるとゼロになることを用いた。クーパーペアとしてはボーズ粒子性を示すが、構成要員の電子それぞれはフェルミ粒子であることを忘れていないということである。Backer-Hausdolf の公式 (G.40) を用いると

$$\begin{aligned}
 |BCS\rangle &= \prod_{\vec{k}, \varepsilon_k > \varepsilon_F - \hbar\omega_D} u_k \exp[w_k e^{2i\alpha} B_{\vec{k}}^\dagger] |0\rangle' \\
 &= \left[\prod_{\vec{k}, \varepsilon_k > \varepsilon_F - \hbar\omega_D} u_k \right] \exp\left[\sum_{\vec{k}} w_k e^{2i\alpha} B_{\vec{k}}^\dagger \right] |0\rangle'. \\
 &= \left[\prod_{\vec{k}, \varepsilon_k > \varepsilon_F - \hbar\omega_D} u_k \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^\dagger \right]^n |0\rangle', \tag{I.350}
 \end{aligned}$$

のように書ける。この結果は、BCS 基底状態は、BCS-Fermi 基底状態の上にクーパーペアが 0 個から無限大まで作られた状態の重ね合わせであることを示している。ただし、構成要素である電子のフェルミ粒子性から複数のクーパーペアが作られる時、それらの量子状態は全て異ならないなければならない。

式 (I.350) から直ちに期待される通りクーパーペアの数は確定しておらず揺らいでいる。クーパーペアの平均数大雑把に言って ν 程度であり以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
 \nu &= \frac{1}{2} \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} [\varepsilon_F^{3/2} - (\varepsilon_F - \hbar\omega_D)^{3/2}] \sim \frac{3}{4} \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m\varepsilon_F}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{\hbar\omega_D}{\varepsilon_F} \\
 &= \frac{3}{4} N \frac{\hbar\omega_D}{\varepsilon_F}. \tag{I.351}
 \end{aligned}$$

したがって、クーパー対の数は全自由電子の $\hbar\omega_D/\varepsilon_F \sim 0.05$ 、5% 程度であ

る。次に粒子数のゆらぎを計算するため以下の量を計算する。

$$\langle BCS | C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow} C_{\vec{k}',\downarrow}^\dagger C_{\vec{k}',\downarrow} | BCS \rangle$$

まず $\vec{k}' = -\vec{k}$ の場合を考える。この時、

$$C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow} C_{\vec{k}',\downarrow}^\dagger C_{\vec{k}',\downarrow} | BCS \rangle \rightarrow C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow} C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger C_{-\vec{k},\downarrow} e^{2i\alpha} v_k C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger | 0_{-\vec{k},\downarrow} \rangle C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger | 0_{\vec{k},\uparrow} \rangle , ,$$

からのみ寄与がある。したがって、以下の寄与を与える。

$$\langle BCS | C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow} C_{\vec{k}',\downarrow}^\dagger C_{\vec{k}',\downarrow} | BCS \rangle \leftarrow v_k^2. \quad (I.352)$$

一方 $\vec{k}' \neq -\vec{k}$ のときは、

$$\begin{aligned} C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow} C_{\vec{k}',\downarrow}^\dagger C_{\vec{k}',\downarrow} | BCS \rangle &\rightarrow C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow} C_{\vec{k}',\downarrow}^\dagger C_{\vec{k}',\downarrow} e^{2i\alpha} v_k C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger | 0_{-\vec{k},\downarrow} \rangle C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger | 0_{\vec{k},\uparrow} \rangle , , \\ &+ C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow} C_{\vec{k}',\downarrow}^\dagger C_{\vec{k}',\downarrow} e^{2i\alpha} v_{k'} C_{\vec{k}',\downarrow}^\dagger | 0_{\vec{k}',\downarrow} \rangle C_{-\vec{k}',\uparrow}^\dagger | 0_{-\vec{k}',\uparrow} \rangle , , \end{aligned}$$

の二つの項からの寄与がある。したがって、この時の寄与は以下のようになる。

$$\langle BCS | C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow} C_{\vec{k}',\downarrow}^\dagger C_{\vec{k}',\downarrow} | BCS \rangle \leftarrow v_k^2 v_{k'}^2. \quad (I.353)$$

以上の結果は以下のように一つにまとめられる。

$$\langle BCS | C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow} C_{\vec{k}',\downarrow}^\dagger C_{\vec{k}',\downarrow} | BCS \rangle = v_k^2 \delta_{-\vec{k},\vec{k}'} + v_k^2 v_{k'}^2 (1 - \delta_{-\vec{k},\vec{k}'}). \quad (I.354)$$

$C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow} C_{\vec{k}',\uparrow}^\dagger C_{\vec{k}',\uparrow}$, $C_{\vec{k},\downarrow}^\dagger C_{\vec{k},\downarrow} C_{\vec{k}',\downarrow}^\dagger C_{\vec{k}',\downarrow}$, $C_{\vec{k},\downarrow}^\dagger C_{\vec{k},\downarrow} C_{\vec{k}',\uparrow}^\dagger C_{\vec{k}',\uparrow}$ もこれと同じ寄与を与える。これらの結果から \mathfrak{N}^2 の期待値に対して以下の結果を得る。

$$\begin{aligned} \langle BCS | \mathfrak{N}^2 | BCS \rangle &= \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \langle BCS | (C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow} + C_{\vec{k},\downarrow}^\dagger C_{\vec{k},\downarrow}) (C_{\vec{k}',\uparrow}^\dagger C_{\vec{k}',\uparrow} + C_{\vec{k}',\downarrow}^\dagger C_{\vec{k}',\downarrow}) | BCS \rangle \\ &= 4 \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} (v_k^2 \delta_{-\vec{k},\vec{k}'} + v_k^2 v_{k'}^2 (1 - \delta_{-\vec{k},\vec{k}'})) \\ &= 4 \left(\sum_{\vec{k}} v_k^2 \right)^2 + 4 \sum_{\vec{k}} v_k^2 (1 - v_k^2) = \left(2 \sum_{\vec{k}} v_k^2 \right)^2 + 4 \sum_{\vec{k}} u_k^2 v_k^2. \quad (I.355) \end{aligned}$$

以上から粒子数の分散を計算する式が以下のように導出される。

$$(\Delta N)^2 = 4 \sum_{\vec{k}} u_k^2 v_k^2 = \frac{4V}{(2\pi)^3} \int d^3k u_k^2 v_k^2 = \frac{2V}{\pi^2} \int_0^\infty dk (k u_k v_k)^2. \quad (I.356)$$

この式を BCS-Fermi 基底状態 (I.336) に適応すると以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}
 (\Delta N)^2 &= \frac{V\Delta^2}{4\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{(\xi_k + \varepsilon_F)^{1/2}}{\xi_k^2 + \Delta^2} d\xi_k \\
 &\sim \frac{V\Delta^2}{4\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \varepsilon_F^{1/2} \left(\frac{1}{\xi_k^2 + \Delta^2} + \frac{1}{2\varepsilon_F} \frac{\xi_k}{\xi_k^2 + \Delta^2} \right) d\xi_k \\
 &\sim \frac{V\Delta^2}{4\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \frac{\varepsilon_F^{1/2}}{\Delta} \pi = \frac{V}{3\pi^2} \frac{(2m\varepsilon_F)^{3/2}}{\hbar} \frac{3\pi}{4} \frac{\Delta}{\varepsilon_F} \\
 &= N \frac{3\pi}{4} \frac{\Delta}{\varepsilon_F}. \tag{I.357}
 \end{aligned}$$

ここで、 $\xi_k \ll \varepsilon_F$ を用いてテイラー展開を行い、 $\hbar\omega/\Delta \sim 30$ 程度と大きな値をとることを考慮して $\tan^{-1}(\hbar\omega_D/\Delta) \sim \pi/2$ と近似した。したがって BCS 基底状態におけるクーパーペア数のゆらぎは以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 \Delta v &= \frac{1}{2} \Delta N = \frac{1}{2} \sqrt{N} \sqrt{\frac{3\pi}{4} \frac{\Delta}{\varepsilon_F}}, \\
 \frac{\Delta v}{v} &= \sqrt{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{\varepsilon_F \Delta}{(\hbar\omega_D)^2}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}. \tag{I.358}
 \end{aligned}$$

したがって、自由電子の数非常に大きな数の時、クーパーペア数のゆらぎはほぼ無視し得るほど小さく、BCS-Fermi 基底状態はクーパーペア数がほぼ確定した状態と扱って差し支えない。例えばアルミの自由電子数密度は

$$n_{Al} = 6.0 \times 10^{22} \text{cm}^{-3}, \tag{I.359}$$

なので MKID の光を吸収する部分の体積を 10^{-10}cm^3 とすると MKID 中の自由電子数は 10^{12} 個程度である。したがってクーパーペア数のゆらぎは大体 $\Delta v/v \sim 10^{-6}$ である。

I.9.4 励起

金属中の自由電子の期待状態からの励起を考える。ここでは、全電子数が変化しない励起過程を扱う。まず縮退の無い Fermi 基底状態からの励起を考える。この基底状態から $k > k_F$ の準位に運動量 $\hbar\vec{k}$ 、スピン上向きの電子

を励起する。この電子が励起前に占めていた量子状態が、運動量 $\hbar\vec{k}'$ でスピ
ンが上向きの状態とする。するとこの励起に要したエネルギーは $\xi_k + |\xi_{k'}|$
である。電子が取り去られた状態は空席となり、運動量 $-\hbar\vec{k}'$ でスピン下向
きで正の電荷を持ったホールが生成されたと解釈することができる。した
がって、一個の電子の励起現象は、エネルギー ξ_k を持った電子一個とエネ
ルギー $|\xi_{k'}|$ を持ったホール一個の対の生成過程と見做すことができる。

次に仮想三次元空間内での第三軸周りの回転の自由度分縮退が起きてい
る BCS 基底状態からの励起を考える。BCS 基底状態は (I.321), (I.322) を満
たし、励起される粒子は、 $\alpha_{\vec{k},l}, \alpha_{\vec{k},l}^\dagger$ で生成・消滅される量子であり、これを
準粒子 (quasi particle) と呼ぶ。ひと昔前は、この準粒子は bogoliubon と呼
ばれていたそうだが、今はそのような呼ばれ方をすることは殆ど無い。BCS
基底状態の特徴は、 u_k と v_k が共にゼロで無い有限値をとる波数領域が k_F
を中心に存在することである。その範囲は、

$$u_k^2 v_k^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\xi_k^2}{E_k^2} \right) = \frac{1}{4} \frac{\Delta^2}{\xi_k^2 + \Delta^2}, \quad (\text{I.360})$$

より、 $\xi_k = 0$ 即ち $k = k_F$ を中心に $|\xi_k| < \Delta$ 程度の広がりを持つ。式 (I.303)
より $\alpha_{\vec{k},\uparrow}^\dagger$ は、運動量 $\hbar\vec{k}$ でスピン上向きの電子の生成を u_k^2 の割合で引き起
こし、運動量 $-\hbar\vec{k}$ でスピン下向きの電子の消滅を v_k^2 の割合で引き起こす演
算子である。式 (I.339) は、基底状態において各状態に電子が詰まっている
割合を v_k^2 が表すことを示している。一方 u_k^2 は、電子が詰まっていない空き
領域の割合を示している。Fermi 基底状態では、 $k \leq k_F$ の状態が全部埋まっ
ていて、 $k > k_F$ の状態はガラ空きである。一方、BCS 基底状態では、上記の
ように中間状態が存在する。Fermi 面より上にも有限の個数の電子が詰まっ
ており、それを消滅させることができる。つまり $\alpha_{\vec{k},\uparrow}^\dagger$ が行う運動量 $-\hbar\vec{k}$ で
スピン下向きの電子の消滅させる操作は、運動量 $\hbar\vec{k}$ でスピン上向きのホー
ルを生成させることに対応することになる。そこには v_k^2 の割合で BCS 基
底状態に電子が詰まっており、それがホールを生成することができる割合
に該当する。それを反映して v_k が掛かっているのである。逆に Fermi 面よ
り下の準位にも電子の空き状態が u_k^2 の割合だけ存在しており、電子を生成

することができる。電子の生成に関わる演算子の前に u_k が掛かっているのは、電子の空き領域の割合の分だけ電子を励起することができるからである。したがって、BCS 基底状態から励起されて生成される準粒子は、電子的励起とホールの励起の混合状態である。

ここまでの考察から BCS 基底状態から励起される準粒子は、クーパーペアを乖離して生成される準粒子ペアであることが分かる。系全自由電子数は、励起の過程で保存する。したがって、 $\alpha_{k,\uparrow}^\dagger$ によって励起された運動量 $\hbar\vec{k}$ でスピン上向きの電子は、元々 BCS 基底状態を構成していたスピン上向きの電子でなければならない。同時に消滅した運動量 $-\hbar\vec{k}$ でスピン下向きの電子は、基底状態の上に励起された電子として存在していなければならない。運動量 $-\hbar\vec{k}$ でスピン下向きの電子の生成を含む演算子は、 $\alpha_{k,\uparrow}$ か $\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger$ の何れかである。 $\alpha_{k,\uparrow}^\dagger$ で生成された運動量 $\hbar\vec{k}$ でスピン上向きの電子は、BCS 期待状態からの励起であるので、BCS 基底状態に詰まっていた電子を消滅しなければならない。何れの演算子も運動量 $\hbar\vec{k}$ でスピン上向きの電子を消滅させる操作を含むが、 v_k が掛かって後の方が BCS 基底状態からの消滅を表している。したがって、 $\alpha_{k,\uparrow}^\dagger$ によって励起される準粒子と対になるのは $\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger$ である。即ち BCS 基底状態からの励起は、必ずクーパー対の乖離に伴う二つの準粒子の生成を伴う。ハミルトニアン (I.319) から生成された準粒子はそれぞれエネルギー E_k を持つ。したがって、BCS 基底状態から励起状態を作るには $2E_k$ 単位のエネルギーが必要になることになる。 $\xi_k = 0$ の時、 $2E_k = 2\Delta$ となりゼロ出ない有限の値を持つ。これがクーパー対の束縛エネルギーの最低値であり、 Δ をギャップエネルギーと呼ぶ。

励起状態の状態関数を導出する。BCS 基底状態に準粒子の励起演算子 $\alpha_{k,\uparrow}^\dagger$ を作用する。以下 BCS 基底状態からこの演算に関わる部分だけをピックアップして計算する。

$$\begin{aligned} \alpha_{k,\uparrow}^\dagger |BCS\rangle_{\vec{k}} &= (u_k C_{k,\uparrow}^\dagger + v_k e^{-2i\alpha} C_{-\vec{k},\downarrow}) \left[u_k + v_k e^{2i\alpha} C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger C_{k,\uparrow}^\dagger \right] |0\rangle \\ &= \left[u_k^2 C_{k,\uparrow}^\dagger + u_k v_k e^{2i\alpha} C_{k,\uparrow}^\dagger C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger C_{k,\uparrow}^\dagger + v_k u_k e^{-2i\alpha} C_{-\vec{k},\downarrow} + v_k^2 C_{-\vec{k},\downarrow} C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger C_{k,\uparrow}^\dagger \right] |0\rangle \\ &= \left[u_k^2 C_{k,\uparrow}^\dagger - u_k v_k e^{2i\alpha} C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger C_{k,\uparrow}^\dagger C_{k,\uparrow}^\dagger + v_k^2 C_{k,\uparrow}^\dagger + v_k^2 C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger C_{k,\uparrow}^\dagger C_{-\vec{k},\downarrow} \right] |0\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (u_k^2 + v_k^2) C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger |0\rangle, \\
&= C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger |0\rangle.
\end{aligned} \tag{I.361}$$

ここで $|0\rangle$ が電子の真空であり電子の消滅演算子が作用すると消滅すること排他原理から同じ量子状態の生成演算子あるいは消滅演算子が二つ以上作用するとゼロになることおよび演算子の入れか毎に符号が変わることを用いた。この結果は、BCS 基底状態から準粒子を一個励起した状態は、同じ運動量とスピンを持つ電子を励起したことに対応することを示している。BCS 基底状態を形成するクーパー対を励起することで励起状態が得られるので、 $\alpha_{\vec{k},\uparrow}^\dagger$ で励起される準粒子と対となって $\alpha_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger$ で励起される準粒子も励起される。したがって、準粒子対が 1 組励起された励起状態は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
|P_{\vec{k}}\rangle &= \alpha_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger \alpha_{\vec{k},\uparrow}^\dagger |BCS\rangle_{\vec{k}} = \left(-v_k e^{-2i\alpha} C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger + u_k C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger \right) e^{-i\omega_k t} C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger |0\rangle \\
&= \left(-v_k e^{-2i\alpha} + v_k e^{-2i\alpha} C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger + u_k C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger \right) |0\rangle e^{-i\omega_k t} \\
&= (u_k B_{\vec{k}}^\dagger - v_k e^{-2i\alpha}) |0\rangle e^{-i\omega_k t} \\
&= (u_k |1\rangle_{\vec{k},\uparrow} |1\rangle_{-\vec{k},\downarrow} - v_k e^{-2i\alpha} |0\rangle_{\vec{k},\uparrow} |0\rangle_{-\vec{k},\downarrow}) e^{-i\omega_k t}.
\end{aligned} \tag{I.362}$$

BCS 基底状態が準粒子の真空即ち準粒子の消滅演算子を作用するとゼロになることからこの状態が BCS 基底状態と直交する事は自明である。実際、

$$\langle P_{\vec{k}} | BCS_{\vec{k}} \rangle = [-u_k v_k e^{2i\alpha} + v_k u_k e^{2i\alpha}] = 0, \tag{I.363}$$

を満たす。ここで $|BCS\rangle_{\vec{k}}$ を $|BCS_{\vec{k}}\rangle$ と表し直した。励起状態には、超伝導転移に関わっていない常伝導状態の電子も考慮する必要がある。常伝導電子は、単独の電子の励起として扱い、以下のように表される。

$$\begin{aligned}
|S_{\vec{k},\uparrow}\rangle &= C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger |0\rangle_{\vec{k}} = |1\rangle_{\vec{k},\uparrow} |0\rangle_{-\vec{k},\downarrow}, \\
|S_{\vec{k},\downarrow}\rangle &= C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger |0\rangle_{\vec{k}} = |0\rangle_{\vec{k},\uparrow} |1\rangle_{-\vec{k},\downarrow},
\end{aligned} \tag{I.364}$$

これらが BCS 基底状態と準粒子対状態と直交することは自明である。常伝導電子状態は、量子状態 (\vec{k},\uparrow) か $(-\vec{k},\downarrow)$ のどちらか一方のみが電子で占められた状態であり、BCS 基底状態にも準粒子対状態にはそのような状態が

含まれないからである。

一般の励起状態は、BCS 基底状態・準粒子対励起状態・常伝導電子励起状態の重ね合わせとして以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 |exc\rangle &= \prod_{\vec{k}} \left[\sqrt{g_k} (u_k |0\rangle_{\vec{k},\uparrow} |0\rangle_{-\vec{k},\downarrow} + v_k e^{2i\alpha} |1\rangle_{\vec{k},\uparrow} |1\rangle_{-\vec{k},\downarrow}) e^{i\omega_k t} \right. \\
 &\quad + \sqrt{p_k} (u_k |1\rangle_{\vec{k},\uparrow} |1\rangle_{-\vec{k},\downarrow} - v_k e^{-2i\alpha} |0\rangle_{\vec{k},\uparrow} |0\rangle_{-\vec{k},\downarrow}) e^{-i\omega_k t} \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{s_k}{2}} (|1\rangle_{\vec{k},\uparrow} |0\rangle_{-\vec{k},\downarrow} + |0\rangle_{\vec{k},\uparrow} |1\rangle_{-\vec{k},\downarrow}) e^{i\omega_k t} \right] \\
 &= \prod_{\vec{k}} \left[\sqrt{g_k} + \sqrt{p_k} \alpha_{\vec{k},\uparrow}^\dagger \alpha_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger + \frac{s_k}{2} (\alpha_{\vec{k},\uparrow}^\dagger + \alpha_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger) \right] |BCS_{\vec{k}}\rangle. \quad (I.365)
 \end{aligned}$$

常伝導電子を一つ励起する状態は、準粒子一個を励起することで得られることを式 (I.361) が示している。したがって、常伝導電子一個の励起エネルギーは準粒子の励起エネルギーと同じ E_k である。この状態のノルムを取ると規格化条件から各状態の重み係数が満たす方程式が以下のように求まる。

$$\begin{aligned}
 \langle exc|exc\rangle &= \prod_{\vec{k}} \left[g_k (u_k^2 + v_k^2) + p_k (u_k^2 + v_k^2) + 2 \times \frac{s_k}{2} \right] = \prod_{\vec{k}} [g_k + p_k + s_k] \\
 &= 1. \quad (I.366)
 \end{aligned}$$

これから重み係数の間の以下の関係式をえる。

$$g_k + p_k + s_k = 1. \quad (I.367)$$

I.9.5 エネルギーギャップ方程式

Goldstone の交換関係式 (I.334) より以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned}
 -\frac{2\Delta}{g} &= -\frac{\Delta}{2\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{\sqrt{\xi_k + \varepsilon_F}}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}} d\xi_k \\
 &\sim -\frac{\Delta}{2\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \varepsilon_F^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}} + \frac{1}{2} \frac{\xi_k/\varepsilon_F}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}} \right) d\xi_k \\
 &= -\frac{\Delta}{2\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \varepsilon_F^{1/2} \left[\log \left(\xi_k + \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2} \right) \right]_{\xi_k = -\hbar\omega_D}^{\xi_k = \hbar\omega_D}
 \end{aligned}$$

$$\sim -2\Delta N_F \log\left(\frac{2\hbar\omega_D}{\Delta}\right). \quad (\text{I.368})$$

これがエネルギーギャップ方程式である。ここで

$$N_F \equiv \frac{mk_F}{2\pi^2\hbar^2}, \quad (\text{I.369})$$

で定義される量子状態の電子のエネルギーの Fermi エネルギーからのズレで測った時の Fermi 面における状態密度である。波数の大きさ $k \sim k + dk$ の範囲にある状態密度を $\xi_k \sim \xi_k + d\xi_k$ を変数として書き換えると以下のようになる。

$$\frac{4\pi}{(2\pi)^3} k^2 dk = \frac{mk_F}{2\pi^2\hbar^2} d\xi_k. \quad (\text{I.370})$$

ここで $k = k_F$ とした。この式の $d\xi_k$ の係数が N_F である。エネルギーギャップ方程式が解を持つためには $g > 0$ 即ちフォノン相互作用が電子間に引力を及ぼす時だけである。これから

$$\Delta = 2\hbar\omega_D \exp\left[-\frac{1}{gN_F}\right], \quad (\text{I.371})$$

のようにギャップエネルギー Δ を物性値から求める式が得られる。

超伝導転移温度 T_c とギャップエネルギーの関係式を求めるため、エネルギーギャップ方程式への有限温度の効果を調べる。そのために $j_{0,1}$ を準粒子の生成・消滅演算子を用いて書き表す。本質には関係ないので $\alpha = 0$ とする。

$$\begin{aligned} j_{0,1}(x) &= \varphi_{\uparrow}^{\dagger}(x)\varphi_{\downarrow}^{\dagger} + \varphi_{\downarrow}(x)\varphi_{\uparrow}(x) \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \left[C_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger} C_{\vec{k}',\downarrow}^{\dagger} e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} + C_{\vec{k},\downarrow} C_{\vec{k}',\uparrow} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right] = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \left[C_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger} C_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger} + C_{-\vec{k},\downarrow} C_{\vec{k},\uparrow} \right] \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \left[u_k v_k \alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger} \alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger} + u_k^2 \alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger} \alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger} e^{2i\omega_k t} - v_k^2 \alpha_{-\vec{k},\downarrow} \alpha_{\vec{k},\uparrow} e^{-2i\omega_k t} - v_k u_k \alpha_{-\vec{k},\downarrow} \alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger} \right. \\ &\quad \left. + v_k u_k \alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger} \alpha_{\vec{k},\uparrow} - v_k^2 \alpha_{\vec{k},\uparrow}^{\dagger} \alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger} e^{2i\omega_k t} + u_k^2 \alpha_{-\vec{k},\downarrow} \alpha_{\vec{k},\uparrow} e^{-2i\omega_k t} - v_k u_k \alpha_{-\vec{k},\downarrow} \alpha_{-\vec{k},\downarrow}^{\dagger} \right] \end{aligned}$$

3つ目の等号では、BCS 基底状態での期待値を計算することを見越して $\vec{k}' = -\vec{k}$ の項のみ残した。 $\alpha_{\vec{k},l} |BCS\rangle = 0, \langle BCS | \alpha_{\vec{k},l}^{\dagger} = 0$ 、更に温度 T で熱平

衡の時 $\langle BCS | \alpha_{k,l}^\dagger \alpha_{k,l} | BCS \rangle = f(E_k)$ であることを用いて上記の式の基底状態での期待値を計算すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \langle j_{0,1}(x) \rangle &= -\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} 2v_k u_k (1 - \langle \alpha_{k,\uparrow}^\dagger \alpha_{k,\uparrow} \rangle - \langle \alpha_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger \alpha_{-\vec{k},\downarrow} \rangle) \\ &= -\frac{2}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty k^2 dk u_k v_k (1 - 2f(E_k)). \end{aligned} \quad (I.372)$$

ここで

$$f(E_k) = \frac{1}{e^{E_k/k_B T} + 1}, \quad (I.373)$$

である。正確な導出には、有限温度で熱平衡状態にある基底状態を定義して、その基底状態での期待値を計算する必要がある。それは次節で行う。したがって、Goldstone の交換関係から以下のエネルギーギャップ方程式を得る。

$$1 = \frac{g}{2\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{\sqrt{\xi_k + \varepsilon_F}}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}} d\xi_k \left(1 - 2f(\sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2})\right). \quad (I.374)$$

温度 0 の時のエネルギーギャップを Δ_0 と置く。これから求まるエネルギーギャップは、温度の単調減少関数であり、ある温度 T_c でゼロになる。 T_c を求めるため方程式 (I.374) で $\Delta = 0$ としてみる。すると

$$\begin{aligned} 1 &\sim \frac{g}{4\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \varepsilon_F^{1/2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{1}{\xi_k} \tanh\left(\frac{\xi_k}{2k_B T_c}\right) d\xi_k \\ &= gN_F \left([\log x \tanh x]_{-\hbar\omega_D/2k_B T_c}^{\hbar\omega_D/2k_B T_c} - \int_{-\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}}^{\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}} \frac{\log x}{\cosh^2 x} dx \right) \\ &\sim gN_F \log\left(\frac{2\gamma\hbar\omega_D}{\pi k_B T_c}\right), \end{aligned} \quad (I.375)$$

を得る。ここで

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{\cosh^2 x} dx = \log(4\gamma/\pi), \quad (I.376)$$

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt, \quad (I.377)$$

を用いた。この結果から温度ゼロの時のギャップエネルギーと超伝導転移

温度との間の以下の関係式を得る。

$$2\Delta_0 \sim \frac{2\pi}{\gamma} k_B T_c \sim 3.5 k_B T_c. \quad (\text{I.378})$$

I.9.6 Ginzburg-Landau 理論

基底状態の自発的対称性の破れによる超伝導転移を Ginzburg-Landau 理論の枠組みで説明する理論を構築する。超伝導状態は、擬似的なスカラー粒子として振る舞うクーパーペアが凝縮して実現している巨視的量子力学的状態である。GL 理論は、超伝導状態にある電子系を一つの複素スカラー関数 Ψ で表すことができる巨視的な系として扱う現象論的な理論である。超伝導転移が、式 (I.271)、(I.272) で定義される $j_{0,1}, j_{0,2}$ の基底状態による期待値が有限の値を取る現象であることを反映して、超伝導状態を表す波動関数が複素スカラー関数であるとした。このスカラー場に対する条件は、超伝導転移後

$$|\Psi(x)|^2 = n_c = \frac{n_s}{2}. \quad (\text{I.379})$$

のようにクーパー対の個数密度 n_c 、あるいは超伝導状態にある電子の数 n_s と結ばれることである。即ち、この場合は、質量 $2m$ で電荷 $2e$ でスピン 0 のクーパー対全体を表す場と考えているのである。前節までで議論した微視的な物理量を用いた超伝導転移の扱いとの対応がいささか不明確なところに不満があるが、以後 GL 理論の枠組みで超伝導体の巨視的な性質について議論して行く。

$$\rho(x) \equiv |\Psi(x)|^2, \quad (\text{I.380})$$

のようにこの複素スカラー場の振幅の二乗を表す場を導入すると Ψ は以下のように表現される。

$$\Psi(x) = \rho(x)^{1/2} e^{i\theta(x)}. \quad (\text{I.381})$$

GL 理論の肝は、この複素スカラー場のヘルムホルツの自由エネルギー密度が以下の形で書けると仮定することである。

$$\begin{aligned}
F &= -a|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 = -a\rho(x) + \frac{b}{2}\rho(x)^2, \\
a &\sim \alpha(T_c - T), \\
b &= \beta.
\end{aligned} \tag{I.382}$$

温度 $T > T_c$ の時、 $-a > 0$ であり、 $\rho = 0$ で F_G は最小値を取る。一方、 $T < T_c$ では、 $-a < 0$ となり、

$$\rho(x) = \frac{a}{b} = n_c = \frac{n_s}{2}, \tag{I.383}$$

で F_G が最小値を取る。 ρ は秩序パラメータ (order parameter) と呼ばれるもので、基底状態の転移を特徴付ける物理変数である。GL 理論では、転移温度 T_c 以上では、秩序パラメータを変数とした自由エネルギーの最小値が $\rho = 0$ にあり、それに伴って Goldstone の交換関係がゼロであり、基底状態は縮退の無い状態にあるが、 T_c 以下に温度が下がると秩序パラメータが有限の値を取るところで自由エネルギーが最小値をとるようになり、そのような状態に転移した方が系がエネルギー的により安定となるため相転移が起き Goldstone の交換関係が有限の値を取ると考える。金属の自由電子系の場合、 $\rho = 0$ となる基底状態は Fermi 基底状態であり、この系は場の位相変換に対して不変である。一方、超伝導転移後の基底状態は BCS 基底状態であり、位相変換に対して不変でなく、場の位相を変えると異なる基底状態に変換される。このように秩序パラメータがゼロの時、系の対称性が保たれているが、有限の値を取ると系の対称性が破れる。GL 理論によれば、 T_c を境にした温度変化に伴い自由エネルギーが最小値を取る秩序パラメータの値がゼロから有限値に変化するため、系は自発的に秩序パラメータが有限の値を持つ縮退した対称性が破れた基底状態に遷移することになる。

上記の複素場が磁場と相互作用しているとする。電場は存在していないとし、系は定常状態にあるとする。この系のラグランジアン密度は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{\hbar^2}{4m} \left(\vec{\nabla}\Psi^\dagger + \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A}\Psi^\dagger \right) \cdot \left(\vec{\nabla}\Psi - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A}\Psi \right) + a|\Psi|^2 - \frac{b}{2}|\Psi|^4 \\
&\quad + \frac{1}{8\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2.
\end{aligned} \tag{I.384}$$

オイラーラグランジの方程式

$$\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \Psi^\dagger} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^\dagger} = 0, \quad (\text{I.385})$$

に代入すると以下の方程式を得る。

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \left(\vec{\nabla} - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2 \Psi = a\Psi - b|\Psi|^2\Psi, \quad (\text{I.386})$$

次にベクトル場に対するオイラー・ラグランジ方程式

$$\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i A_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j} = 0, \quad (\text{I.387})$$

に代入してベクトル場が満たす方程式を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_2 A_3} &= 2(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2), \\ \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i A_3} \right) &= 2(\partial_2(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) - \partial_1(\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3)) \\ &= -2(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}))_3, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} &= \frac{i\hbar e}{2mc} (\Psi^\dagger \partial_3 \Psi - (\partial_3 \Psi^\dagger) \Psi) + \frac{2e^2}{mc} A_3 |\Psi|^2, \end{aligned} \quad (\text{I.388})$$

より

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (\text{I.389})$$

ここで電流 \vec{j} は以下のように定義される。

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar e}{2m} (\Psi^\dagger \vec{\nabla} \Psi - (\vec{\nabla} \Psi^\dagger) \Psi) - \frac{2e^2}{mc} |\Psi|^2 \vec{A}. \quad (\text{I.390})$$

この電流が定常状態での電荷保存則を満たすことを示す。方程式 (I.386) のエルミート共役をとった方程式は以下のものである。

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \left(\vec{\nabla} + \frac{2ie}{\hbar c} \right)^2 \Psi^\dagger = a\Psi^\dagger - b|\Psi|^2\Psi^\dagger. \quad (\text{I.391})$$

方程式 (I.386) に右から Ψ^\dagger を掛けて、方程式 (I.391) に左から Ψ を掛けて辺々引き算すると以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\hbar^2}{4m}(\Psi^\dagger \nabla^2 \Psi - (\nabla^2 \Psi^\dagger) \Psi) + \frac{i\hbar e}{mc} (\Psi^\dagger \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \Psi) + (\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \Psi^\dagger)) \Psi) \\
&= -i\hbar \vec{\nabla} \cdot \left[-\frac{\hbar}{4m} (\Psi^\dagger \vec{\nabla} \Psi - (\vec{\nabla} \Psi^\dagger) \Psi) + \frac{e}{mc} \vec{A} \Psi^\dagger \Psi \right]. \quad (\text{I.392})
\end{aligned}$$

最後の式のカギ括弧の中の量が確率密度フラックスであり、この式は定常状態における確率の保存を表している。カギ括弧の中の量にクーパー対の電荷 $2e$ を書けることで電流密度 (I.390) が得られる。確かに $\text{div} \vec{j} = 0$ を満たす。

ベクトルポテンシャルが満たす方程式の物理的内容を調べるため以下の変形を行う。

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} + \frac{8\pi e^2}{mc^2} |\Psi|^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \left[-\frac{i\hbar e}{2m} (\Psi^\dagger \vec{\nabla} \Psi - (\vec{\nabla} \Psi^\dagger) \Psi) \right] \quad (\text{I.393})$$

超伝導転移前は、秩序パラメータがゼロであるから基底状態での平均をとった後、左辺第三項はゼロとなり、光子が質量を持たないことと矛盾がない。一方、超伝導転移後は、秩序パラメータが有限の値を持つ。このため左辺第三項が光子の質量項としての効果を持つ。超伝導転移によって生じた光子の質量を m_{ph} とすると左辺第三項の係数コンプトン波長 $\hbar/m_{ph}c$ の逆数の自乗に対応する。したがって、

$$m_{ph}c^2 = \sqrt{8\pi \frac{e^2 (\hbar c)^3}{\hbar c mc^2} n_c} = 0.03 \left(\frac{n_c}{10^{22} \text{cm}^{-3}} \right)^{1/2} \text{eV}, \quad (\text{I.394})$$

のように超伝導転移によって生じた光子の質量が与えられる。即ち、超伝導転移が起こると超伝導体内では光子が質量を持つことになる。クーパー対は、大きさが同じで互いに逆向きの運動量を持つ電子のペアであるから重心の運動量はゼロであり、ネットな電荷の流れ即ち電流が現れない。一方、クーパー対の集合体の重心が有限速度で全体として運動することはありえ、これが超伝導体中の電流の源となる。式 (I.390) で表される電流 \vec{j} に (I.381), (I.379) を代入する。

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= \frac{\hbar e}{m} \vec{\nabla} \theta |\Psi|^2 - \frac{2e^2}{mc} |\Psi|^2 \vec{A} \\
&= 2en_c \left(\frac{\hbar}{2m} \vec{\nabla} \theta - \frac{e}{mc} \vec{A} \right). \quad (\text{I.395})
\end{aligned}$$

この式から最後の式の右辺に現れた項

$$\vec{v}_s \equiv \frac{\hbar}{2m} \vec{\nabla} \theta - \frac{e}{mc} \vec{A}, \quad (\text{I.396})$$

は、クーパー対流体のバルク速度であることが分かる。即ち、超伝導体内の電流密度は、電荷 $2e$ で個数密度 n_c の流体が速度 \vec{v}_s のバルク速度を持つことで生じているのである。

ラグランジアン (I.384) は、以下の変換に対して不変である。

$$\Psi'(x) = \Psi(x) e^{i \frac{2e}{\hbar c} \chi}, \quad (\text{I.397})$$

$$\vec{A}'(x) = \vec{A}(x) + \vec{\nabla} \chi. \quad (\text{I.398})$$

ゲージ変換後の波動関数の位相を θ' とし

$$\Psi'(x) = \rho(x)^{1/2} e^{i\theta'}, \quad (\text{I.399})$$

と表すと対凝縮を起こした電子系のバルク速度が

$$\vec{v}_s = \frac{\hbar}{2m} \vec{\nabla} \theta' - \frac{e}{mc} \vec{A}', \quad (\text{I.400})$$

と書けゲージの選択に依存しない量であることが分かる。ここでゲージを

$$\vec{\nabla} \theta + \frac{2e}{\hbar c} \vec{\nabla} \chi = 0, \quad (\text{I.401})$$

を満たすように決めることが出来る。この時電流密度は、

$$\vec{j} = -\frac{2e^2 n_c}{mc} \vec{A}', \quad (\text{I.402})$$

と書けマックスウエル方程式 (I.389) は以下のようにかける。

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}') + \frac{8\pi e^2 n_c}{mc^2} \vec{A}' = 0. \quad (\text{I.403})$$

ベクトル場 \vec{A}' は、質量 (I.394) を持った自由粒子の方程式を満たす。

ここまでの結果を用いて、超伝導体が持つ主要な巨視的な性質を導出する。式 (I.396) の rotation を取ると以下の関係式を得る。

$$\text{rot } \vec{v}_s = -\frac{e}{mc} \text{rot } \vec{A} = -\frac{e}{mc} \vec{B}. \quad (\text{I.404})$$

この結果を用いると式 (I.395) から磁場と電流の間の以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{j} &= -\frac{2e^2 n_c}{mc} \vec{B} = -\left(\frac{c}{4\pi\lambda^2}\right) \vec{B}, \\ \lambda &\equiv \left(\frac{mc^2}{8\pi n_c e^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{mc^2 b}{8\pi e^2 a}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{I.405})$$

マックスウエル方程式 (I.389) の両辺の rotation を取り $\text{div } \vec{B} = 0$ を用いると以下の方程式に還元される。

$$\begin{aligned} -\Delta \vec{B} + \text{grad}(\text{div } \vec{B}) &= \frac{4\pi}{c} \text{div } \vec{j} = -\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \vec{B}, \\ \Delta \vec{B} &= \left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \vec{B}. \end{aligned} \quad (\text{I.406})$$

この方程式を真空と超伝導体の境界面に適応する。境界面が yz 平面に広がる平面と $x > 0$ に超伝導体が分布しており $x < 0$ は真空とすると方程式 (I.406) の二つの独立な解は、 $e^{-x/\lambda}$ と $e^{x/\lambda}$ である。 $x \rightarrow \infty$ で有界な解を選択すると $e^{-x/\lambda}$ のみが残る。磁場は面に平行な z 成分のみを持つとする。解は、

$$B_z(x) = B_0 e^{-x/\lambda}, \quad (\text{I.407})$$

のようになり磁場の超伝導体への侵入が妨げられていることが分かる。この効果は、Meisner 効果と呼ばれる。磁場が侵入する長さは λ 程度であり、これを磁場の侵入長と呼ぶ。方程式 (I.393) と比較すると、磁場侵入長は超伝導転移によって光子が有限の質量を持つようになった結果現れたコンプトン波長と等しいことが分かる。即ち、磁場の侵入が妨げられた原因は超伝導体内で光子が有限の質量も持つようになったことにより、電磁気力の到達距離が有限になったことに起因している解釈することができる。方程式 (I.405) にこの結果を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial j_y}{\partial x} &= -\frac{c}{4\pi\lambda^2} B_z, \\ j_y &= \frac{c}{4\pi\lambda} B_0 e^{-x/\lambda}, \end{aligned} \quad (\text{I.408})$$

のように電流密度が得られる。金属中の超伝導クーパーペアー数を $n_c \sim 10^{22} \text{cm}^{-3}$ とすると磁場侵入長は $\lambda \sim 5 \times 10^{-6} \text{cm} \times 50 \text{nm}$ 程度である。式 (I.382) と式 (I.405) から磁場侵入長が、 T_c 近傍で $(T_c - T)^{-1/2}$ に比例して温

度が臨界温度に近づくにつれて増大する。

磁場ゼロ $\vec{A} = 0$ の超伝導体内部で $\Psi = \sqrt{n_c}$ とすると方程式 (I.386) が、 $\Delta\Psi = 0$ となり秩序パラメータが超伝導体内部で一様になる解がこの方程式の解であることが確かめられる。これがゼロ次解であり、ここから微小なズレ Ψ_1 が生じたとする。微小量の一次で Ψ_1 が満たす方程式は以下のようになる。以下簡単のため Ψ_1 が x だけに依存するとする。

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{4m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_1 &= a\Psi_1 - 3b\Psi_0^2\Psi_1 = -2a\Psi_1, \\ \frac{d^2}{dx^2} \Psi_1 &= \frac{8ma}{\hbar^2} \Psi_1. \end{aligned} \quad (\text{I.409})$$

二つの独立な解の内無限遠で有界となる解は

$$e^{-\sqrt{2}x/\xi}, \quad \xi = \left(\frac{\hbar^2}{4ma} \right)^{1/2}, \quad (\text{I.410})$$

である。秩序パラメータの擾乱が発生しても距離 ξ 程度でフェードアウトすることを示している。この距離 ξ を coherent length と呼ぶ。臨界温度近辺では、coherent length は $(T_c - T)^{-1/2}$ に比例して温度が臨界温度に近づくにつれて増大する。第 I 種超伝導体では、コヒーレンス長の典型的長さは $\xi \sim 10^{-4}\text{cm}$ 程度であり、磁場侵入長より一桁程度長い。

GL 理論によれば、臨界温度以下で自由エネルギーが臨界温度以上での自由エネルギーより低い値を持つ状態が安定となる。外部から磁場が掛かりこの差額分が埋め合わされると超伝導状態が壊れて常伝導状態に戻る。この臨界となる磁場を B_c とすると臨界磁場は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \frac{B_c^2}{8\pi} &= \frac{a^2}{2b}, \\ B_c &= \left(\frac{4\pi a^2}{b} \right)^{1/2} \propto (T_c - T). \end{aligned} \quad (\text{I.411})$$

臨界磁場とコヒーレント長、磁場侵入長の間には以下の関係が成り立つ。

$$2\pi\sqrt{2}B_c\xi\lambda = \frac{\pi\hbar c}{|e|}. \quad (\text{I.412})$$

第 I 種超伝導体で出来たリング状の導体を考える。リングで囲まれた内部

空間に磁場が貫くいているとする。関係式 (I.395) よりベクトルポテンシャルと波動関数の位相の勾配の以下の関係式が得られる。

$$\vec{A} = \frac{\hbar c}{2e} \vec{\nabla} \theta - \frac{mc}{2e^2 n_c} \vec{j}. \quad (\text{I.413})$$

リングの断面の半径が磁場侵入長より十分大きければ、リングの断面の中心付近では $\vec{j} = 0$ として良い。そこでリング断面の中心を結んだ閉経路に沿って式 (I.413) の線積分を行うと次の結果をえる。

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{r} = \frac{\hbar c}{2e} \oint_L \vec{\nabla} \theta \cdot d\vec{r} \\ \Phi = n \frac{\pi \hbar c}{e}. \quad (\text{I.414})$$

左辺の計算では、ストークスの定理を用いてベクトルポテンシャルの閉経路での積分が経路で囲まれる領域を貫く磁束 Φ に等しいことを用いた。右辺の変形では、波動関数 Ψ が一価関数であることを用いた。ここで n は整数である。この結果は、超伝導体で出来たリングを貫く磁束が、磁束単位

$$\Phi_0 = \frac{\pi \hbar c}{e}, \quad (\text{I.415})$$

の整数倍に限られることを示している。これが、磁束の量子化と呼ばれる現象である。

超伝導転移後は、秩序パラメータの絶対値の自乗が有限の値 (I.383) を持つ。これは、基底状態が転移し、新たな基底状態での場の量の期待値が (I.383) を持つようになったと解釈できる。そこで秩序パラメータを二つの場を表す変数 $\hat{h}, \hat{\theta}$ を用いて以下のように表す。

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta/v} (v + \hat{h}). \quad (\text{I.416})$$

ここで $v \equiv \sqrt{n_c}$ である。これをラグランジアン (I.384) に代入すると以下のようなになる。

$$\mathcal{L} \sim \frac{\hbar^2}{4m} \vec{\nabla} \hat{h} \cdot \vec{\nabla} \hat{h} - a \hat{h}^2 + \frac{e^2}{mc^2} v^2 A^2 + \frac{\hbar^2}{4m} \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{\nabla} \theta + \frac{1}{8\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2, \quad (\text{I.417})$$

この結果は、秩序パラメータの基底状態での期待値が有限の値 v を持つこ

とでベクトル場が質量をもち、場 \hat{h} が質量

$$m_h c^2 = 2\sqrt{m c^2 a}, \quad (\text{I.418})$$

を持つ素励起を表し、場 θ は質量ゼロの素励起を表すことを示している。場 \hat{h} が Higgs 場と呼ばれるものに対応する。場 $\hat{\theta}$ が Goldstone ボソンである。

1.9.7 The Abelian Higgs model

1.9.8 Bogoluibov 変換の母関数

この例の Bogoluibov 変換を与える変換の母関数を求める。一般に式 (I.318) の形のハミルトニアンを対角化する変換の母関数は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} G &= \sum_{\vec{k}} i\delta_k (C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger - C_{-\vec{k},\downarrow} C_{\vec{k},\uparrow}), \\ \cos 2\delta_k &\equiv \frac{\xi_k}{E_k} = u_k^2 - v_k^2, \\ \sin 2\delta_k &\equiv \frac{\Delta}{E_k} = 2u_k v_k. \end{aligned} \quad (\text{I.419})$$

この母関数は円ミート演算子である。電子の生成消滅演算子とこの母関数との交換関係は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} [G, C_{\vec{k},\uparrow}] &= -i\delta_k C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger, \\ [G, C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger] &= i\delta_k C_{\vec{k},\uparrow}. \end{aligned} \quad (\text{I.420})$$

この結果と Baker-Hausdolf の関係式より電子の生成消滅演算子の G による変換則が以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} e^{iG} C_{\vec{k},\uparrow} e^{-iG} &= C_{\vec{k},\uparrow} + \delta_k C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger - \frac{1}{2!} \delta_k^2 C_{\vec{k},\uparrow} - \frac{1}{3!} \delta_k^3 C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger, \\ &= \cos \delta_k C_{\vec{k},\uparrow} + \sin \delta_k C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger = u_k C_{\vec{k},\uparrow} + v_k C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger, \\ &= \alpha_{\vec{k},\uparrow} e^{-i\omega_k t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{iG} C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger e^{-iG} &= C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger - \delta_k C_{\vec{k},\uparrow} - \frac{1}{2!} \delta_k^2 C_{-\vec{k},\uparrow}^\dagger + \frac{1}{3!} \delta_k^3 C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger, \\
&= \cos \delta_k C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger - \sin \delta_k C_{\vec{k},\uparrow} = -v_k C_{\vec{k},\uparrow} + u_k C_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger, \\
&= \alpha_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger e^{i\theta} e^{i\omega_k t}.
\end{aligned} \tag{I.421}$$

I.10 漸近場近似

ハミルトニアン H で表される系のシュレディンガー方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H \psi(t), \tag{I.422}$$

である。この形式的な解は以下のように書ける。

$$\psi(t) = e^{-iHt/\hbar} \psi(0). \tag{I.423}$$

一方ハイゼンベルグ描像では、各演算子が以下のハイゼンベルグの運動方程式を満たし

$$i\hbar \frac{dA(t)}{dt} = [A(t), H(t)]. \tag{I.424}$$

状態は時間変化しない Φ とする。場の理論では、しばしば相互作用描像が用いられる。ハミルトニアンを $H(t) = H_0(t) + H_I(t)$ のように自由場の量と相互作用部に分離する。場の量は以下の方程式を満たし

$$i\hbar \frac{dA(t)}{dt} = [A(t), H_0(t)], \tag{I.425}$$

状態関数は以下の方程式を満たすとする。

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(t) = H_I(t) \Psi(t). \tag{I.426}$$

即ち相互作用による効果のみ波動関数の時間変化に押し付け自由場の時間変化は場の量に押し付けるのである。相互作用がなければ、波動関数はハイゼンベルグ描像のものと一致するので、二つの描像の波動関数はユニタリ演算子 $U(t)$ を用いて以下の関係で結ばれる。

$$\Psi(t) = U(t) \Phi, \tag{I.427}$$

$$U(0) = 0, \quad (\text{I.428})$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t) = H_I(t)U(t). \quad (\text{I.429})$$

この方程式を形式に解くと以下のようなになる。

$$U(t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 H(t_1)U(t_1). \quad (\text{I.430})$$

これから以下の無限級数が会として得られる。

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1)H_I(t_2) \cdots H_I(t_n) \quad (\text{I.431})$$

このユニタリー変換を用いてハイゼンベルグ描像の場の量 $\phi_H(x)$ と相互作用描像の場の量 $\phi_I(x)$ は以下の関係で結ばれる。

$$\phi_I(x) = U^{-1}(t)\phi_H(x)U(t). \quad (\text{I.432})$$

相互作用描像は、「場を量子化して現れる量子を自由な場の量子で表し、例えばそれらの量子が遭遇した時空中の一点で相互作用が起きたと扱う描像」ととりあえず捉えておこう。しかし、この描像は量子力学的不確定性原理と相入れない。例えば、運動量 $\hbar\vec{k}$ でエネルギー E_k のある粒子と運動量 $\hbar\vec{q}$ でエネルギー E_q のある粒子が時空中の一点 x で遭遇して散乱し、それぞれ運動量、エネルギーが $\hbar\vec{k}', E_{k'}, \hbar\vec{q}', E_{q'}$ に変化して飛び去ったと考えよう。この表現は、散乱前後の各粒子の運動量・エネルギーが確定しており且つ散乱が起きた時空点も確定していることを前提にしている。これは明らかに不確定性原理に反している。運動量・エネルギーが確定している場合、全ての粒子が全ての時空点で等しい確率で見出されることになり、何時何処で相互作用したかと特定することができない。粒子を様々な運動量とエネルギーの波の重ね合わせの結果である波束として扱えばこの問題は解決する。しかし、一々波束を扱うのは煩雑である。そこで、 $t \rightarrow \infty$ の極限で相互作用が断熱的に切れて、無限の過去と未来ではあたかも自由粒子のように振る舞うように扱う。そこで相互作用ハミルトニアンを

$$H_\varepsilon(t) \equiv e^{-\varepsilon|t|} H_I(t), \quad (\text{I.433})$$

に置き換える。ただし、 ε は正の微小量であり、 $|t| \rightarrow \infty$ の極限を取って相

相互作用を切った後で $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとって元の相互作用ハミルトニアンを復元する。このような因子を断熱因子と呼ぶ。反応が起きる十分前、すなわち粒子間の相互作用が無視できる時のハイゼンベルグ描像の場の量を用いて漸近場を以下のように定義する。

$$\phi^{\text{in}}(x) \equiv U_\varepsilon^{-1}(-\infty)\phi_H(x)U_\varepsilon(-\infty). \quad (\text{I.434})$$

漸近場は、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を最後に取りするという約束を守れば、 $t = -\infty$ で相互作用描像の場と一致する。このような前提の元、相互作用描像は冒頭に記載した「」で括った文章の内容で相互作用を扱う描像と第ゼロ近似では、捉えて良い。

I.11 Green 関数

時空中の二点 x, x' におけるある場 $\phi(x), \phi(x')$ の時間順序積の真空期待値をグリーン関数と呼び、以下のように書ける。

$$i\hbar G_I(x, x') = \theta(t - t') \langle 0 | \phi_I(x) \phi_I^\dagger(x') | 0 \rangle - \theta(t' - t) \langle 0 | \phi_I^\dagger(x') \phi_I(x) | 0 \rangle, \quad (\text{I.435})$$

$$= \langle 0 | T(\phi_I(x) \phi_I^\dagger(x')) | 0 \rangle. \quad (\text{I.436})$$

ここで $T(\phi^\dagger(x)\phi(x'))$ は T 積（時間順序積）と呼ばれる演算で、カッコ内の複数の場を時間の若い順に右から並べた全ての可能な結果について書き下せという指令を与えるものである。ここで扱っている場がフェルミ場であることから順番の入れ替え一回につき符号が変わることを用いた。二つの場の場合は、式 (I.435) の $\langle 0 | 0 \rangle$ で囲われた中の量が T 積を具体的に書き下した形になっている。 $\phi_I(x)$ をフェルミオン場 (I.252) として二つの場の真空期待値を計算すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi_I(x) \phi_I^\dagger(x') | 0 \rangle &= \sum_{\vec{k}} \sum_{l'} \langle 0 | \phi_I(x) | \vec{k}, l' \rangle \langle \vec{k}, l' | \phi_I^\dagger(x') | 0 \rangle \\ &= \sum_{\vec{k}(k \geq k_F)} \langle 0 | \phi_I(x) | \vec{k}, l \rangle \langle \vec{k}, l | \phi_I^\dagger(x') | 0 \rangle + \sum_{\vec{k}(k < k_F)} \langle 0 | \phi_I(x) | \vec{k}, l \rangle \langle \vec{k}, l | \phi_I^\dagger(x') | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}(k \geq k_F)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - iE_k t/\hbar} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}' + iE_k t'/\hbar} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}(k \geq k_F)} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{x}') - iE_k(t - t')/\hbar}, \quad (\text{I.437}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \phi_l^\dagger(x') \phi_l(x) | 0 \rangle &= \sum_{\vec{k}(k \geq k_F)} \langle 0 | \phi_l^\dagger(x') | \vec{k}, l \rangle \langle \vec{k}, l | \phi_l(x) | 0 \rangle + \sum_{\vec{k}(k < k_F)} \langle 0 | \phi_l^\dagger(x') | \vec{k}, l \rangle \langle \vec{k}, l | \phi_l(x) | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}(k < k_F)} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}' - i|E_k|t'/\hbar} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i|E_k|t/\hbar} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}(k < k_F)} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') + i|E_k|(t-t')/\hbar}.
\end{aligned} \tag{I.438}$$

この計算の途中で二つの場の間に完全系

$$\sum_{\vec{k}} \sum_l |\vec{k}, l\rangle \langle \vec{k}, l| = 1, \tag{I.439}$$

を挟んだ。したがって、グリーン関数 (I.435) の第 2 項は、基底状態から時刻 t に電子が生成されて時刻 t' にその電子が消滅する過程を表し、第 1 項は真空から時刻 t' に基底状態からホールが生成されて時刻 t にそのホールが消滅する過程を表している。ヘビサイドステップ関数は、正の微小量 ε を用いて以下のようにフーリエ積分表示できる。

$$\theta(t-t') = i \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega + i\varepsilon}. \tag{I.440}$$

$$\begin{aligned}
\theta(t'-t) &= i \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t'-t)}}{\omega + i\varepsilon} = i \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{-d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{-\omega + i\varepsilon} \\
&= -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega - i\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{I.441}$$

積分は実軸上で行う。波数での和を以下の公式を用いて積分に変換する。

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k. \tag{I.442}$$

以上の結果を用いるとグリーン関数は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
i\hbar G(x, x') &= i \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega \left(\theta(k - k_F) \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') - i(\omega + E_k/\hbar)(t-t')}}{\omega + i\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. + \theta(k_F - k) \frac{e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') + i(|E_k|/\hbar - \omega)(t-t')}}{\omega - i\varepsilon} \right)
\end{aligned} \tag{I.443}$$

第一項で $\omega' = \omega + E_k/\hbar$ と第二項で $\omega' = \omega - |E_k|/\hbar$ と置き換え、更に第二項で $\vec{k}' = -\vec{k}$ と置き換える。最後 ω' を ω に \vec{k}' を \vec{k} に書き直し以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
i\hbar G(x, x') &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega \left(\theta(k - k_F) \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')-i\omega(t-t')}}{\omega - E_k/\hbar + i\varepsilon} \right. \\
&\quad \left. + \theta(k_F - k) \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')-i\omega(t-t')}}{\omega + |E_k|/\hbar - i\varepsilon} \right). \tag{I.444}
\end{aligned}$$

ここまで φ の詳細について何も語って来なかったが、これには前節で述べた漸近場を採用する。漸近場が満たす方程式は、第ゼロ近似で (I.223) から相互作用項を省いた、自由な場が満たす方程式

$$i\hbar\partial_t\varphi_l(x) + \left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \varepsilon_F \right) \varphi_l(x) = 0, \tag{I.445}$$

である。左辺に現れた演算子をグリーン関数に作用すると以下のようにグリーン関数が満たす方程式が導かれる。

$$\begin{aligned}
\left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \varepsilon_F \right) G(x, x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega \left(\theta(k - k_F) \frac{\hbar\omega - E_k}{\hbar\omega - E_k + i\varepsilon\hbar} \right. \\
&\quad \left. + \theta(k_F - k) \frac{\hbar\omega - E_k}{\hbar\omega + |E_k| - i\varepsilon\hbar} \right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')-i\omega(t-t')} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')-i\omega(t-t')} \\
&= \delta^4(x - x'). \tag{I.446}
\end{aligned}$$

これは古典物理で定義されたグリーン関数の満たす方程式と同じである。

付録 J

Mattis-Bardeen Theory

常伝導金属と超伝導金属の高周波電磁波に対する電磁応答のモデルとして広く使われている Mattis-Bardeen theory (Mattis, Bardeen, 1958, Phys.Rev. Vol.111. 412) を紹介する。

J.1 電子の不純物による散乱

ここでは、Murotani, Shimano, (2019), Physical Review B 99, 224510 の議論を基本に不純物による超伝導体中の準粒子散乱の定式化を行う。不純物が存在しない金属中のフェルミ面近傍の自由電子のハミルトニアンを H_0 とすると

$$H_0 w_{\vec{k}}(x) = \xi_{\vec{k}} w_{\vec{k}}(x), \quad (\text{J.1})$$

を満たすここで

$$w_{\vec{k}}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega_{\vec{k}}t}, \quad (\text{J.2})$$

である。不純物の存在による静電ポテンシャルエネルギーを H_{imp} とする。このときの固有状態を $\tilde{w}_{\vec{k}}$ 、固有エネルギーを $\tilde{\xi}_{\vec{k}}$ とすると

$$(H_0 + H_{imp}) \tilde{w}_{\vec{k}}(x) = \tilde{\xi}_{\vec{k}} \tilde{w}_{\vec{k}}(x), \quad (\text{J.3})$$

を満たす。不純物の存在は、系の並進対称性を破るため、運動量 $\hbar\vec{k}$ は保存しない。しかし、磁性不純物の存在が無視できれば、時間反転対称性は保持される。その為、

$$\begin{aligned}\vec{w}_{-\vec{k}}(x) &= \vec{w}_{\vec{k}}^*(x), \\ \vec{E}_{-\vec{k}} &= \vec{E}_{\vec{k}},\end{aligned}\quad (\text{J.4})$$

が成り立つように固有関数を選択することができる。この関係式は、不純物が存在しない固有関数に対しても成立する。以下不純物散乱は、同じバンドの中でのみ起きると仮定する。すると不純物が存在するときの固有モードは、不純物が存在しないときの固有モードの線形結合で表すことができる。

$$\vec{w}_{\vec{k}}(x) = \sum_{\vec{k}'} a_{\vec{k}\vec{k}'} w_{\vec{k}'}(x) \quad (\text{J.5})$$

正規直交性および完全性から展開係数は以下の関係式を満たす。

$$\sum_{\vec{k}''} a_{\vec{k}\vec{k}''}^* a_{\vec{k}'\vec{k}''} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}. \quad (\text{J.6})$$

さらに関係式 (J.4) より

$$\begin{aligned}\vec{w}_{-\vec{k}} &= \sum_{\vec{k}'} a_{-\vec{k}\vec{k}'} w_{\vec{k}'} = \sum_{\vec{k}'} a_{-\vec{k}-\vec{k}'} w_{-\vec{k}'} = \sum_{\vec{k}'} a_{-\vec{k}-\vec{k}'} w_{\vec{k}'} \\ &= \vec{w}_{\vec{k}}^* = \sum_{\vec{k}'} a_{\vec{k}\vec{k}'}^* w_{\vec{k}'}\end{aligned}$$

であるから

$$a_{-\vec{k}-\vec{k}'} = a_{\vec{k}\vec{k}'}^* \quad (\text{J.7})$$

が成り立つ。電子の消滅演算子 $\phi(x)_\sigma$ は、不純物が存在したときの固有状態および不純物が存在しないときの固有状態で展開すると以下のように書ける。

$$\phi_\sigma(x) = \sum_{\vec{k}'} C_{\vec{k}'\sigma} w_{\vec{k}'}(x) = \sum_{\vec{k}'} \tilde{C}_{\vec{k}'\sigma} \vec{w}_{\vec{k}'}(x) = \sum_{\vec{k}'} \sum_{\vec{k}''} \tilde{C}_{\vec{k}''\sigma} a_{\vec{k}'\vec{k}''} w_{\vec{k}''}(x). \quad (\text{J.8})$$

最後の変形では式 (J.5) を代入した。以下の関係式を得る。

$$C_{\vec{k}\sigma} = \sum_{\vec{k}'} a_{\vec{k}'\vec{k}} \tilde{C}_{\vec{k}'\sigma}. \quad (\text{J.9})$$

超伝導状態にある電子の相互作用ハミルトニアン H_1 は、以下のように書ける。

$$H_1 = -g \sum_{\vec{k}\vec{k}'} C_{\vec{k}\uparrow}^\dagger C_{-\vec{k}\downarrow} C_{-\vec{k}'\downarrow} C_{\vec{k}'\uparrow}. \quad (\text{J.10})$$

これに式 (J.9) を代入すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} H_1 &= -g \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \sum_{\vec{k}_1\vec{k}} a_{\vec{k}_1\vec{k}}^* \tilde{C}_{\vec{k}_1\uparrow}^\dagger \sum_{\vec{k}_2} a_{-\vec{k}_2-\vec{k}}^* \tilde{C}_{-\vec{k}_2\downarrow}^\dagger \sum_{\vec{k}_3} a_{-\vec{k}_3-\vec{k}'} \tilde{C}_{-\vec{k}_3\downarrow} \sum_{\vec{k}_4} a_{\vec{k}_4\vec{k}'} \tilde{C}_{\vec{k}_4\uparrow} \\ &= -g \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \sum_{\vec{k}_1\vec{k}} a_{\vec{k}_1\vec{k}}^* \tilde{C}_{\vec{k}_1\uparrow}^\dagger \sum_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_2\vec{k}} \tilde{C}_{-\vec{k}_2\downarrow}^\dagger \sum_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}_3\vec{k}'} \tilde{C}_{-\vec{k}_3\downarrow} \sum_{\vec{k}_4} a_{\vec{k}_4\vec{k}'} \tilde{C}_{\vec{k}_4\uparrow} \\ &= -g \sum_{\vec{k}_1\vec{k}_3} \sum_{\vec{k}_1\uparrow} \tilde{C}_{\vec{k}_1\uparrow}^\dagger \tilde{C}_{-\vec{k}_1\downarrow}^\dagger \tilde{C}_{-\vec{k}_3\downarrow} \tilde{C}_{\vec{k}_3\uparrow} \end{aligned} \quad (\text{J.11})$$

この結果は、不純物の存在は電子イオン相互作用に影響を与えないことを示している。したがって、不純物散乱が状態密度ほとんど変えないとすると $\tilde{\xi}_k \sim \xi_k$ である。これらの条件のもとでは超伝導体のエネルギーギャップに影響を与えない。

J.2 Dipole 近似

荷電粒子系と電磁波との相互作用を記述する最低次数の近似である Dipole 近似の基礎について解説する。電磁波と相互作用する非相対論的な電荷 q 、質量 m の荷電粒子系のハミルトニアンは以下のように書ける。

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\phi \quad (\text{J.12})$$

ここで \vec{A}, ϕ は、それぞれ電磁波のベクトルポテンシャル、スカラーポテンシャルである。以下のクーロンゲージを採用する。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \phi = 0. \quad (\text{J.13})$$

クーロンゲージでは電場、磁場が以下のように書き表される。

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{\mathcal{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (\text{J.14})$$

クーロンゲージでは $(\vec{p} \cdot \vec{A}) = 0$ なので、ハミルトニアンが以下のように書き表される。

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{q}{mc} \vec{A} \cdot \vec{p} + \frac{q^2 A^2}{2mc^2}, \quad (\text{J.15})$$

第三項と第二項の比を評価する。

$$\eta \equiv \frac{qpA/mc}{e^2 A^2 / 2mc^2} = \frac{2q\hbar k_F / mc}{(\hbar^2 / me^2)(q^4 / \hbar^2 c^2)A} = \frac{2e\hbar k_F / mc}{\alpha^2 a_0 A} \quad (\text{J.16})$$

ここで $q = -e$ として、 $\alpha = 1/137$ は fine structure constant で a_0 はボーア半径である。電磁波の角振動数を ω とすると $E \sim (\omega/c)A$ である。したがって、

$$\eta^2 \sim \frac{16\pi}{n_{ph}(\alpha a_0)^3} \frac{a_0}{\lambda} \frac{\epsilon_F}{mc^2} \sim 8.5 \times 10^{16}, \quad (\text{J.17})$$

となり第三項は十分無視できる。ここで入射電磁波の光子密度 $n_{ph} \sim E^2 / \hbar\omega \sim 400\text{cm}^{-3}$ として CMB の光子密度を入れた。入射電磁波の波長として CMB スペクトルのピーク周波数に対応する $\lambda = 0.2\text{cm}$ を入れた。フェルミエネルギーとしてアルミの値 (I.243) を代入し、荷電粒子は電子として電子質量 $mc^2 = 0.511\text{MeV}$ を代入した。以上の議論を元に電磁波の相互作用としてハミルトニアン (J.15) の第二項まで扱う近似を採用する。これが Dipole 近似である。Dipole 近似の元での相互作用ハミルトニアンは以下ようになる。

$$H_{in} = \frac{i\hbar q}{mc} \vec{A} \cdot \vec{\nabla}. \quad (\text{J.18})$$

J.3 高周波電磁波と金属中の電子系の相互作用

J.3.1 温度ゼロ

超伝導状態にある電子系と高周波電磁波の相互作用を扱う。常伝導金属の自由電子のハミルトニアン H_0 は式 (I.219) で表される。一方、超伝導状態にある金属中の自由電子（漸近場電子）のハミルトニアン H_0 は式 (I.313)

あるいは (I.319) で表される。クーロンゲージを採用し 4 元電磁ポテンシャルは、

$$A^\mu(x) = (0, \vec{A}(x)), \quad (\text{J.19})$$

で与えられる。ベクトルポテンシャルは、モード分解することで以下のように表示するとする。

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \sum_{\omega} \vec{A}_{\omega}(\vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (\text{J.20})$$

この電磁場と相互作用する漸近場のシュレディンガー方程式とその複素共役を具体的に書き下してみる。以下簡単のため位相は $\alpha = 0$ とする。

$$i\hbar \partial_t \phi_{\uparrow}^{in}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi_{\uparrow}^{in}(x) - \frac{i\hbar e}{mc} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \phi_{\uparrow}^{in}(x) + \frac{e^2}{2mc} A^2 \phi_{\uparrow}^{in}(x) - \varepsilon_F \phi_{\uparrow}^{in}(x) + \Delta \phi_{\downarrow}^{in\dagger}(x), \quad (\text{J.21})$$

$$i\hbar \partial_t \phi_{\downarrow}^{in}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi_{\downarrow}^{in}(x) - \frac{i\hbar e}{mc} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \phi_{\downarrow}^{in}(x) + \frac{e^2}{2mc} A^2 \phi_{\downarrow}^{in}(x) - \varepsilon_F \phi_{\downarrow}^{in}(x) - \Delta \phi_{\uparrow}^{in\dagger}(x), \quad (\text{J.22})$$

$$i\hbar \partial_t \phi_{\uparrow}^{in\dagger}(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi_{\uparrow}^{in\dagger}(x) - \frac{i\hbar e}{mc} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \phi_{\uparrow}^{in\dagger}(x) - \frac{e^2}{2mc} A^2 \phi_{\uparrow}^{in\dagger}(x) + \varepsilon_F \phi_{\uparrow}^{in\dagger}(x) - \Delta \phi_{\downarrow}^{in}(x), \quad (\text{J.23})$$

$$i\hbar \partial_t \phi_{\downarrow}^{in\dagger}(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi_{\downarrow}^{in\dagger}(x) - \frac{i\hbar e}{mc} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \phi_{\downarrow}^{in\dagger}(x) - \frac{e^2}{2mc} A^2 \phi_{\downarrow}^{in\dagger}(x) + \varepsilon_F \phi_{\downarrow}^{in\dagger}(x) + \Delta \phi_{\uparrow}^{in}(x), \quad (\text{J.24})$$

これらから以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \sum_{\sigma} (\phi_{\sigma}^{in\dagger}(x) \phi_{\sigma}^{in}(x)) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\sigma} [(\phi_{\sigma}^{in\dagger}(x) \nabla^2 \phi_{\sigma}^{in}(x)) - (\nabla^2 \phi_{\sigma}^{in\dagger}(x)) \phi_{\sigma}^{in}(x)] \\ &\quad - \frac{i\hbar e}{mc} \sum_{\sigma} [(\phi_{\sigma}^{in\dagger}(x) \vec{A}(x) \cdot \vec{\nabla} \phi_{\sigma}^{in}(x) + (\vec{A}(x) \cdot \vec{\nabla} \phi_{\sigma}^{in\dagger}(x)) \phi_{\sigma}^{in}(x)] \\ &\quad + 2\Delta (\phi_{\uparrow}^{in\dagger}(x) \phi_{\downarrow}^{in\dagger}(x) + \phi_{\uparrow}^{in}(x) \phi_{\downarrow}^{in}(x)) \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{\sigma} (\phi_{\sigma}^{in\dagger}(x) \vec{\nabla} \phi_{\sigma}^{in}(x) - \vec{\nabla} \phi_{\sigma}^{in\dagger}(x) \phi_{\sigma}^{in}(x)) + \frac{i\hbar e}{mc} \vec{A}(x) \sum_{\sigma} \phi_{\sigma}^{in\dagger} \phi_{\sigma}^{in}(x) \right) \\ &\quad + 2\Delta (\phi_{\uparrow}^{in\dagger}(x) \phi_{\downarrow}^{in\dagger}(x) + \phi_{\uparrow}^{in}(x) \phi_{\downarrow}^{in}(x)) \end{aligned} \quad (\text{J.25})$$

最後の変形では、クーロンゲージであることを用いた。この結果は、有限のギャップエネルギーが存在するとき電化保存則が破れていることを示している。ギャップエネルギーがゼロの時の電荷保存則から電流密度と電荷密度が以下のように求まる。

$$\vec{j}(\vec{r}) = -\frac{\hbar e}{2mi} \sum_{\sigma} (\varphi_{\sigma}^{in\dagger}(x) \vec{\nabla} \varphi_{\sigma}^{in}(x) - \vec{\nabla} \varphi_{\sigma}^{in\dagger}(x) \varphi_{\sigma}^{in}(x)) - \frac{e^2}{mc} \vec{A}(x) \sum_{\sigma} \varphi_{\sigma}^{in\dagger}(x) \varphi_{\sigma}^{in}(x), \quad (\text{J.26})$$

$$\rho_e(\vec{r}) = -e \sum_{\sigma} \varphi_{\sigma}^{in\dagger}(x) \varphi_{\sigma}^{in}(x). \quad (\text{J.27})$$

シュリファアの「超伝導の理論」にならって、これを常磁性電流 (paramagnetic current) $j^{p,\mu}(x)$ と反磁性電流 (diamagnetic current) $j^{d,\mu}(x)$ に分ける。

$$j^{p,\mu}(x) = \left(\rho_e(x), -\frac{\hbar e}{2mi} \sum_{\sigma} (\varphi_{\sigma}^{in\dagger}(x) \vec{\nabla} \varphi_{\sigma}^{in}(x) - \vec{\nabla} \varphi_{\sigma}^{in\dagger}(x) \varphi_{\sigma}^{in}(x)) \right), \quad (\text{J.28})$$

$$j^{d,\mu}(x) = \left(0, \frac{e}{mc} \rho_e(x) \vec{A}(x) \right). \quad (\text{J.29})$$

ただし、 j^{μ} はローレンツ変換に対して4元ベクトルでは無い。ここで第ゼロ成分と空間成分は、次元が異なる。相互作用ハミルトニアンを以下のように常磁性と反磁性の二つに分離する。

$$H^p = -\frac{1}{c} \int d^3\vec{r} j_{\mu}^p(x) A^{\mu}(x) = -\frac{1}{c} \int d^3\vec{r} \vec{j}^p(x) \cdot \vec{A}(x), \quad (\text{J.30})$$

$$H^d = -\frac{1}{c} \int d^3\vec{r} j_{\mu}^d(x) A^{\mu}(x) = -\frac{1}{c} \int d^3\vec{r} \frac{e}{mc} \rho_e(x) \vec{A}(x) \cdot \vec{A}(x). \quad (\text{J.31})$$

相互作用ハミルトニアンは、これら二つの和であり $H_{in} = H^p + H^d$ である。

相互作用描像 (朝長-ディラック描像) では状態関数はの時間発展は以下方程式によって記述される。この時、ゼロ次のハミルトニアンは $H_0 + H_{imp}$ である。

$$i\hbar \partial_t |\psi_T(t)\rangle = H_{in} |\psi_T(t)\rangle, \quad (\text{J.32})$$

$$|\psi_T(t)\rangle = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' e^{st'} H_{in}(t') \right] |I\rangle. \quad (\text{J.33})$$

ここで $|I\rangle$ は初期状態を表し、 s は正の微小量で無限の過去で相互作用が切

れるように導入した断熱因子である。また磁場 \vec{A} は古典的に扱う半古典近似を採用した。相互作用描像では、場の量は自由場の演算子で記述される。電流密度の期待値を微小量の一次までで計算すると以下ようになる。

$$J^\mu(x) = \langle \psi_T(t) | j^\mu(x) | \psi_T(t) \rangle \\ \sim \frac{e}{mc} \langle I | \rho_e(x) | I \rangle A^\mu - \frac{i}{\hbar} \langle I | \left[j^{p,\mu}(x), \int_{-\infty}^t e^{st'} H_{in}(t') dt' \right] | I \rangle. \quad (\text{J.34})$$

$$J^0 \sim -\frac{i}{\hbar} \langle I | \left[\rho_e(x), \int_{-\infty}^t e^{st'} H_{in}(t') dt' \right] | I \rangle, \quad (\text{J.35})$$

$$J^i \sim \langle I | \rho_e(x) | I \rangle A^i(x) - \frac{i}{\hbar} \langle I | \left[j^{p,i}(x), \int_{-\infty}^t e^{st'} H_{in}(t') dt' \right] | I \rangle \quad (\text{J.36})$$

ここでは、電磁波の摂動が加わる前は電流がゼロであるとする。熱平衡状態にある場合は、この仮定は妥当であると考えられる。第一項は、反磁性電流起源であり、第二項は常磁性電流起源である。各成分の具体的計算を進める。

$$J_\omega^0(x) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{st'} \int d^3\vec{r}' \langle I | [\rho_e(\vec{r}, t), \vec{j}^p(\vec{r}', t')] | I \rangle \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r}') e^{-i\omega t} \theta(t-t'), \\ = -\frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' e^{st'} \int d^3\vec{r}' \langle I | [\rho_e(\vec{r}, t), \vec{j}^p(\vec{r}', t')] | I \rangle \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r}') e^{-i\omega t}, \quad (\text{J.37})$$

$$J_\omega^i(x) = \langle I | \rho_e(x) | I \rangle A^i(x) \\ - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{st'} \int d^3\vec{r}' \langle I | [j^{p,i}(\vec{r}, t), \vec{j}^p(\vec{r}', t')] | I \rangle \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r}') \theta(t-t') e^{-i\omega t}, \\ = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' e^{st'} \int d^3\vec{r}' \langle I | [j^{p,i}(\vec{r}, t), \vec{j}^p(\vec{r}', t')] | I \rangle \cdot \vec{A}_\omega(\vec{r}') e^{-i\omega t}. \quad (\text{J.38})$$

式 (I.240) を代入して Paramagnetic current を計算する。以下では、

$$\phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (\text{J.39})$$

で定義される自由場の運動量固有関数を用いた以下の展開の表式を用いる。

$$\varphi_l(r) = \sum_{\vec{k}} C_{\vec{k},l}(t) \phi_{\vec{k}}(\vec{r}). \quad (\text{J.40})$$

すると

$$\vec{j}^p(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar e}{2mi} \sum_{\sigma} (\varphi_{\sigma}^{in\dagger}(x) \vec{\nabla} \varphi_{\sigma}^{in}(x) - \vec{\nabla} \varphi_{\sigma}^{in\dagger}(x) \varphi_{\sigma}^{in}(x))$$

$$= -\frac{\hbar e}{2mi} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} (C_{\vec{k}\sigma}^\dagger(t) C_{\vec{k}'\sigma}(t) \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}) - C_{\vec{k}\sigma}^\dagger(t) C_{\vec{k}'\sigma}(t) \vec{\nabla} \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}))$$

不純物による散乱の効果はこの式に式 (J.9) を代入することで取り入れる。

$$\vec{j}^p(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar e}{2m} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \sum_{\vec{k}_2} (\phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}) - \vec{\nabla} \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \phi_{\vec{k}'}(\vec{r})) a_{\vec{k}_1 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_2 \vec{k}'} \tilde{C}_{\vec{k}_1 \sigma}^\dagger(t) \tilde{C}_{\vec{k}_2 \sigma}(t). \quad (\text{J.41})$$

不純物散乱が存在するときの準粒子の生成消滅演算子を $\tilde{\alpha}^\dagger$, $\tilde{\alpha}$ で表し、電子の生成消滅演算子が以下のように表されるとする。

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\vec{k}, \uparrow}(t) &= u_k \tilde{\alpha}_{\vec{k}, \uparrow} e^{-i\omega_k t} - v_k \tilde{\alpha}_{-\vec{k}, \downarrow}^\dagger e^{i\omega_k t}, \\ \tilde{C}_{\vec{k}, \uparrow}^\dagger(t) &= u_k \tilde{\alpha}_{\vec{k}, \uparrow}^\dagger e^{i\omega_k t} - v_k \tilde{\alpha}_{-\vec{k}, \downarrow} e^{-i\omega_k t}, \\ \tilde{C}_{\vec{k}, \downarrow}(t) &= u_k \tilde{\alpha}_{\vec{k}, \downarrow} e^{-i\omega_k t} + v_k \tilde{\alpha}_{-\vec{k}, \uparrow}^\dagger e^{i\omega_k t}, \\ \tilde{C}_{\vec{k}, \downarrow}^\dagger(t) &= u_k \tilde{\alpha}_{\vec{k}, \downarrow}^\dagger e^{i\omega_k t} + v_k \tilde{\alpha}_{-\vec{k}, \uparrow} e^{-i\omega_k t}. \end{aligned} \quad (\text{J.42})$$

ここで相互作用描像を採用しているので演算子 $\tilde{C}_{\vec{k}, \sigma}$ の時間発展は以下のように書ける。

$$\tilde{C}_{\vec{k}, \sigma}(t) = e^{iH_0(t-t_0)/\hbar} C_{\vec{k}, \sigma}(t_0) e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar}. \quad (\text{J.43})$$

これから以下の結果を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\vec{k}_1, \uparrow}^\dagger(t) \tilde{C}_{\vec{k}_2, \uparrow}(t) &= u_{k_1} u_{k_2} \tilde{\alpha}_{\vec{k}_1, \uparrow}^\dagger \tilde{\alpha}_{\vec{k}_2, \uparrow} e^{i(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})t} + v_{k_1} v_{k_2} \tilde{\alpha}_{-\vec{k}_1, \downarrow} \tilde{\alpha}_{-\vec{k}_2, \downarrow}^\dagger e^{-i(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})t} \\ &\quad - v_{k_1} u_{k_2} \tilde{\alpha}_{-\vec{k}_1, \downarrow} \tilde{\alpha}_{\vec{k}_2, \uparrow}^\dagger e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t} - u_{k_1} v_{k_2} \tilde{\alpha}_{\vec{k}_1, \uparrow}^\dagger \tilde{\alpha}_{-\vec{k}_2, \downarrow} e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t} \end{aligned} \quad (\text{J.44})$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\vec{k}_1, \downarrow}^\dagger(t) \tilde{C}_{\vec{k}_2, \downarrow}(t) &= u_{k_1} u_{k_2} \tilde{\alpha}_{\vec{k}_1, \downarrow}^\dagger \tilde{\alpha}_{\vec{k}_2, \downarrow} e^{i(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})t} + v_{k_1} v_{k_2} \tilde{\alpha}_{-\vec{k}_1, \uparrow} \tilde{\alpha}_{-\vec{k}_2, \uparrow}^\dagger e^{-i(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})t} \\ &\quad + v_{k_1} u_{k_2} \tilde{\alpha}_{-\vec{k}_1, \uparrow} \tilde{\alpha}_{\vec{k}_2, \downarrow}^\dagger e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t} + u_{k_1} v_{k_2} \tilde{\alpha}_{\vec{k}_1, \downarrow}^\dagger \tilde{\alpha}_{-\vec{k}_2, \uparrow} e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t} \end{aligned} \quad (\text{J.45})$$

この結果を式 (J.38) に $|I\rangle$ の平均に代入する。

$$\langle I | j^{p,i}(\vec{r}, t) j^{p,j}(\vec{r}', t') | I \rangle = \sum_{\vec{q}_1} \sum_{\vec{q}_2} \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \langle I | j^{p,i}(\vec{r}, t) | \vec{q}_1, \sigma_1 : \vec{q}_2, \sigma_2 \rangle \langle \vec{q}_2, \sigma_2 : \vec{q}_1, \sigma_1 | j^{p,j}(\vec{r}', t') | I \rangle \quad (\text{J.46})$$

この計算に必要な項を取り出して以下に計算する。

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} \sum_{\vec{k}'_1 \vec{k}'_2} \langle I | \tilde{C}_{\vec{k}'_1, \uparrow}^\dagger(t) \tilde{C}_{\vec{k}'_2, \uparrow}(t) | \vec{q}_1, \sigma_1 : \vec{q}_2, \sigma_2 \rangle \langle \vec{q}_2, \sigma_2 : \vec{q}_1, \sigma_1 | \tilde{C}_{\vec{k}_1, \uparrow}^\dagger(t') \tilde{C}_{\vec{k}_2, \uparrow}(t') | I \rangle \\
&= \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} ((-v_{k_2} u_{k_1})(-u_{k_1} v_{k_2}) + (u_{k_1} v_{k_2})(u_{k_1} v_{k_2})) e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t' - t)} \delta_{\vec{k}'_2, \vec{k}_1} \delta_{\vec{k}'_1, \vec{k}_2} + \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}'_1} v_{k_1}^2 v_{k'_1}^2 \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_1} \delta_{\vec{k}'_2, \vec{k}'_1}
\end{aligned} \tag{J.47}$$

$$\begin{aligned}
2 &= \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} \sum_{\vec{k}'_1 \vec{k}'_2} \langle I | \tilde{C}_{\vec{k}'_1, \downarrow}^\dagger(t) \tilde{C}_{\vec{k}'_2, \downarrow}(t) | \vec{q}_1, \sigma_1 : \vec{q}_2, \sigma_2 \rangle \langle \vec{q}_2, \sigma_2 : \vec{q}_1, \sigma_1 | \tilde{C}_{\vec{k}_1, \downarrow}^\dagger(t') \tilde{C}_{\vec{k}_2, \downarrow}(t') | I \rangle \\
&= \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} ((-v_{k_2} u_{k_1})(-u_{k_1} v_{k_2}) + (u_{k_1} v_{k_2})(u_{k_1} v_{k_2})) e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t' - t)} \delta_{\vec{k}'_2, \vec{k}_1} \delta_{\vec{k}'_1, \vec{k}_2} + \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}'_1} v_{k_1}^2 v_{k'_1}^2 \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_1} \delta_{\vec{k}'_2, \vec{k}'_1}
\end{aligned} \tag{J.48}$$

$$\begin{aligned}
3 &= \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} \sum_{\vec{k}'_1 \vec{k}'_2} \langle I | \tilde{C}_{\vec{k}'_1, \downarrow}^\dagger(t) \tilde{C}_{\vec{k}'_2, \downarrow}(t) | \vec{q}_1, \sigma_1 : \vec{q}_2, \sigma_2 \rangle \langle \vec{q}_2, \sigma_2 : \vec{q}_1, \sigma_1 | \tilde{C}_{\vec{k}_1, \uparrow}^\dagger(t') \tilde{C}_{\vec{k}_2, \uparrow}(t') | I \rangle \\
&= \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} ((-v_{k_2} u_{k_1})(-u_{k_2} v_{k_1}) + (u_{k_1} v_{k_2})(u_{k_2} v_{k_1})) e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t' - t)} \delta_{\vec{k}'_1, -\vec{k}_1} \delta_{\vec{k}'_2, -\vec{k}_2} + \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}'_1} v_{k_1}^2 v_{k'_1}^2 \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_1} \delta_{\vec{k}'_2, \vec{k}'_1}
\end{aligned} \tag{J.49}$$

$$\begin{aligned}
4 &= \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} \sum_{\vec{k}'_1 \vec{k}'_2} \langle I | \tilde{C}_{\vec{k}'_1, \uparrow}^\dagger(t) \tilde{C}_{\vec{k}'_2, \uparrow}(t) | \vec{q}_1, \sigma_1 : \vec{q}_2, \sigma_2 \rangle \langle \vec{q}_2, \sigma_2 : \vec{q}_1, \sigma_1 | \tilde{C}_{\vec{k}_1, \downarrow}^\dagger(t') \tilde{C}_{\vec{k}_2, \downarrow}(t') | I \rangle \\
&= \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} ((v_{k_2} u_{k_1})(u_{k_2} v_{k_1}) + (-u_{k_1} v_{k_2})(-u_{k_2} v_{k_1})) e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t' - t)} \delta_{\vec{k}'_1, -\vec{k}_1} \delta_{\vec{k}'_2, -\vec{k}_2} + \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}'_1} v_{k_1}^2 v_{k'_1}^2 \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_1} \delta_{\vec{k}'_2, \vec{k}'_1}
\end{aligned} \tag{J.50}$$

以上から以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}
&\langle I | j^{p,i}(\vec{r}, t) j^{p,j}(\vec{r}', t') | I \rangle \\
&= \left(\frac{\hbar e}{2m} \right)^2 \sum_{\vec{p} \vec{p}'} \sum_{\vec{k} \vec{k}'} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} (\phi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \partial_i \phi_{\vec{p}'}(\vec{r}) - \partial_i \phi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \phi_{\vec{p}'}(\vec{r})) (\phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \partial_j \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}') - \partial_j \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}')) e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t' - t)} \\
&\quad \times \left(a_{\vec{k}_2, \vec{p}}^* a_{\vec{k}_1, \vec{p}'} a_{\vec{k}_1, \vec{k}}^* a_{\vec{k}_2, \vec{k}'} 4u_{k_1}^2 v_{k_2}^2 + 4a_{-\vec{k}_1, \vec{p}}^* a_{-\vec{k}_2, \vec{p}'} a_{\vec{k}_1, \vec{k}}^* a_{\vec{k}_2, \vec{k}'} u_{k_1} u_{k_2} v_{k_1} v_{k_2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\hbar e}{2m} \right)^2 \sum_{\vec{p} \vec{p}'} \sum_{\vec{k} \vec{k}'} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} (\phi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \partial_i \phi_{\vec{p}'}(\vec{r}) - \partial_i \phi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \phi_{\vec{p}'}(\vec{r})) (\phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \partial_j \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}') - \partial_j \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}')) 4a_{\vec{k}_1, \vec{p}}^* a_{\vec{k}_1, \vec{p}'} a_{\vec{k}_2, \vec{k}}^* a_{\vec{k}_2, \vec{k}'} v_{k_1}^2 v_{k_2}^2
\end{aligned} \tag{J.51}$$

係数 u_{k_1}, v_{k_2} などは、 \vec{k}_1, \vec{k}_2 の大きさのみに依存し、方向に寄らない。したがって、 \vec{k}_1, \vec{k}_2 の係数 $a_{\vec{k}_1, \vec{k}}^* a_{\vec{k}_1, \vec{k}'}$ のような和の内、波数の大きさを固定して

立体角での和を独立に行うことができる。ここで扱う現象に関わる電子は、フェルミ面近傍の電子に限られる。そこで波数の大きさでの和すなわち積分は、フェルミエネルギーからのズレである ξ_k を用いるのが便利である。そこで以下のように不純物散乱による異なる波数間への遷移確率を表す係数の角度積分が以下のようにローレンツプロファイルで書けるとする。

$$\int \frac{d\Omega_{\vec{k}_1}}{4\pi} a_{\vec{k}_1\vec{k}}^* a_{\vec{k}_1\vec{p}'} = \frac{1}{\pi V N_F} \frac{(\hbar\gamma/2)\delta_{\vec{p}'\vec{k}}}{(\xi_{\vec{k}_1} - \xi_{\vec{k}})^2 + (\hbar\gamma/2)^2}. \quad (\text{J.52})$$

ここで N_F は (I.369) で定義されたフェルミ面付近に置けるスピン当たりの状態密度であり、 V は系の体積である。ランダムに分布した不純物による散乱過程を平均的に扱う。ランダムさは、散乱係数 $a_{\vec{k}_1\vec{p}}$ の位相分布のランダムさに現れる。したがって、入射波数ベクトルが \vec{p}' の電子が不純物で散乱され波数 \vec{k}_1 になり更に散乱されて波数 \vec{k} として出ていく一つ一つの過程の散乱振幅は

$$a_{\vec{k}_1\vec{k}}^* a_{\vec{k}_1\vec{p}'}$$

で表されるが、不純物がランダムに分布している時、この振幅の各散乱間の位相がランダムに分布する。この時、不純物散乱間の平均が

$$\langle \sum_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_1\vec{k}}^* a_{\vec{k}_1\vec{p}'} \rangle = \delta_{\vec{p}'\vec{k}}, \quad (\text{J.53})$$

となることが期待される。散乱前後の波数が異なる時、位相のズレが生じ乱雑位相近似により互いに打ち返しあいゼロになる。一方 $\vec{p}' = \vec{k}$ の時

$$a_{\vec{k}_1\vec{k}}^* a_{\vec{k}_1\vec{p}'} = |a_{\vec{k}_1\vec{k}}|^2$$

となり位相差が消えるためランダムに分布した不純物間の散乱間での平均が打ち消し合わず残る。この時、

$$\sum_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_1\vec{k}}^* a_{\vec{k}_1\vec{p}'} \sim N_F V \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{\vec{k}_1} \frac{1}{\pi V N_F} \frac{(\hbar\gamma/2)\delta_{\vec{p}'\vec{k}}}{(\xi_{\vec{k}_1} - \xi_{\vec{k}})^2 + (\hbar\gamma/2)^2} = \delta_{\vec{p}'\vec{k}}, \quad (\text{J.54})$$

となり正規直交条件が再現される。また $\phi_{-\vec{k}} = \phi_{\vec{k}}^*$ である。さらに途中の変形で

$$\begin{aligned}\sum_{\vec{p}} a_{-\vec{k}_1\vec{p}}^* \partial'_i \phi_{\vec{p}}^*(\vec{r}') &= \sum_{\vec{p}} a_{-\vec{k}_1\vec{p}}^* (-i\vec{p}) \phi_{\vec{p}}^*(\vec{r}') = \sum_{\vec{p}} a_{-\vec{k}_1-\vec{p}}^* (i\vec{p}) \phi_{-\vec{p}}^*(\vec{r}') \\ &= \sum_{\vec{p}} a_{\vec{k}_1\vec{p}} i\vec{p} \phi_{\vec{p}}(\vec{r}') = \sum_{\vec{p}} a_{\vec{k}_1\vec{p}} \partial'_i \phi_{\vec{p}}(\vec{r}')\end{aligned}$$

を用いた。これらを踏まえて式 (J.51) は以下のように整理できる。

$$\begin{aligned}&\langle I | j^{p,i}(\vec{r}, t) j^{p,j}(\vec{r}', t') | I \rangle \\ &= \left(\frac{\hbar e}{m} \right)^2 \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2} e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t' - t)} \\ &\quad \times \left((\phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \partial_i \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) \phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}') \partial'_j \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}') + \partial_i \phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}) \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}) \partial'_j \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \phi_{\vec{k}}(\vec{r}')) |a_{\vec{k}_2\vec{k}'}|^2 |a_{\vec{k}_1\vec{k}}|^2 u_{k_1}^2 v_{k_2}^2 \right. \\ &\quad - (\partial_i \phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}) \partial'_j \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}') \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \phi_{\vec{k}}(\vec{r}') + \partial'_j \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \partial_i \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) \phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}') \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}')) |a_{\vec{k}_2\vec{k}'}|^2 |a_{\vec{k}_1\vec{k}}|^2 u_{k_1}^2 v_{k_2}^2 \\ &\quad + (\phi_{\vec{k}}(\vec{r}) \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \partial_i \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \partial'_j \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}') + \partial_i \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) \partial'_j \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}') \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}')) |a_{\vec{k}_1\vec{k}}|^2 |a_{\vec{k}_2\vec{k}'}|^2 u_{k_1} u_{k_2} v_{k_1} v_{k_2} \\ &\quad \left. - (\phi_{\vec{k}}(\vec{r}') \partial'_j \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \partial_i \phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}) \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}) + \partial_i \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}') \partial'_j \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}')) |a_{\vec{k}_1\vec{k}}|^2 |a_{\vec{k}_2\vec{k}'}|^2 u_{k_1} u_{k_2} v_{k_1} v_{k_2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\hbar e}{m} \right)^2 \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2} (2p^i)(2k^j) |a_{\vec{k}_1\vec{p}}|^2 |a_{\vec{k}_2\vec{k}}|^2 v_{k_1}^2 v_{k_2}^2\end{aligned}\tag{J.55}$$

最後の項は、 \vec{p}, \vec{k} が互いに独立であるため重ね合わせの結果ゼロとなる。下から3番目と4番目の項を部分積分を用いて変形すると以下ようになる。無限遠でゼロになる理由は、後に述べる。

$$\begin{aligned}&\langle I | j^{p,i}(\vec{r}, t) j^{p,j}(\vec{r}', t') | I \rangle \\ &= \left(\frac{\hbar e}{m} \right)^2 \sum_{\vec{k}\vec{k}'} \sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2} e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t' - t)} \\ &\quad \times \left((\phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \partial_i \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) \phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}') \partial'_j \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}') + \partial_i \phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}) \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}) \partial'_j \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \phi_{\vec{k}}(\vec{r}')) |a_{\vec{k}_2\vec{k}'}|^2 |a_{\vec{k}_1\vec{k}}|^2 u_{k_1}^2 v_{k_2}^2 \right. \\ &\quad + (\partial_i \phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}) \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}) \partial'_j \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \phi_{\vec{k}}(\vec{r}') + \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \partial_i \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) \phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}') \partial'_j \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}')) |a_{\vec{k}_2\vec{k}'}|^2 |a_{\vec{k}_1\vec{k}}|^2 u_{k_1}^2 v_{k_2}^2 \\ &\quad - (\phi_{\vec{k}}(\vec{r}) \partial'_j \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \partial_i \phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}) \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}') + \partial_i \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}') \partial'_j \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}')) |a_{\vec{k}_1\vec{k}}|^2 |a_{\vec{k}_2\vec{k}'}|^2 u_{k_1} u_{k_2} v_{k_1} v_{k_2} \\ &\quad \left. - (\phi_{\vec{k}}(\vec{r}') \partial'_j \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \partial_i \phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}) \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}) + \partial_i \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \phi_{\vec{k}'}^*(\vec{r}') \partial'_j \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}')) |a_{\vec{k}_1\vec{k}}|^2 |a_{\vec{k}_2\vec{k}'}|^2 u_{k_1} u_{k_2} v_{k_1} v_{k_2} \right)\end{aligned}\tag{J.56}$$

第一項の評価を進めるため、簡単のため相対ベクトル $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ の向きに z 軸をとる。

ここで以下の量を計算する。

$$\begin{aligned}
\rho_{\vec{k}_1}(R) &= \frac{V}{\pi V N_F} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) \frac{(\hbar\gamma/2)}{(\xi_{k_1} - \xi_k)^2 + (\hbar\gamma/2)^2} \\
&= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\pi V N_F} \frac{(\hbar\gamma/2)}{(\xi_{k_1} - \xi_k)^2 + (\hbar\gamma/2)^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} \\
&= \frac{1}{4\pi^2 V} \int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^1 d\mu \frac{(\hbar\gamma/2\pi)}{(\xi_{k_1} - \xi_k)^2 + (\hbar\gamma/2)^2} e^{ikR\mu} \\
&= \frac{1}{4\pi^2 V N_F iR} \int_0^\infty k dk \frac{(\hbar\gamma/2\pi)}{(\xi_{k_1} - \xi_k)^2 + (\hbar\gamma/2)^2} (e^{ikR} - e^{-ikR})
\end{aligned} \tag{J.57}$$

ここで以下の近似を行う。

$$(\xi_{k_1} - \xi_k)^2 = \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^2 (k_1 - k)^2 (k_1 + k)^2 \sim \left(\frac{\hbar^2 k_F}{m} \right)^2 (k_1 - k)^2 = (\hbar v_F)^2 (k_1 - k)^2$$

ここで扱う現象に関わる電子がフェルミ面付近の電子に限られることから波数ベクトルの大きさを k_F で近似した。 $v_F = \hbar k_F / m$ はフェルミ面付近の電子の速度である。すると式 (J.57) は以下のように整理できる。

$$\begin{aligned}
\rho_{k_1}(R) &\sim \frac{1}{4\pi^2 V N_F iR} \int_0^\infty k dk \frac{(\hbar\gamma/2\pi)}{(\hbar v_F)^2 (k_1 - k)^2 + (\hbar\gamma/2)^2} (e^{ikR} - e^{-ikR}) \\
&= \frac{1}{4\pi^2 V N_F iR \hbar v_F} \int_{-k_1}^\infty dp (p + k_1) \frac{(\gamma/2v_F\pi)}{p^2 + (\gamma/2v_F)^2} (e^{ipR + ik_1R} - e^{-ipR - ik_1R}) \\
&\sim \frac{a/\pi}{8\pi^2 V N_F iR \hbar v_F} \int_{-\infty}^\infty dp (e^{ipR + ik_1R} - e^{-ipR - ik_1R}) \left(\left[\frac{1}{p + ia} + \frac{1}{p - ia} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{k_1}{ia} \left[-\frac{1}{p + ia} + \frac{1}{p - ia} \right] \right) \\
&= \frac{a/\pi}{8\pi^2 V N_F iR \hbar v_F} \int_{-\infty}^\infty dp \left[\frac{-e^{-ipR - ik_1R}}{p + ia} \left(1 - \frac{k_1}{ia} \right) + \frac{e^{ipR + ik_1R}}{p - ia} \left(1 + \frac{k_1}{ia} \right) \right] \\
&= \frac{a}{4\pi^2 V N_F iR \hbar v_F} e^{-aR} \left(e^{ik_1R} \left(1 + \frac{k_1}{ia} \right) + e^{-ik_1R} \left(1 - \frac{k_1}{ia} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\sim \frac{k_1}{2\pi V N_F R \hbar v_F} e^{-aR} \sin k_1 R \sim \frac{1}{V} \frac{\sin k_1 R}{k_1 R} e^{-R/2l} \quad (\text{J.58})$$

ここで $a \equiv \gamma/2v_F$ である。また三つ目の等号では、積分の下限を $-\infty$ と近似した。更に四つ目の等号では、ゼロでない寄与を与える項だけ残した。六つ目の等号では $k_1/a \gg 1$ であることを用いた。また $l = v_F/\gamma$ は平均自由行程であり、 k_1 と k_F を適当に行き来している。式 (J.58) で得られた結果が、Mattis-Bardeen の原論文の基本的仮定 (2.6) 式に対応しており、電子の不純物による散乱とどのように関係づいているかがここまでの議論でクリヤーになった。

以上を用いて式 (J.56) を整理すると以下の結果を得る。

$$\begin{aligned} & \langle I | j^{p,i}(\vec{r}, t) j^{p,j}(\vec{r}', t') | I \rangle \\ &= \left(\frac{\hbar e}{m} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_2} \left(2 (\partial'_i \rho_{\vec{k}_1}(R) \partial_j \rho_{\vec{k}_2}(R) + \partial'_i \rho_{\vec{k}_2}(R) \partial_j \rho_{\vec{k}_1}(R)) u_{k_1}^2 v_{k_2}^2 \right. \\ & \quad \left. - 2 (\partial'_i \rho_{\vec{k}_1}(R) \partial_j \rho_{\vec{k}_2}(R) + \partial'_i \rho_{\vec{k}_2}(R) \partial_j \rho_{\vec{k}_1}(R)) u_{k_1} u_{k_2} v_{k_1} v_{k_2} \right) e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t' - t)} \\ &= \left(\frac{\hbar e}{m} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_2} \left(2 \partial'_i \rho_{\vec{k}_1}(R) \partial_j \rho_{\vec{k}_2}(R) (u_{k_1}^2 v_{k_2}^2 + u_{k_2}^2 v_{k_1}^2) \right. \\ & \quad \left. - 4 \partial'_i \rho_{\vec{k}_1}(R) \partial_j \rho_{\vec{k}_2}(R) u_{k_1} u_{k_2} v_{k_1} v_{k_2} \right) e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t' - t)} \\ &= \left(\frac{\hbar e}{m} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_2} \partial'_i \rho_{\vec{k}_1}(R) \partial_j \rho_{\vec{k}_2}(R) \left(1 - \frac{\xi_{k_1} \xi_{k_2} + \Delta_{k_1} \Delta_{k_2}}{E_{k_1} E_{k_2}} \right) e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t' - t)} \\ &= \left(\frac{\hbar e}{m} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_2} \left(-\frac{R^i}{R} \right) \frac{d\rho_{\vec{k}_1}(R)}{dR} \left(\frac{R^j}{R} \right) \frac{d\rho_{\vec{k}_2}(R)}{dR} \left(1 - \frac{\xi_{k_1} \xi_{k_2} + \Delta^2}{E_{k_1} E_{k_2}} \right) e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t' - t)} \end{aligned} \quad (\text{J.59})$$

最後の変形では、ギャップエネルギー Δ に波数依存性がないことを用いた。式 (J.38) に現れる交換関係のもう一方の項は、この結果の t と t' を入れ替えることで以下のように求まる。

$$\begin{aligned} & \langle I | j^{p,j}(\vec{r}', t') j^{p,i}(\vec{r}, t) | I \rangle \\ &= \left(\frac{\hbar e}{m} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_2} \left(-\frac{R^i}{R} \right) \frac{d\rho_{\vec{k}_1}(R)}{dR} \left(\frac{R^j}{R} \right) \frac{d\rho_{\vec{k}_2}(R)}{dR} \left(1 - \frac{\xi_{k_1} \xi_{k_2} + \Delta^2}{E_{k_1} E_{k_2}} \right) e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t - t')} \end{aligned} \quad (\text{J.60})$$

式 (J.59) および (J.60) を式 (J.38) に代入すると求めたい $J^i(x)$ が以下のよう
に求まる。

$$\begin{aligned}
J^i(x) &= -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar e}{m}\right)^2 \int_{-\infty}^t dt' e^{st'} e^{-i\omega t'} \int d^3\vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_2} \\
&\quad \times \left(-\frac{R^i}{R}\right) \frac{d\rho_{\vec{k}_1}(R)}{dR} \left(\frac{R^j}{R}\right) A_{\omega}^j(\vec{r}') \frac{d\rho_{\vec{k}_2}(R)}{dR} \left(1 - \frac{\xi_{k_1}\xi_{k_2} + \Delta^2}{E_{k_1}E_{k_2}}\right) \\
&\quad \times \left(e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t'-t)} - e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t-t')}\right) \\
&= -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar e}{m}\right)^2 \int d^3\vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_2} \\
&\quad \times \left(-\frac{R^i}{R}\right) \frac{d\rho_{\vec{k}_1}(R)}{dR} \left(\frac{R^j}{R}\right) A_{\omega}^j(\vec{r}') \frac{d\rho_{\vec{k}_2}(R)}{dR} \left(1 - \frac{\xi_{k_1}\xi_{k_2} + \Delta^2}{E_{k_1}E_{k_2}}\right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{i} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega - is} + \frac{1}{i} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega + is}\right) \quad (J.61)
\end{aligned}$$

J.3.2 有限温度

有限温度の場合に拡張する。系が温度 T で熱平衡状態にある場合、式 (I.365) で導入された重み係数が以下のように与えられる。波数ベクトル \vec{k} をもつ準粒子のエネルギーは式 (I.297) で与えられる。したがって、熱的に励起された波数 \vec{k} の準粒子の平均個数は Fermi 分布関数

$$f_k = \frac{1}{e^{E_k/k_B T} + 1}, \quad (J.62)$$

で与えられる。これは波数 \vec{k} の準粒子が一つ熱的に励起される確率と解釈することもできる。励起状態では、同じ大きさの波数ベクトルを持ちスピ
ンが逆向きの準粒子が二つ対になって励起される。熱的励起でこのような
準粒子の組みが励起される確率は f_k^2 である。したがって、熱励起により準
粒子の励起が起きている場合、

$$p_k = f_k^2, \quad (J.63)$$

で重み係数が書ける。BCS 基底状態は、準粒子が励起されていない状態と
解釈することができる。熱平衡状態にある時、波数 \vec{k} でスピン上向きの方

態の準粒子が励起されない確率は $1 - f_k$ である。したがって、系が熱平衡状態にある時、

$$g_k = (1 - f_k)^2, \quad (\text{J.64})$$

で重み係数が書ける。以上の結果と規格化条件 (I.367) より残りの重み係数が以下のように求まる。

$$s_k = 2f_k(1 - f_k). \quad (\text{J.65})$$

この結果は、一つの常伝導電子が励起される確率が $f_k(1 - f_k)$ であることを示している。式 (I.361) が示すように常伝導電子一つを励起するには、BCS 基底状態から準粒子一個を励起する必要がある。必要な励起エネルギーが E_k である。したがって、熱的に常伝導電子が一個励起される確率はエネルギー E_k の粒子の熱平衡分布 f_k に、電子に占められていない状態数 $1 - f_k$ を掛けたものに等しい。以下では、上記のような重み係数で決定される熱平衡状態での励起状態を $|BCST\rangle$ と表す。

$$|BCST\rangle = \prod_{\vec{k}} \left[\sqrt{g_k} |BCS_{\vec{k}}\rangle + \sqrt{p_k} |P_{\vec{k}}\rangle + \sqrt{\frac{s_k}{2}} (|S_{\vec{k},\uparrow}\rangle + |S_{-\vec{k},\downarrow}\rangle) \right]. \quad (\text{J.66})$$

有限温度の基底状態による個数演算子の平均は以下ようになる。

$$\begin{aligned} n_{\vec{k},\uparrow} |BCS_{\vec{k}}\rangle &= C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow} (u_k |0\rangle_{\vec{k},\uparrow} |0\rangle_{-\vec{k},\downarrow} + v_k e^{2i\alpha} |1\rangle_{\vec{k},\uparrow} |1\rangle_{-\vec{k},\downarrow}) e^{i\omega_k t} \\ &= v_k e^{2i\alpha} |1\rangle_{\vec{k},\uparrow} |1\rangle_{-\vec{k},\downarrow} e^{i\omega_k t} \\ n_{\vec{k},\uparrow} |P_{\vec{k}}\rangle &= C_{\vec{k},\uparrow}^\dagger C_{\vec{k},\uparrow} (u_k |1\rangle_{\vec{k},\uparrow} |1\rangle_{-\vec{k},\downarrow} - v_k e^{-2i\alpha} |0\rangle_{\vec{k},\uparrow} |0\rangle_{-\vec{k},\downarrow}) e^{-i\omega_k t} \\ &= u_k |1\rangle_{\vec{k},\uparrow} |1\rangle_{-\vec{k},\downarrow} e^{-i\omega_k t} \\ n_{\vec{k},\uparrow} |S_{\vec{k}}\rangle &= n_{\vec{k},\uparrow} (|1\rangle_{\vec{k},\uparrow} |0\rangle_{-\vec{k},\downarrow} + |0\rangle_{\vec{k},\uparrow} |1\rangle_{-\vec{k},\downarrow}) \\ &= |1\rangle_{\vec{k},\uparrow} |0\rangle_{-\vec{k},\downarrow} \\ \langle BCST | n_{\vec{k},\uparrow} | BCST \rangle &= g_k v_k^2 + p_k u_k^2 + \frac{s_k}{2} + 2\sqrt{g_k p_k} u_k v_k \cos(2\omega_k t + 2\alpha). \quad (\text{J.67}) \end{aligned}$$

最後の項がどういう物理的理由で出てきたのかは、よく理解できていないが、位相表示から粒子数表示に変換すると位相 α が $0 \sim 2\pi$ の間のランダムな値をとることになる。すると式 (J.67) を α について平均することになり、

この項からの寄与はキャンセルアウトする。さらにギャップエネルギーの温度依存性を示す式 (I.372) が $j_{0,1}$ の励起状態による期待値として導かれる事を示す。上の結果から以下の結果を得る。

$$\begin{aligned} \langle BCST | j_{0,1}(x) | BCST \rangle &= \frac{2}{V} \sum_{\vec{k}} \left(-u_k v_k \left(g_k + \frac{s_k}{2} \times 2 \right) + v_k u_k \left(p_k + 2 \times \frac{s_k}{2} \right) - \sqrt{p_k g_k} (u_k^2 - v_k^2) (e^{-2i\omega_k t} + e^{2i\omega_k t}) \right) \\ &= -\frac{2}{V} \sum_{\vec{k}} u_k v_k (1 - 2f_k) - \frac{2}{V} \sum_{\vec{k}} f_k (1 - f_k) (u_k^2 - v_k^2) (e^{-2i\omega_k t} + e^{2i\omega_k t}) \end{aligned} \quad (\text{J.68})$$

この式の右辺第 2 項が無視し得る事を以下に示す。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} f_k (1 - f_k) \frac{\xi_k}{E_k} \cos 2\omega_k t \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{e^{E_k/k_B T}}{(e^{E_k/k_B T} + 1)^2} \frac{\xi_k}{E_k} \cos 2\omega_k t \\ &= \frac{mk_F}{2\pi^2 \hbar^2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} d\xi_k \frac{e^{E_k/k_B T}}{(e^{E_k/k_B T} + 1)^2} \frac{\xi_k}{E_k} \cos 2\omega_k t \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{J.69})$$

最後の等号では、被積分関数が ξ_k の奇関数である事を用いた。以上から関係式 (I.372) を温度 T の熱平衡状態にある基底状態での $j_{0,1}$ の期待値として導かれることが示された。

本題は式 (J.38) の状態 $|I\rangle$ を $|BCST\rangle$ に置き換えた時の平均を求めることである。

$$\begin{aligned} J_{\omega}^i(x) &= -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' e^{st'} \int d^3 \vec{r}' \left(\langle BCST | j^{p,i}(\vec{r}, t) j^{p,j}(\vec{r}', t') | BCST \rangle A_{\omega, j}(\vec{r}') e^{-i\omega t} \right. \\ &\quad \left. - \langle BCST | j^{p,j}(\vec{r}', t') j^{p,i}(\vec{r}, t) | BCST \rangle A_{\omega, j}(\vec{r}') e^{-i\omega t} \right). \end{aligned} \quad (\text{J.70})$$

状態 $|BCST\rangle$ の展開に用いている各状態は、それぞれ全ハミルトニアン H のエネルギー固有関数である。状態 $|BCS_{\vec{k}}\rangle$ はエネルギー固有値 0 の基底状態、状態 $|P_{\vec{k}}\rangle$ はエネルギー固有値 $2E_k$ の固有状態で準粒子対が 1 組励起された状態、状態 $|S_{\vec{k}, \uparrow}\rangle$ および $|S_{-\vec{k}, \downarrow}\rangle$ はそれぞれエネルギー固有値 E_k の固有状態で \vec{k}, \uparrow あるいは $-\vec{k}, \downarrow$ の常伝導電子が一つずつ励起された状態を表す。次のように定義される状態 $|E\rangle$ を導入する。

$$|E\rangle = \sum_n \prod_{j=0}^n \left(\alpha_{\vec{k}_j, \uparrow}^\dagger + \alpha_{-\vec{k}_j, \downarrow}^\dagger \right) \sum_m \prod_{i=0}^m \alpha_{\vec{k}_i, \uparrow}^\dagger \alpha_{-\vec{k}_i, \downarrow}^\dagger |BCS\rangle. \quad (\text{J.71})$$

この状態は、以下の完全系の条件を満たす。

$$\begin{aligned} |E\rangle \langle E| &= \sum_n \prod_{j=0}^n \sum_m \prod_{i=0}^m \left(\alpha_{\vec{k}_j, \uparrow}^\dagger + \alpha_{-\vec{k}_j, \downarrow}^\dagger \right) \alpha_{\vec{k}_i, \uparrow}^\dagger \alpha_{-\vec{k}_i, \downarrow}^\dagger |BCS\rangle \langle BCS| \alpha_{-\vec{k}_i, \downarrow} \alpha_{\vec{k}_i, \uparrow} \left(\alpha_{\vec{k}_j, \uparrow} + \alpha_{-\vec{k}_j, \downarrow} \right) \\ &= 1. \end{aligned} \quad (\text{J.72})$$

ここで表記の簡略化のため完全性条件を $|E\rangle \langle E|$ と表した。完全系を用いて式 (J.70) の中の状態 $|BCST\rangle$ による期待値の項を展開する。

$$\langle BCST | j^{p,j_1}(\vec{r}, t) j^{p,j_2}(\vec{r}', t') | BCST \rangle = \langle BCST | j^{p,j_1}(\vec{r}, t) | E \rangle \langle E | j^{p,j_2}(\vec{r}', t') | BCST \rangle \quad (\text{J.73})$$

次に $\langle E | j^{p,j_2}(\vec{r}', t') | BCST \rangle$ に現れる項を計算する。以下 $\vec{k}_3 \neq \vec{k}_4$ の場合を考える。この項の計算の基本は $\langle E | C_{\vec{k}_3, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_4, \uparrow} | BCST \rangle$ と $\langle E | C_{-\vec{k}_3, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_4, \downarrow} | BCST \rangle$ の計算である。ここまでの議論およびこれからの議論では簡単のため生成消滅演算子が不純物の混入により元来のものから修正を受けていることを表す C, α につく \sim を省略している。以下、 $|S_{\vec{k}}\rangle = |S_{\vec{k}, \uparrow}\rangle + |S_{-\vec{k}, \downarrow}\rangle$ と表す。 $C_{\vec{k}_3, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_4, \uparrow}$ が掛かってゼロでない値を返す項は、 $\sqrt{g_{k_4} g_{k_3}} |BCS_{\vec{k}_4}\rangle |BCS_{\vec{k}_3}\rangle$ 、 $\sqrt{g_{k_4} p_{k_3}} |BCS_{\vec{k}_4}\rangle |P_{\vec{k}_3}\rangle$ 、 $\sqrt{p_{k_4} g_{k_3}} |P_{\vec{k}_4}\rangle |BCS_{\vec{k}_3}\rangle$ 、 $\sqrt{p_{k_4} p_{k_3}} |P_{\vec{k}_4}\rangle |P_{\vec{k}_3}\rangle$ 、 $\sqrt{s_{k_4} s_{k_3} / 4} |S_{\vec{k}_4}\rangle |S_{\vec{k}_3}\rangle$ 、 $\sqrt{s_{k_4} g_{k_3} / 2} |S_{\vec{k}_4}\rangle |BCS_{\vec{k}_3}\rangle$ 、 $\sqrt{s_{k_4} p_{k_3} / 2} |S_{\vec{k}_4}\rangle |P_{\vec{k}_3}\rangle$ 、 $\sqrt{s_{k_3} g_{k_4} / 2} |BCS_{\vec{k}_4}\rangle |S_{\vec{k}_3}\rangle$ 、 $\sqrt{s_{k_3} p_{k_4} / 2} |P_{\vec{k}_4}\rangle |S_{\vec{k}_3}\rangle$ の8つである。それぞれの項に $C_{\vec{k}_3, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_4, \uparrow}$ が作用した結果を計算する。ここで相互作用描像での演算子の時間発展を表す関係式 (J.43) より

$$C_{\vec{k}_3, \uparrow}^\dagger(t') C_{\vec{k}_4, \uparrow}(t') = e^{iH_0/\hbar(t'-t_0)} C_{\vec{k}_3, \uparrow}^\dagger(t_0) C_{\vec{k}_4, \uparrow}(t_0) e^{-iH_0/\hbar(t'-t_0)}, \quad (\text{J.74})$$

であり、

$$\begin{aligned} H_0 |BCS_{\vec{k}}\rangle &= 0, \\ H_0 |P_{\vec{k}}\rangle &= 2\hbar\omega_k |P_{\vec{k}}\rangle, \\ H_0 |S_{\vec{k}}\rangle &= \hbar\omega_k |S_{\vec{k}}\rangle, \end{aligned} \quad (\text{J.75})$$

である。以下表記の簡略化のため

$$U = e^{-iH_0/\hbar(t'-t_0)}, \quad (J.76)$$

$$U^\dagger = e^{iH_0/\hbar(t'-t_0)},$$

と表す。各項の下に BCS 論文の表 2 のどれに該当するかが分かるように BCS で用いられている行列要素の表記を書いた。

$$1 \quad C_{\vec{k}_3, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_4, \uparrow} \sqrt{g_{k_3} g_{k_4}} |BCS_{\vec{k}_4}\rangle |BCS_{\vec{k}_3}\rangle$$

$$= U^\dagger \sqrt{g_{k_3} g_{k_4}} v_{k_3} u_{k_3} e^{2i\alpha} |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})t_0}$$

$$XX \ 00 \rightarrow 0X \ X0$$

$$2 \quad C_{\vec{k}_3, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_4, \uparrow} \sqrt{g_{k_4} p_{k_3}} |BCS_{\vec{k}_4}\rangle |P_{\vec{k}_3}\rangle$$

$$= -U^\dagger \sqrt{p_{k_3} g_{k_4}} v_{k_3} v_{k_4} |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-2i\omega_{k_3} t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})t_0}$$

$$XX \ 00 \rightarrow 0X \ X0$$

$$3 \quad C_{\vec{k}_3, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_4, \uparrow} \sqrt{p_{k_4} g_{k_3}} |P_{\vec{k}_4}\rangle |BCS_{\vec{k}_3}\rangle$$

$$= U^\dagger \sqrt{p_{k_4} g_{k_3}} u_{k_4} u_{k_3} |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-2i\omega_{k_4} t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})t_0}$$

$$XX \ 00 \rightarrow 0X \ X0$$

$$4 \quad C_{\vec{k}_3, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_4, \uparrow} \sqrt{p_{k_4} p_{k_3}} |P_{\vec{k}_4}\rangle |P_{\vec{k}_3}\rangle$$

$$= -U^\dagger \sqrt{p_{k_4} p_{k_3}} u_{k_4} v_{k_3} e^{-2i\alpha} |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-2i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})t_0}$$

$$XX \ 00 \rightarrow 0X \ X0$$

$$5 \quad C_{\vec{k}_3, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_4, \uparrow} \sqrt{\frac{S_{k_4} S_{k_3}}{4}} |S_{\vec{k}_4}\rangle |S_{\vec{k}_3}\rangle$$

$$= U^\dagger \sqrt{\frac{S_{k_4} S_{k_3}}{4}} |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})t_0}$$

$$X0 \ 0X \rightarrow 00 \ XX$$

$$6 \quad C_{\vec{k}_3, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_4, \uparrow} \sqrt{\frac{S_{k_4} g_{k_3}}{2}} |S_{\vec{k}_4}\rangle |BCS_{\vec{k}_3}\rangle$$

$$= U^\dagger \sqrt{\frac{S_{k_4} g_{k_3}}{2}} u_{k_3} |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-i\omega_{k_4} t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})t_0}$$

$$X0 \ 00 \rightarrow 00 \ X0$$

$$7 \quad C_{\vec{k}_3, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_4, \uparrow} \sqrt{\frac{S_{k_4} p_{k_3}}{2}} |S_{\vec{k}_4}\rangle |P_{\vec{k}_3}\rangle$$

$$= -U^\dagger \sqrt{\frac{S_{k_4} p_{k_3}}{2}} v_{k_3} e^{-2i\alpha} |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-i(2\omega_{k_3} + \omega_{k_4})t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})t_0}$$

$$X0 \ 00 \rightarrow 00 \ X0$$

$$\begin{aligned}
8 \quad & C_{\vec{k}_3, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_4, \uparrow} \sqrt{\frac{S_{k_3} g_{k_4}}{2}} |BCS_{\vec{k}_4}\rangle |S_{\vec{k}_3}\rangle \\
&= U^\dagger \sqrt{\frac{S_{k_3} g_{k_4}}{2}} v_{k_4} e^{2i\alpha} |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-i\omega_{k_3} t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4}) t_0} \\
&\quad XX \ 0X \rightarrow 0X \ XX \\
9 \quad & C_{\vec{k}_3, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_4, \uparrow} \sqrt{\frac{S_{k_3} P_{k_4}}{2}} |P_{\vec{k}_4}\rangle |S_{\vec{k}_3}\rangle \\
&= U^\dagger \sqrt{\frac{S_{k_3} P_{k_4}}{2}} u_{k_4} |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-i(2\omega_{k_4} + \omega_{k_3}) t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4}) t_0} \\
&\quad XX \ 0X \rightarrow 0X \ XX
\end{aligned} \tag{J.77}$$

次にそれぞれの項に $C_{-\vec{k}_3, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_4, \downarrow}$ が作用した結果を計算する。

$$\begin{aligned}
11 \quad & C_{-\vec{k}_3, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_4, \downarrow} \sqrt{g_{k_3} g_{k_4}} |BCS_{\vec{k}_4}\rangle |BCS_{\vec{k}_3}\rangle \\
&= U^\dagger \sqrt{g_{k_3} g_{k_4}} v_{k_4} u_{k_3} e^{2i\alpha} |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4}) t_0} \\
&\quad XX \ 00 \rightarrow X0 \ 0X \\
12 \quad & C_{-\vec{k}_3, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_4, \downarrow} \sqrt{g_{k_4} P_{k_3}} |BCS_{\vec{k}_4}\rangle |P_{\vec{k}_3}\rangle \\
&= -U^\dagger \sqrt{P_{k_3} g_{k_4}} v_{k_3} v_{k_4} |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-2i\omega_{k_3} t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4}) t_0} \\
&\quad XX \ 00 \rightarrow X0 \ 0X \\
13 \quad & C_{-\vec{k}_3, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_4, \downarrow} \sqrt{P_{k_4} g_{k_3}} |P_{\vec{k}_4}\rangle |BCS_{\vec{k}_3}\rangle \\
&= U^\dagger \sqrt{P_{k_4} g_{k_3}} u_{k_4} u_{k_3} |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-2i\omega_{k_4} t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4}) t_0} \\
&\quad XX \ 00 \rightarrow X0 \ 0X \\
14 \quad & C_{-\vec{k}_3, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_4, \downarrow} \sqrt{P_{k_4} P_{k_3}} |P_{\vec{k}_4}\rangle |P_{\vec{k}_3}\rangle \\
&= -U^\dagger \sqrt{P_{k_4} P_{k_3}} u_{k_4} v_{k_3} e^{-2i\alpha} |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-2i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4}) t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4}) t_0} \\
&\quad XX \ 00 \rightarrow X0 \ 0X \\
15 \quad & C_{-\vec{k}_3, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_4, \downarrow} \sqrt{\frac{S_{k_4} S_{k_3}}{4}} |S_{\vec{k}_4}\rangle |S_{\vec{k}_3}\rangle \\
&= U^\dagger \sqrt{\frac{S_{k_4} S_{k_3}}{4}} |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4}) t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4}) t_0} \\
&\quad 0X \ X0 \rightarrow 00 \ XX \\
16 \quad & C_{-\vec{k}_3, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_4, \downarrow} \sqrt{\frac{S_{k_4} g_{k_3}}{2}} |S_{\vec{k}_4}\rangle |BCS_{\vec{k}_3}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= U^\dagger \sqrt{\frac{S_{k_4} g_{k_3}}{2}} u_{k_3} |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-i\omega_{k_4} t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4}) t_0} \\
&\quad 0X \ 00 \rightarrow 00 \ 0X \\
17 \quad &C_{-\vec{k}_3, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_4, \downarrow} \sqrt{\frac{S_{k_4} p_{k_3}}{2}} |S_{\vec{k}_4}\rangle |P_{\vec{k}_3}\rangle \\
&= -U^\dagger \sqrt{\frac{S_{k_4} p_{k_3}}{2}} v_{k_3} e^{-2i\alpha} |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-i(2\omega_{k_3} + \omega_{k_4}) t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4}) t_0} \\
&\quad 0X \ 00 \rightarrow 00 \ 0X \\
18 \quad &C_{-\vec{k}_3, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_4, \downarrow} \sqrt{\frac{S_{k_3} g_{k_4}}{2}} |BCS_{\vec{k}_4}\rangle |S_{\vec{k}_3}\rangle \\
&= U^\dagger \sqrt{\frac{S_{k_3} g_{k_4}}{2}} v_{k_4} e^{2i\alpha} |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-i\omega_{k_3} t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4}) t_0} \\
&\quad XX \ X0 \rightarrow X0 \ XX \\
19 \quad &C_{-\vec{k}_3, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_4, \downarrow} \sqrt{\frac{S_{k_3} p_{k_4}}{2}} |P_{\vec{k}_4}\rangle |S_{\vec{k}_3}\rangle \\
&= U^\dagger \sqrt{\frac{S_{k_3} p_{k_4}}{2}} u_{k_4} |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-i(\omega_{k_3} + 2\omega_{k_4}) t'} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4}) t_0} \\
&\quad XX \ X0 \rightarrow X0 \ XX \tag{J.78}
\end{aligned}$$

これらの項のエルミート共役をまとめる。

$$\begin{aligned}
21 \quad &\langle BCS_{\vec{k}_2} | \langle BCS_{\vec{k}_1} | C_{\vec{k}_1, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_2, \uparrow} \sqrt{g_{k_1} g_{k_2}} \\
&= \sqrt{g_{k_1} g_{k_2}} v_{k_1} u_{k_2} e^{-2i\alpha} \langle 0 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 1 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2}) t_0} U \\
&\quad 00 \ XX \rightarrow 0X \ X0 \\
22 \quad &\langle P_{\vec{k}_2} | \langle BCS_{\vec{k}_1} | C_{\vec{k}_1, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_2, \uparrow} \sqrt{p_{k_2} g_{k_1}} \\
&= -\sqrt{p_{k_2} g_{k_1}} v_{k_2} v_{k_1} \langle 0 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 1 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{2i\omega_{k_2} t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2}) t_0} U \\
&\quad 00 \ XX \rightarrow 0X \ X0 \\
23 \quad &\langle BCS_{\vec{k}_2} | \langle P_{\vec{k}_1} | C_{\vec{k}_1, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_2, \uparrow} \sqrt{g_{k_2} p_{k_1}} \\
&= \sqrt{p_{k_1} g_{k_2}} u_{k_1} u_{k_2} \langle 0 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 1 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{2i\omega_{k_1} t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2}) t_0} U \\
&\quad 00 \ XX \rightarrow 0X \ X0 \\
24 \quad &\langle P_{\vec{k}_2} | \langle P_{\vec{k}_1} | C_{\vec{k}_1, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_2, \uparrow} \sqrt{p_{k_2} p_{k_1}} \\
&= -\sqrt{p_{k_2} p_{k_1}} v_{k_2} u_{k_1} e^{2i\alpha} \langle 0 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 1 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{2i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4}) t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2}) t_0} U \\
&\quad 00 \ XX \rightarrow 0X \ X0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
25 \quad & \langle S_{\vec{k}_2}^- | \langle S_{\vec{k}_1}^- | C_{\vec{k}_1, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_2, \uparrow} \sqrt{\frac{s_{k_2} s_{k_1}}{4}} \\
& = \sqrt{\frac{s_{k_2} s_{k_1}}{4}} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t_0} U \\
& \quad 0X \ X0 \rightarrow XX \ 00 \\
26 \quad & \langle BCS_{\vec{k}_2}^- | \langle S_{\vec{k}_1}^- | C_{\vec{k}_1, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_2, \uparrow} \sqrt{\frac{g_{k_2} s_{k_1}}{2}} \\
& = \sqrt{\frac{g_{k_2} s_{k_1}}{2}} u_{k_2} \langle 0 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{i\omega_{k_1} t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t_0} U \\
& \quad 00 \ 0X \rightarrow 0X \ 00 \\
27 \quad & \langle P_{\vec{k}_2}^- | \langle S_{\vec{k}_1}^- | C_{\vec{k}_1, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_2, \uparrow} \sqrt{\frac{p_{k_2} s_{k_1}}{2}} \\
& = -\sqrt{\frac{p_{k_2} s_{k_1}}{2}} v_{k_2} e^{2i\alpha} \langle 0 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{i(2\omega_{k_2} + \omega_{k_1})t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t_0} U \\
& \quad 00 \ 0X \rightarrow 0X \ 00 \\
28 \quad & \langle S_{\vec{k}_2}^- | \langle BCS_{\vec{k}_1}^- | C_{\vec{k}_1, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_2, \uparrow} \sqrt{\frac{g_{k_1} s_{k_2}}{2}} \\
& = \sqrt{\frac{g_{k_1} s_{k_2}}{2}} v_{k_1} e^{-2i\alpha} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 1 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{i\omega_{k_2} t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t_0} U \\
& \quad X0 \ XX \rightarrow XX \ X0 \\
29 \quad & \langle S_{\vec{k}_2}^- | \langle P_{\vec{k}_1}^- | C_{\vec{k}_1, \uparrow}^\dagger C_{\vec{k}_2, \uparrow} \sqrt{\frac{p_{k_1} s_{k_2}}{2}} \\
& = \sqrt{\frac{p_{k_1} s_{k_2}}{2}} u_{k_1} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 1 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{i(2\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t_0} U \\
& \quad X0 \ XX \rightarrow XX \ X0 \tag{J.79}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
31 \quad & \langle BCS_{\vec{k}_2}^- | \langle BCS_{\vec{k}_1}^- | C_{-\vec{k}_1, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_2, \downarrow} \sqrt{g_{k_1} g_{k_2}} \\
& = \sqrt{g_{k_1} g_{k_2}} v_{k_1} u_{k_2} e^{-2i\alpha} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t_0} U \\
& \quad 00 \ XX \rightarrow X0 \ 0X \\
32 \quad & \langle P_{\vec{k}_2}^- | \langle BCS_{\vec{k}_1}^- | C_{-\vec{k}_1, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_2, \downarrow} \sqrt{p_{k_2} g_{k_1}} \\
& = -\sqrt{p_{k_2} g_{k_1}} v_{k_2} v_{k_1} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{2i\omega_{k_2} t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t_0} U \\
& \quad 00 \ XX \rightarrow X0 \ 0X \\
33 \quad & \langle BCS_{\vec{k}_2}^- | \langle P_{\vec{k}_1}^- | C_{-\vec{k}_1, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_2, \downarrow} \sqrt{g_{k_2} p_{k_1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{p_{k_1} g_{k_2}} u_{k_1} u_{k_2} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{2i\omega_{k_1} t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t_0} U \\
&\quad 00 \quad XX \rightarrow X0 \quad 0X \\
34 \quad &\langle P_{\vec{k}_2} | \langle P_{\vec{k}_1} | C_{-\vec{k}_1, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_2, \downarrow} \sqrt{p_{k_2} p_{k_1}} \\
&= -\sqrt{p_{k_2} p_{k_1}} v_{k_2} u_{k_1} e^{2i\alpha} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{2i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t_0} U \\
&\quad 00 \quad XX \rightarrow X0 \quad 0X \\
35 \quad &\langle S_{\vec{k}_2} | \langle S_{\vec{k}_1} | C_{-\vec{k}_1, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_2, \downarrow} \sqrt{\frac{g_{k_2} s_{k_1}}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{g_{k_2} s_{k_1}}{4}} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t_0} U \\
&\quad X0 \quad 0X \rightarrow XX \quad 00 \\
36 \quad &\langle BCS_{\vec{k}_2} | \langle S_{\vec{k}_1} | C_{-\vec{k}_1, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_2, \downarrow} \sqrt{\frac{g_{k_2} s_{k_1}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{g_{k_2} s_{k_1}}{2}} u_{k_2} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{i\omega_{k_1} t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t_0} U \\
&\quad 00 \quad 0X \rightarrow X0 \quad 00 \\
37 \quad &\langle P_{\vec{k}_2} | \langle S_{\vec{k}_1} | C_{-\vec{k}_1, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_2, \downarrow} \sqrt{\frac{p_{k_2} s_{k_1}}{2}} \\
&= -\sqrt{\frac{p_{k_2} s_{k_1}}{2}} v_{k_2} e^{2i\alpha} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{i(\omega_{k_1} + 2\omega_{k_2})t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t_0} U \\
&\quad 00 \quad 0X \rightarrow X0 \quad 00 \\
38 \quad &\langle S_{\vec{k}_2} | \langle BCS_{\vec{k}_1} | C_{-\vec{k}_1, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_2, \downarrow} \sqrt{\frac{g_{k_2} s_{k_1}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{g_{k_1} s_{k_2}}{2}} v_{k_1} e^{-2i\alpha} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{i\omega_{k_2} t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t_0} U \\
&\quad X0 \quad XX \rightarrow XX \quad X0 \\
39 \quad &\langle S_{\vec{k}_2} | \langle P_{\vec{k}_1} | C_{-\vec{k}_1, \downarrow}^\dagger C_{-\vec{k}_2, \downarrow} \sqrt{\frac{p_{k_2} s_{k_1}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{p_{k_1} s_{k_2}}{2}} u_{k_1} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_1, \uparrow} e^{i(2\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t} e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t_0} U \\
&\quad X0 \quad XX \rightarrow XX \quad X0 \tag{J.80}
\end{aligned}$$

以上の結果を同じ行列要素もの同士でまとめる。最後の列にこれらの各項との内積で有限値とする *intemmediate state* のリストをあげた。

XX 00	0X X0	1, 2, 3, 4		$\langle S_{\vec{k}_3} \langle S_{\vec{k}_4} $
X0 0X	00 XX	5	$\langle BCS_{\vec{k}_3} \langle BCS_{\vec{k}_4} $	$\langle P_{\vec{k}_3} \langle P_{\vec{k}_4} $
X0 00	00 X0	6, 7	$\langle S_{\vec{k}_3} \langle BCS_{\vec{k}_4} $	$\langle S_{\vec{k}_3} \langle P_{\vec{k}_4} $
XX 0X	0X XX	8, 9	$\langle BCS_{\vec{k}_3} \langle S_{\vec{k}_4} $	$\langle P_{\vec{k}_3} \langle S_{\vec{k}_4} $
XX 00	X0 0X	11, 12, 13, 14	$\langle S_{\vec{k}_3} \langle S_{\vec{k}_4} $	(J.81)
0X X0	00 XX	15	$\langle BCS_{\vec{k}_3} \langle BCS_{\vec{k}_4} $	$\langle P_{\vec{k}_3} \langle P_{\vec{k}_4} $
0X 00	00 0X	16, 17	$\langle S_{\vec{k}_3} \langle BCS_{\vec{k}_4} $	$\langle S_{\vec{k}_3} \langle P_{\vec{k}_4} $
XX X0	X0 XX	18, 19	$\langle BCS_{\vec{k}_3} \langle S_{\vec{k}_4} $	$\langle P_{\vec{k}_3} \langle S_{\vec{k}_4} $

00 XX	0X X0	21, 22, 23, 24		$ S_{\vec{k}_1}\rangle S_{\vec{k}_2}\rangle$
0X X0	XX 00	25	$ BCS_{\vec{k}_1}\rangle BCS_{\vec{k}_2}\rangle$	$ P_{\vec{k}_1}\rangle P_{\vec{k}_2}\rangle$
00 0X	0X 00	26, 27	$ BCS_{\vec{k}_1}\rangle S_{\vec{k}_2}\rangle$	$ P_{\vec{k}_1}\rangle S_{\vec{k}_2}\rangle$
X0 XX	XX X0	28, 29	$ S_{\vec{k}_1}\rangle BCS_{\vec{k}_2}\rangle$	$ S_{\vec{k}_1}\rangle P_{\vec{k}_2}\rangle$
00 XX	X0 0X	31, 32, 33, 34	$ S_{\vec{k}_1}\rangle S_{\vec{k}_2}\rangle$	(J.82)
X0 0X	XX 00	35	$ BCS_{\vec{k}_1}\rangle BCS_{\vec{k}_2}\rangle$	$ P_{\vec{k}_1}\rangle P_{\vec{k}_2}\rangle$
00 0X	X0 00	36, 37	$ BCS_{\vec{k}_1}\rangle S_{\vec{k}_2}\rangle$	$ P_{\vec{k}_1}\rangle S_{\vec{k}_2}\rangle$
X0 XX	XX X0	38, 39	$ S_{\vec{k}_1}\rangle BCS_{\vec{k}_2}\rangle$	$ S_{\vec{k}_1}\rangle P_{\vec{k}_2}\rangle$

次に $\langle BCST | j^i(t) j^j(t') | BCST \rangle$ に現れる項を計算する。

$$\begin{aligned}
21 \cdot 1 &= \langle 0 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 1 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
&\quad \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} + |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow}) \\
&\quad \times (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} + |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow}) \\
&\quad \times \langle S_{\vec{k}_3} | \langle S_{\vec{k}_4} | |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
&= \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3} - \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&21 \cdot 1 + 22 \cdot 2 + 23 \cdot 3 + 24 \cdot 4 + 23 \cdot 2 + 22 \cdot 3 \\
&= \left(g_{k_3} g_{k_4} v_{k_4}^2 u_{k_3}^2 e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} + p_{k_3} g_{k_4} v_{k_3}^2 v_{k_4}^2 e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \right. \\
&\quad \left. + p_{k_4} g_{k_3} u_{k_4}^2 u_{k_3}^2 e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} + p_{k_4} p_{k_3} u_{k_4}^2 v_{k_3}^2 e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \right)
\end{aligned} \tag{J.83}$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{p_{k_3} p_{k_4} g_{k_3} g_{k_4}} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} \left(e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'+t)} + e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t'+t)} \right) a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \\
& - \left(g_{k_3} g_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'-t)} + \sqrt{p_{k_3} p_{k_4} g_{k_3} g_{k_4}} v_{\vec{k}_3}^2 v_{\vec{k}_4}^2 e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'+t)} \right. \\
& - p_{k_3} g_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{-i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'-t)} + \sqrt{p_{k_3} p_{k_4} g_{k_3} g_{k_4}} u_{\vec{k}_3}^2 u_{\vec{k}_4}^2 e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t'+t)} \\
& \left. - p_{k_4} g_{k_3} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t'-t)} + p_{k_3} p_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'-t)} \right) a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}
\end{aligned}$$

上記の式は最終的に t' で $-\infty$ から t まで積分を行う。その時指数に $t' + t$ が含まれる項は、 $e^{i\omega_{k_3} 2t}$ のような項を与える。回転波近似のもとこの項の与える寄与は無視できる。25 と 5 との内積の計算は以下のように行われる。

$$\begin{aligned}
25 \cdot 5 - 1 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
& \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_4} + |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4}) \\
& \times (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_3} + |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3}) \\
& \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_3} + \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3}) \\
& \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_4} + \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4}) \\
& \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
& = v_{k_3} u_{k_4} e^{-2i\alpha} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
& \times (|1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} e^{2i\alpha} v_{k_4} + |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4}) \\
& \times (|1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} e^{2i\alpha} v_{k_3} + |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3}) \\
& = v_{\vec{k}_3}^2 u_{\vec{k}_4}^2 \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3} + v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
25 \cdot 5 - 2 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
& \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4} - |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} e^{-2i\alpha} v_{k_4}) \\
& \times (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_3} + |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3}) \\
& \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_3} + \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3}) \\
& \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4} - \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} e^{2i\alpha} v_{k_4}) \\
& \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
& = -v_{k_4} v_{k_3} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4} - |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} e^{-2i\alpha} v_{k_4}) \\
& \times (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_3} + |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3}) \\
& = v_{k_3}^2 v_{k_4}^2 \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3} - v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
25 \cdot 5 - 3 & = \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
& \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_4} + |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4}) \\
& \times (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3} - |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-2i\alpha} v_{k_3}) \\
& \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3} - \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_3, \uparrow} e^{2i\alpha} v_{k_3}) \\
& \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_4} + \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4}) \\
& \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
& = u_{k_4} u_{k_3} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
& \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_4} + |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4}) \\
& \times (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3} - |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-2i\alpha} v_{k_3}) \\
& = u_{k_3}^2 u_{k_4}^2 \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3} - v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
25 \cdot 5 - 4 & = \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
& \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4} - |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} e^{-2i\alpha} v_{k_4}) \\
& \times (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3} - |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-2i\alpha} v_{k_3}) \\
& \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3} - \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_3, \uparrow} e^{2i\alpha} v_{k_3}) \\
& \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4} - \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} e^{2i\alpha} v_{k_4}) \\
& \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
& = -v_{k_4} u_{k_3} e^{2i\alpha} \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
& \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4} - |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} e^{-2i\alpha} v_{k_4}) \\
& \times (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3} - |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{-2i\alpha} v_{k_3}) \\
& = u_{k_3}^2 v_{k_4}^2 \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3} + v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3}
\end{aligned}$$

$$25 \cdot 5 - 1 = \frac{s_{k_3} s_{k_4}}{4} \left(u_{k_4}^2 v_{k_3}^2 a_{k_4 \bar{q}}^* a_{k_3 \bar{q}'} a_{k_3 \bar{k}}^* a_{k_4 \bar{k}'} + v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{k_3 \bar{q}}^* a_{k_4 \bar{q}'} a_{k_3 \bar{k}}^* a_{k_4 \bar{k}'} \right) e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \quad (\text{J.84})$$

$$25 \cdot 5 - 2 = \frac{s_{k_3} s_{k_4}}{4} \left(v_{k_3}^2 v_{k_4}^2 a_{k_4 \bar{q}}^* a_{k_3 \bar{q}'} a_{k_3 \bar{k}}^* a_{k_4 \bar{k}'} - v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{k_3 \bar{q}}^* a_{k_4 \bar{q}'} a_{k_3 \bar{k}}^* a_{k_4 \bar{k}'} \right) e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \quad (\text{J.85})$$

$$25 \cdot 5 - 3 = \frac{s_{k_3} s_{k_4}}{4} \left(u_{k_3}^2 u_{k_4}^2 a_{k_4 \bar{q}}^* a_{k_3 \bar{q}'} a_{k_3 \bar{k}}^* a_{k_4 \bar{k}'} - v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{k_3 \bar{q}}^* a_{k_4 \bar{q}'} a_{k_3 \bar{k}}^* a_{k_4 \bar{k}'} \right) e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} \quad (\text{J.86})$$

$$25 \cdot 5 - 4 = \frac{s_{k_3} s_{k_4}}{4} \left(v_{k_4}^2 u_{k_3}^2 a_{k_4 \bar{q}}^* a_{k_3 \bar{q}'} a_{k_3 \bar{k}}^* a_{k_4 \bar{k}'} + v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{k_3 \bar{q}}^* a_{k_4 \bar{q}'} a_{k_3 \bar{k}}^* a_{k_4 \bar{k}'} \right) e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \quad (\text{J.87})$$

項 26 と 6 との内積は次のように計算される。

$$\begin{aligned} 26 \cdot 6 - 1 &= \langle 0 |_{\bar{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\bar{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{\bar{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\bar{k}_1, \uparrow} \\ &\quad \times (|1\rangle_{\bar{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{\bar{k}_4, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_4} + |0\rangle_{\bar{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{\bar{k}_4, \downarrow} u_{k_4}) |S_{\bar{k}_3}\rangle \\ &\quad \times \langle 0 |_{\bar{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\bar{k}_3, \uparrow} (\langle 1 |_{\bar{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\bar{k}_4, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_4} + \langle 0 |_{\bar{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\bar{k}_4, \uparrow} u_{k_4}) \\ &\quad \times |0\rangle_{\bar{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{\bar{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\bar{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{\bar{k}_3, \downarrow} \\ &= u_{k_4}^2 \delta_{\bar{k}_1, \bar{k}_4} \delta_{\bar{k}_2, \bar{k}_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26 \cdot 6 - 2 &= \langle 0 |_{\bar{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\bar{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{\bar{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\bar{k}_1, \uparrow} \\ &\quad \times (|1\rangle_{\bar{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{\bar{k}_4, \downarrow} u_{k_4} - |0\rangle_{\bar{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{\bar{k}_4, \downarrow} v_{k_4} e^{-2i\alpha}) |S_{\bar{k}_3}\rangle \\ &\quad \times \langle 0 |_{\bar{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\bar{k}_3, \uparrow} (\langle 1 |_{\bar{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\bar{k}_4, \uparrow} u_{k_4} - \langle 0 |_{\bar{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\bar{k}_4, \uparrow} v_{k_4} e^{2i\alpha}) \\ &\quad \times |0\rangle_{\bar{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{\bar{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\bar{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{\bar{k}_3, \downarrow} \\ &= v_{k_4}^2 \delta_{\bar{k}_1, \bar{k}_4} \delta_{\bar{k}_2, \bar{k}_3} \end{aligned}$$

$$26 \cdot 6 - 1 = \frac{s_{k_4} g_{k_3}}{2} u_{k_3}^2 u_{k_4}^2 e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} a_{k_4 \bar{q}}^* a_{k_3 \bar{q}'} a_{k_3 \bar{k}}^* a_{k_4 \bar{k}'} \quad (\text{J.88})$$

$$26 \cdot 6 - 2 = \frac{s_{k_4} g_{k_3}}{2} u_{k_3}^2 v_{k_4}^2 e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{k_4 \bar{q}}^* a_{k_3 \bar{q}'} a_{k_3 \bar{k}}^* a_{k_4 \bar{k}'} \quad (\text{J.89})$$

$$27 \cdot 7 - 1 = \frac{s_{k_4} p_{k_3}}{2} v_{k_3}^2 u_{k_4}^2 e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{k_4 \bar{q}}^* a_{k_3 \bar{q}'} a_{k_3 \bar{k}}^* a_{k_4 \bar{k}'} \quad (\text{J.90})$$

$$27 \cdot 7 - 2 = \frac{s_{k_4} p_{k_3}}{2} v_{k_3}^2 v_{k_4}^2 e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{k_4 \bar{q}}^* a_{k_3 \bar{q}'} a_{k_3 \bar{k}}^* a_{k_4 \bar{k}'} \quad (\text{J.91})$$

$$\begin{aligned}
28 \cdot 6 - 1 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 1 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
&\quad \times \langle (1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} | 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_4} + | 0 \rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} | 0 \rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4}) | S_{\vec{k}_3} \rangle \\
&\quad \times \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} (\langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_4} + \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4}) \\
&\quad \times | 0 \rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} | 0 \rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} | 1 \rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} | 0 \rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
&= u_{k_4} v_{k_4} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4} \\
28 \cdot 6 - 2 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 1 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
&\quad \times \langle (1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} | 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4} - | 0 \rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} | 0 \rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} v_{k_4} e^{-2i\alpha}) | S_{\vec{k}_3} \rangle \\
&\quad \times \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} (\langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4} - \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} v_{k_4} e^{2i\alpha}) \\
&\quad \times | 0 \rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} | 0 \rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} | 1 \rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} | 0 \rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
&= -u_{k_4} v_{k_4} e^{2i\alpha} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4}
\end{aligned}$$

$$28 \cdot 6 - 1 = \frac{g_{k_3} s_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \quad (\text{J.92})$$

$$28 \cdot 6 - 2 = -\frac{g_{k_3} s_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \quad (\text{J.93})$$

$$29 \cdot 7 - 1 = -\frac{p_{k_3} s_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \quad (\text{J.94})$$

$$29 \cdot 7 - 2 = \frac{p_{k_3} s_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \quad (\text{J.95})$$

$$28 \cdot 8 - 1 = \frac{s_{k_3} g_{k_4}}{2} v_{k_4}^2 v_{k_3}^2 e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \quad (\text{J.96})$$

$$28 \cdot 8 - 2 = \frac{s_{k_3} g_{k_4}}{2} v_{k_4}^2 u_{k_3}^2 e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \quad (\text{J.97})$$

$$29 \cdot 9 - 1 = \frac{s_{k_3} p_{k_4}}{2} v_{k_3}^2 u_{k_4}^2 e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \quad (\text{J.98})$$

$$29 \cdot 9 - 2 = \frac{s_{k_3} p_{k_4}}{2} u_{k_4}^2 u_{k_3}^2 e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \quad (\text{J.99})$$

$$\begin{aligned}
26 \cdot 8 - 1 &= \langle 0 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
&\quad \times \langle (1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} | 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_3} + | 0 \rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} | 0 \rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3}) | S_{\vec{k}_4} \rangle \\
&\quad \times \langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} (\langle 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_3} + \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3}) \\
&\quad \times | 0 \rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} | 1 \rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} | 1 \rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} | 1 \rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u_{k_3} v_{k_3} e^{-2i\alpha} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4} \\
26 \cdot 8 - 2 &= \langle 0 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
&\quad \times (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3} - |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} v_{k_3} e^{-2i\alpha}) |S_{\vec{k}_4}\rangle \\
&\quad \times \langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} (\langle 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3} - \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_3, \uparrow} v_{k_3} e^{2i\alpha}) \\
&\quad \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
&= -v_{k_3} u_{k_3} e^{-2i\alpha} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4}
\end{aligned}$$

$$26 \cdot 8 - 1 = \frac{S_{k_3} g_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'-t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \quad (\text{J.100})$$

$$26 \cdot 8 - 2 = -\frac{S_{k_3} g_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'-t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \quad (\text{J.101})$$

$$27 \cdot 9 - 1 = -\frac{S_{k_3} p_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'-t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \quad (\text{J.102})$$

$$27 \cdot 9 - 2 = \frac{S_{k_3} p_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t'-t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \quad (\text{J.103})$$

項 11 から 19 までの寄与は項 1 から 9 まで与える上の結果と同じものを与える。

$$\begin{aligned}
&31 \cdot 11 + 32 \cdot 12 + 33 \cdot 13 + 34 \cdot 14 + 33 \cdot 12 + 32 \cdot 13 \\
&= \left(g_{k_3} g_{k_4} v_{k_4}^2 u_{k_3}^2 e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'-t)} + p_{k_3} g_{k_4} v_{k_3}^2 v_{k_4}^2 e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'-t)} \right. \\
&\quad \left. + p_{k_4} g_{k_3} u_{k_3}^2 u_{k_4}^2 e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t'-t)} + p_{k_4} p_{k_3} u_{k_4}^2 v_{k_3}^2 e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'-t)} \right) a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^* \\
&\quad - \left(g_{k_3} g_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'-t)} - p_{k_3} g_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{-i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'-t)} \right. \\
&\quad \left. - p_{k_4} g_{k_3} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t'-t)} + p_{k_3} p_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'-t)} \right) a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^*
\end{aligned} \quad (\text{J.104})$$

$$35 \cdot 15 - 1 = \frac{S_{k_3} S_{k_4}}{4} \left(u_{k_4}^2 v_{k_3}^2 a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^* + v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^* \right) e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'-t)} \quad (\text{J.105})$$

$$35 \cdot 15 - 2 = \frac{S_{k_3} S_{k_4}}{4} \left(v_{k_4}^2 v_{k_3}^2 a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^* - v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^* \right) e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'-t)} \quad (\text{J.106})$$

$$35 \cdot 15 - 3 = \frac{s_{k_3} s_{k_4}}{4} \left(u_{k_3}^2 u_{k_4}^2 a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} - v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \right) e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} \quad (\text{J.107})$$

$$35 \cdot 15 - 4 = \frac{s_{k_3} s_{k_4}}{4} \left(v_{k_4}^2 u_{k_3}^2 a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} + v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \right) e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \quad (\text{J.108})$$

$$36 \cdot 16 - 1 = \frac{s_{k_4} g_{k_3}}{2} u_{k_3}^2 u_{k_4}^2 e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.109})$$

$$36 \cdot 16 - 2 = \frac{s_{k_4} g_{k_3}}{2} u_{k_3}^2 v_{k_4}^2 e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.110})$$

$$37 \cdot 17 - 1 = \frac{s_{k_4} p_{k_3}}{2} v_{k_3}^2 u_{k_4}^2 e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.111})$$

$$37 \cdot 17 - 2 = \frac{s_{k_4} p_{k_3}}{2} v_{k_4}^2 v_{k_3}^2 e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.112})$$

$$38 \cdot 18 - 1 = \frac{s_{k_3} g_{k_4}}{2} v_{k_4}^2 v_{k_3}^2 e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.113})$$

$$38 \cdot 18 - 2 = \frac{s_{k_3} g_{k_4}}{2} v_{k_4}^2 u_{k_3}^2 e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.114})$$

$$39 \cdot 19 - 1 = \frac{s_{k_3} p_{k_4}}{2} u_{k_4}^2 v_{k_3}^2 e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.115})$$

$$39 \cdot 19 - 2 = \frac{s_{k_3} p_{k_4}}{2} u_{k_4}^2 u_{k_3}^2 e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.116})$$

$$38 \cdot 16 - 1 = \frac{g_{k_3} s_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.117})$$

$$38 \cdot 16 - 2 = -\frac{g_{k_3} s_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.117})$$

(J.118)

$$39 \cdot 17 - 1 = -\frac{p_{k_3} s_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}$$

(J.119)

$$39 \cdot 17 - 2 = \frac{p_{k_3} s_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}$$

(J.120)

$$36 \cdot 18 - 1 = \frac{s_{k_3} g_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}$$

(J.121)

$$36 \cdot 18 - 2 = -\frac{s_{k_3} g_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}$$

(J.122)

$$37 \cdot 19 - 1 = -\frac{s_{k_3} p_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}$$

(J.123)

$$37 \cdot 19 - 2 = \frac{s_{k_3} p_{k_4}}{2} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}$$

(J.124)

次にクロスタームを計算する。

$$\begin{aligned} 31 \cdot 1 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\ &\quad \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} + |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow}) \\ &\quad \times (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} + |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow}) \\ &\quad \times \langle S_{\vec{k}_3} | \langle S_{\vec{k}_4} | |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\ &= \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3} - \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4} \end{aligned}$$

$$31 \cdot 1 + 33 \cdot 2 + 32 \cdot 3 + 34 \cdot 4 + 32 \cdot 2 + 33 \cdot 3$$

$$\begin{aligned} &= \left(-g_{k_3} g_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} + p_{k_3} g_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \right. \\ &\quad \left. + p_{k_4} p_{k_3} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} - p_{k_3} p_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \right) a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \\ &\quad + \left(g_{k_3} g_{k_4} v_{\vec{k}_4}^2 u_{\vec{k}_3}^2 e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} + p_{k_3} g_{k_4} v_{\vec{k}_3}^2 v_{\vec{k}_4}^2 e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \right) \end{aligned}$$

$$+ p_{k_4} g_{k_3} u_{k_3}^2 u_{k_4}^2 e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} + p_{k_3} p_{k_4} v_{k_3}^2 u_{k_4}^2 e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)}) a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}$$
(J.125)

$$35 \cdot 5 - 1 = \frac{S_{k_3} S_{k_4}}{4} \left(u_{k_4}^2 v_{k_3}^2 a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \right) e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)}$$
(J.126)

$$35 \cdot 5 - 2 = \frac{S_{k_3} S_{k_4}}{4} \left(v_{k_4}^2 v_{k_3}^2 a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} - v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \right) e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)}$$
(J.127)

$$35 \cdot 5 - 3 = \frac{S_{k_3} S_{k_4}}{4} \left(u_{k_3}^2 u_{k_4}^2 a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} - v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \right) e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)}$$
(J.128)

$$35 \cdot 5 - 4 = \frac{S_{k_3} S_{k_4}}{4} \left(v_{k_4}^2 u_{k_3}^2 a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \right) e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)}$$
(J.129)

項 6 と項 36 との内積は次のように計算される。

$$\begin{aligned} 36 \cdot 6 - 1 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\ &\quad \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_4} + |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4}) |S_{\vec{k}_3}\rangle \\ &\quad \times \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} (\langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_4} + \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4}) \\ &\quad \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\ &= u_{k_4}^2 \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3} \\ 36 \cdot 6 - 2 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\ &\quad \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4} - |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} v_{k_4} e^{-2i\alpha}) |S_{\vec{k}_3}\rangle \\ &\quad \times \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} (\langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4} - \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} v_{k_4} e^{2i\alpha}) \\ &\quad \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\ &= v_{k_4}^2 \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3} \end{aligned}$$

$$36 \cdot 6 - 1 = \frac{S_{k_4} g_{k_3}}{2} u_{k_4}^2 u_{k_3}^2 e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}$$
(J.130)

$$36 \cdot 6 - 2 = \frac{S_{k_4} g_{k_3}}{2} v_{k_4}^2 u_{k_3}^2 e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}$$

(J.131)

$$37 \cdot 7 - 1 = \frac{s_{k_4} p_{k_3}}{2} u_{k_4}^2 v_{k_3}^2 e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}$$

(J.132)

$$37 \cdot 7 - 2 = \frac{s_{k_4} p_{k_3}}{2} v_{k_4}^2 v_{k_3}^2 e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}$$

(J.133)

$$\begin{aligned} 38 \cdot 6 - 1 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\ &\quad \times \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} | 1 \rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_4} + | 0 \rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} | 0 \rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4} | 1 \rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} | 0 \rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\ &\quad \times \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} (\langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_4} + \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4}) \\ &\quad \times | 0 \rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} | 0 \rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} | 1 \rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} | 0 \rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\ &= v_{k_4} u_{k_4} e^{2i\alpha} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 38 \cdot 6 - 2 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\ &\quad \times \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} | 1 \rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4} - | 0 \rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} | 0 \rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} v_{k_4} e^{-2i\alpha} | 1 \rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} | 0 \rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\ &\quad \times \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} (\langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4} - \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} v_{k_4} e^{2i\alpha}) \\ &\quad \times | 0 \rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} | 0 \rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} | 1 \rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} | 0 \rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\ &= -v_{k_4} u_{k_4} e^{2i\alpha} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4} \end{aligned}$$

$$38 \cdot 6 - 1 = \frac{s_{k_4} g_{k_3}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}$$

(J.134)

$$38 \cdot 6 - 2 = -\frac{s_{k_4} g_{k_3}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}$$

(J.135)

$$39 \cdot 7 - 1 = -\frac{s_{k_4} p_{k_3}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}$$

(J.136)

$$39 \cdot 7 - 2 = \frac{s_{k_4} p_{k_3}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}$$

(J.137)

$$\begin{aligned}
36 \cdot 8 - 1 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
&\quad \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_3} + |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3}) \\
&\quad \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_3} + \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3}) \langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} \\
&\quad \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
&= v_{k_3} u_{k_3} e^{-2i\alpha} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
36 \cdot 8 - 2 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
&\quad \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3} - |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} v_{k_3} e^{-2i\alpha}) \\
&\quad \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3} - \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_3, \uparrow} v_{k_3} e^{-2i\alpha}) \langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} \\
&\quad \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
&= -v_{k_3} u_{k_3} e^{-2i\alpha} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3}
\end{aligned}$$

$$36 \cdot 8 - 1 = \frac{s_{k_3} g_{k_4}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \quad (\text{J.138})$$

$$36 \cdot 8 - 2 = -\frac{s_{k_3} g_{k_4}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \quad (\text{J.139})$$

$$37 \cdot 9 - 1 = -\frac{s_{k_3} p_{k_4}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \quad (\text{J.140})$$

$$37 \cdot 9 - 2 = \frac{s_{k_3} p_{k_4}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \quad (\text{J.141})$$

$$\begin{aligned}
38 \cdot 8 - 1 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
&\quad \times |S\rangle_{\vec{k}_4} (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_3} + |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3}) \\
&\quad \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_3} + \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3}) \langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} \\
&\quad \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow}
\end{aligned}$$

$$= v_{k_3}^2 \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3}$$

$$\begin{aligned} 38 \cdot 8 - 2 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\ &\quad \times |S\rangle_{\vec{k}_4} (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3} - |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} v_{k_3} e^{-2i\alpha}) \\ &\quad \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3} - \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_3, \uparrow} v_{k_3} e^{-2i\alpha}) \langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} \\ &\quad \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\ &= u_{k_3}^2 \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3} \end{aligned}$$

$$38 \cdot 8 - 1 = \frac{S_{k_3} g_{k_4}}{2} v_{k_3}^2 v_{k_4}^2 e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \quad (\text{J.142})$$

$$38 \cdot 8 - 2 = \frac{S_{k_3} g_{k_4}}{2} u_{k_3}^2 v_{k_4}^2 e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \quad (\text{J.143})$$

$$39 \cdot 9 - 1 = \frac{S_{k_3} P_{k_4}}{2} u_{k_4}^2 v_{k_3}^2 e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \quad (\text{J.144})$$

$$39 \cdot 9 - 2 = \frac{S_{k_3} P_{k_4}}{2} u_{k_4}^2 u_{k_3}^2 e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \quad (\text{J.145})$$

$$\begin{aligned} 21 \cdot 11 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\ &\quad \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} + |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow}) \\ &\quad \times (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} + |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow}) \\ &\quad \times \langle S_{\vec{k}_3} | \langle S_{\vec{k}_4} | |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\ &= \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3} - \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4} \end{aligned}$$

$$21 \cdot 11 + 23 \cdot 12 + 22 \cdot 13 + 24 \cdot 14 + 22 \cdot 12 + 23 \cdot 13$$

$$= - \left(-g_{k_3} g_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} v_{k_3} v_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} + p_{k_3} g_{k_4} v_{k_4} v_{k_3} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \right.$$

$$\left. + p_{k_4} g_{k_3} v_{k_4} v_{k_3} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} - p_{k_4} p_{k_3} u_{k_3} v_{k_3} u_{k_4} v_{k_4} e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \right) a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.146})$$

$$\begin{aligned}
& + \left(g_{k_3} g_{k_4} v_{k_4}^2 u_{k_3}^2 e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} + p_{k_3} g_{k_4} v_{k_3}^2 v_{k_4}^2 e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \right. \\
& \left. + p_{k_4} g_{k_3} u_{k_3}^2 u_{k_4}^2 e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} + p_{k_3} p_{k_4} v_{k_3}^2 u_{k_4}^2 e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \right) a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}
\end{aligned} \tag{J.146}$$

$$25 \cdot 15 - 1 = \frac{s_{k_3} s_{k_4}}{4} \left(v_{k_4}^2 v_{k_3}^2 a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} + v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \right) e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \tag{J.147}$$

$$25 \cdot 15 - 2 = \frac{s_{k_3} s_{k_4}}{4} \left(v_{k_3}^2 v_{k_4}^2 a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} - v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \right) e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \tag{J.148}$$

$$25 \cdot 15 - 3 = \frac{s_{k_3} s_{k_4}}{4} \left(v_{k_3}^2 u_{k_4}^2 a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} - v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \right) e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} \tag{J.149}$$

$$25 \cdot 15 - 4 = \frac{s_{k_3} s_{k_4}}{4} \left(v_{k_4}^2 u_{k_3}^2 a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} + v_{k_3} v_{k_4} u_{k_4} u_{k_3} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \right) e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} \tag{J.150}$$

$$\begin{aligned}
28 \cdot 16 - 1 & = \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 1 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
& \quad \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_4} + |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4}) |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
& \quad \times \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} (\langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_4} + \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4}) \\
& \quad \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
& = v_{k_4} u_{k_4} e^{2i\alpha} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
28 \cdot 16 - 2 & = \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 1 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
& \quad \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4} - |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} v_{k_4} e^{-2i\alpha}) |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
& \quad \times \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} (\langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4} - \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} v_{k_4} e^{2i\alpha}) \\
& \quad \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
& = -v_{k_4} u_{k_4} e^{2i\alpha} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
29 \cdot 17 - 1 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 1 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
&\quad \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_4} + |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4}) |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
&\quad \times \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} (\langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_4} + \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4}) \\
&\quad \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
&= v_{k_4} u_{k_4} e^{2i\alpha} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4}
\end{aligned}$$

$$28 \cdot 16 - 1 = \frac{s_{k_4} g_{k_3}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.151})$$

$$28 \cdot 16 - 2 = -\frac{s_{k_4} g_{k_3}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.152})$$

$$29 \cdot 17 - 1 = -\frac{s_{k_4} p_{k_3}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.153})$$

$$29 \cdot 17 - 2 = \frac{s_{k_4} p_{k_3}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.154})$$

$$\begin{aligned}
26 \cdot 16 - 1 &= \langle 0 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
&\quad \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_4} + |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4}) |S\rangle_{\vec{k}_3} \\
&\quad \times \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} (\langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_4} + \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4}) \\
&\quad \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
&= u_{k_4}^2 \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
26 \cdot 16 - 2 &= \langle 0 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\
&\quad \times (|1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} u_{k_4} - |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} v_{k_4} e^{-2i\alpha}) |S\rangle_{\vec{k}_3} \\
&\quad \times \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} (\langle 1 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} u_{k_4} - \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_4, \uparrow} v_{k_4} e^{2i\alpha}) \\
&\quad \times |0\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\
&= v_{k_4}^2 \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3}
\end{aligned}$$

$$26 \cdot 16 - 1 = \frac{S_{k_4} g_{k_3}}{2} u_{k_3}^2 u_{k_4}^2 e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.155})$$

$$26 \cdot 16 - 2 = \frac{S_{k_4} g_{k_3}}{2} u_{k_3}^2 v_{k_4}^2 e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.156})$$

$$27 \cdot 17 - 1 = \frac{S_{k_4} p_{k_3}}{2} u_{k_4}^2 v_{k_3}^2 e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.157})$$

$$27 \cdot 17 - 2 = \frac{S_{k_4} p_{k_3}}{2} v_{k_4}^2 v_{k_3}^2 e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'} \quad (\text{J.158})$$

$$\begin{aligned} 26 \cdot 18 - 1 &= \langle 0 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\ &\quad \times |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_3} + |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3}) \\ &\quad \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_3} + \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3}) \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} \\ &\quad \times |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\ &= v_{k_3} u_{k_3} e^{-2i\alpha} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26 \cdot 18 - 2 &= \langle 0 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\ &\quad \times |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3} - |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} v_{k_3} e^{-2i\alpha}) \\ &\quad \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3} - \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_3, \uparrow} v_{k_3} e^{2i\alpha}) \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} \\ &\quad \times |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\ &= -v_{k_3} u_{k_3} e^{-2i\alpha} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27 \cdot 18 - 2 &= \langle 0 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 0 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\ &\quad \times |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3} - |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} v_{k_3} e^{-2i\alpha}) \\ &\quad \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3} - \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_3, \uparrow} v_{k_3} e^{2i\alpha}) \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} \\ &\quad \times |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \end{aligned}$$

$$= -v_{k_3} u_{k_3} e^{-2i\alpha} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_3}$$

$$26 \cdot 18 - 1 = \frac{S_{k_3} g_{k_4}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^* \quad (\text{J.159})$$

$$26 \cdot 18 - 2 = -\frac{S_{k_3} g_{k_4}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^* \quad (\text{J.160})$$

$$27 \cdot 19 - 1 = -\frac{P_{k_4} S_{k_3}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^* \quad (\text{J.161})$$

$$27 \cdot 19 - 2 = \frac{P_{k_4} S_{k_3}}{2} v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_3 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^* \quad (\text{J.162})$$

$$\begin{aligned} 28 \cdot 18 - 1 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 1 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\ &\quad \times |S\rangle_{\vec{k}_4} (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} e^{2i\alpha} v_{k_3} + |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3}) \\ &\quad \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} e^{-2i\alpha} v_{k_3} + \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3}) \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} \\ &\quad \times |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\ &= v_{\vec{k}_3}^2 \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28 \cdot 18 - 2 &= \langle 1 |_{-\vec{k}_2, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_2, \uparrow} \langle 1 |_{-\vec{k}_1, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_1, \uparrow} \\ &\quad \times |S\rangle_{\vec{k}_4} (|1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} u_{k_3} - |0\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} v_{k_3} e^{-2i\alpha}) \\ &\quad \times (\langle 1 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_3, \uparrow} u_{k_3} - \langle 0 |_{-\vec{k}_3, \downarrow} \langle 0 |_{\vec{k}_3, \uparrow} v_{k_3} e^{2i\alpha}) \langle 0 |_{-\vec{k}_4, \downarrow} \langle 1 |_{\vec{k}_4, \uparrow} \\ &\quad \times |1\rangle_{\vec{k}_4, \uparrow} |0\rangle_{-\vec{k}_4, \downarrow} |1\rangle_{\vec{k}_3, \uparrow} |1\rangle_{-\vec{k}_3, \downarrow} \\ &= u_{\vec{k}_3}^2 \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3} \end{aligned}$$

$$28 \cdot 18 - 1 = \frac{S_{k_3} g_{k_4}}{2} v_{k_3}^2 v_{k_4}^2 e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^* \quad (\text{J.163})$$

$$28 \cdot 18 - 2 = \frac{S_{k_3} g_{k_4}}{2} u_{k_3}^2 v_{k_4}^2 e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^*$$

(J.164)

$$29 \cdot 19 - 1 = \frac{s_{k_3} p_{k_4}}{2} v_{k_3}^2 u_{k_4}^2 e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^* \quad (\text{J.165})$$

$$29 \cdot 19 - 1 = \frac{s_{k_3} p_{k_4}}{2} u_{k_3}^2 u_{k_4}^2 e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^* \quad (\text{J.166})$$

ここまでは式 (J.70) の右辺第一項に現れる各項を計算して来た。右辺第二項に現れる項は、上記の結果に $t \leftrightarrow t'$ の入れ替えを施せば良い。その結果を第1項から引いたものが求めたい量である。このことに注意して式 (J.70) を exponential の指数毎にまとめる。以下簡単のため添字に現れる k_3, k_4 を 3, 4 と略記する。また

$$\begin{aligned} a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^* &= a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \\ a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* &= a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \\ a_{-\vec{k}_4 - \vec{q}}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{q}'}^* a_{-\vec{k}_3 - \vec{k}}^* a_{-\vec{k}_4 - \vec{k}'}^* &= a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \end{aligned}$$

の関係式を用いる。まず $e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)}$ の係数を計算する。

$$\begin{aligned} &: \left[\left(g_3 g_4 + \frac{s_3 s_4}{4} + \frac{s_3 g_4}{2} + \frac{s_4 g_3}{2} \right) u_3^2 v_4^2 - \left(p_4 p_3 + \frac{s_3 s_4}{4} + \frac{s_4 p_3}{2} + \frac{s_3 p_4}{2} \right) u_4^2 v_3^2 \right] \\ &\times \left(a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \right) \\ &= [(1 - f_4)(1 - f_3) v_4^2 u_3^3 - f_3 f_4 u_4^2 v_3^2] \\ &\times \left(a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \right) \\ &\rightarrow \sum_{\vec{k}_3, \vec{k}_4} \left[(1 - f_4)(1 - f_3) \frac{1}{2} (v_4^2 u_3^3 + v_3^2 u_4^2) - f_3 f_4 \frac{1}{2} (u_4^2 v_3^2 + u_3^2 v_4^2) \right] \\ &\times \left(a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \right) \\ &= \sum_{\vec{k}_3, \vec{k}_4} (1 - f_{k_4} - f_{k_3}) \frac{1}{2} (v_{\vec{k}_4}^2 u_{\vec{k}_3}^3 + v_{\vec{k}_3}^2 u_{\vec{k}_4}^2) \quad (\text{J.167}) \\ &\times \left(a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& : \left[\frac{s_3 s_4}{4} - g_3 g_4 - \frac{s_3 g_4}{2} - \frac{s_4 g_3}{2} - \frac{s_3 s_4}{4} + p_3 p_4 + \frac{s_4 p_3}{2} + \frac{s_3 p_4}{2} \right] v_3 v_4 u_3 u_4 \\
& \quad \times \left(a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \right) \\
& = -(1 - f_{k_3} - f_{k_4}) v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} \\
& \quad \times \left(a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \right)
\end{aligned} \tag{J.168}$$

まとめると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
& \sum_{\vec{k}_3, \vec{k}_4} \frac{1}{4} (1 - f_{k_3} - f_{k_4}) \left(1 - \frac{\xi_{k_3} \xi_{k_4} + \Delta^2}{E_{k_3} E_{k_4}} \right) \\
& \quad \times \left(a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \right)
\end{aligned} \tag{J.169}$$

次に $e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)}$ の係数を計算する。和を取る変数 \vec{k}_3, \vec{k}_4 はダミー変数であるから、入れ替えを自由に行える。即ち

$$\sum_{\vec{k}_3, \vec{k}_4} f(\vec{k}_3, \vec{k}_4) e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)} = \sum_{\vec{k}_3, \vec{k}_4} f(\vec{k}_4, \vec{k}_3) e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)}$$

である。ここで右辺への移行時 $\vec{k}_3 \leftrightarrow \vec{k}_4$ の入れ替えを行う。したがって、

$$\begin{aligned}
& : \sum_{3,4} \left[\left(p_3 g_4 + \frac{s_3 s_4}{4} + \frac{s_4 p_3}{2} + \frac{s_3 g_4}{2} \right) (v_3^2 v_4^2 + u_3^2 u_4^2) - \left(p_4 g_3 + \frac{s_3 s_4}{4} + \frac{s_4 g_3}{2} + \frac{s_3 p_4}{2} \right) (u_3^2 u_4^2 + v_3^2 v_4^2) \right] \\
& \quad \times \left(a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \right) \\
& = \sum_{3,4} [f_3(1 - f_4) - f_4(1 - f_3)] (v_3^2 v_4^2 + u_3^2 u_4^2) \\
& \quad \times \left(a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \right) \\
& = \sum_{\vec{k}_3, \vec{k}_4} (f_{\vec{k}_3} - f_{\vec{k}_4}) (v_{k_3}^2 v_{k_4}^2 + u_{k_3}^2 u_{k_4}^2) \\
& \quad \times \left(a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \right)
\end{aligned} \tag{J.170}$$

$$\begin{aligned}
& : \sum_{\vec{k}_3, \vec{k}_4} 2 \left[\left(p_3 g_4 - \frac{s_3 s_4}{4} + \frac{s_3 g_4}{2} + \frac{s_4 p_3}{2} \right) v_3 v_4 u_3 u_4 - \left(p_4 p_3 - \frac{s_3 s_4}{4} + \frac{s_3 p_4}{2} + \frac{s_4 g_3}{2} \right) v_3 v_4 u_3 u_4 \right] \\
& \quad \times \left(a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \right) \\
& = 2 \sum_{\vec{k}_3, \vec{k}_4} (f_{k_3} - f_{k_4}) v_{k_3} v_{k_4} u_{k_3} u_{k_4} \\
& \quad \times \left(a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \right)
\end{aligned} \tag{J.171}$$

まとめると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
& \sum_{\vec{k}_3, \vec{k}_4} \frac{1}{2} (f_{k_3} - f_{k_4}) \left(1 + \frac{\xi_{k_3} \xi_{k_4} + \Delta^2}{E_{k_3} E_{k_4}} \right) \\
& \quad \times \left(a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \right)
\end{aligned} \tag{J.172}$$

最後に $e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)}$ の係数は、 $e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)}$ 及び $e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)}$ の $t' \leftrightarrow t$ の入れ替えたものに対応することから、 $e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)}$ の係数にマイナスを掛けたものになることが分かる。

以上から

$$\begin{aligned}
& \langle BCST | [j^{p,i}(\vec{r}, t), j^{p,j}(\vec{r}', t')] | BCST \rangle \\
& = \left(\frac{\hbar e}{2m} \right)^2 \sum_{\vec{q}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} (\phi_{\vec{q}}^*(\vec{r}) \partial_i \phi_{\vec{q}'}(\vec{r}) - \partial_i \phi_{\vec{q}}^*(\vec{r}) \phi_{\vec{q}'}(\vec{r})) (\phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \partial_j \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}') - \partial_j \phi_{\vec{k}}^*(\vec{r}') \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}')) \\
& \quad \times \left(a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} + a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \right) \\
& \quad \times \left[\frac{1}{4} (1 - f_{k_3} - f_{k_4}) \left(1 - \frac{\xi_{k_3} \xi_{k_4} + \Delta^2}{E_{k_3} E_{k_4}} \right) (e^{i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} - e^{-i(\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} (f_{k_3} - f_{k_4}) \left(1 + \frac{\xi_{k_3} \xi_{k_4} + \Delta^2}{E_{k_3} E_{k_4}} \right) (e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)} - e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)}) \right]
\end{aligned} \tag{J.173}$$

最後の項の変形では、 $e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t' - t)}$ の係数は、 $e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t' - t)}$ の項の計算において $t' \leftrightarrow t$ の置き換えを行ったものに等しく、交換関係の後ろの項

と前の項の役割を逆転させたものに等しいことを使った。温度ゼロの時、式 (J.51) と一致するためには、

$$\sum_{\vec{k}_3, \vec{k}_4} a_{\vec{k}_4 \vec{q}} a_{\vec{k}_3 \vec{q}'}^* a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} = \sum_{\vec{k}_3, \vec{k}_4} a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}} a_{\vec{k}_4 \vec{k}'}^* = \sum_{\vec{k}_3, \vec{k}_4} a_{\vec{k}_4 \vec{q}}^* a_{\vec{k}_3 \vec{q}'} a_{\vec{k}_3 \vec{k}}^* a_{\vec{k}_4 \vec{k}'} \quad (\text{J.174})$$

であれば良い。したがって、高周波電磁波 (J.20) により誘起される電流の j 成分は、

$$\begin{aligned} J^i(x) &= -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar e}{m}\right)^2 \int_{-\infty}^t dt' e^{st'} e^{-i\omega t'} \int d^3 \vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_2} \\ &\quad \times \left(-\frac{R^i}{R}\right) \frac{d\rho_{\vec{k}_1}(R)}{dR} \left(\frac{R'^j}{R'}\right) A_{\omega}^j(\vec{r}') \frac{d\rho_{\vec{k}_2}(R')}{dR'} \\ &\quad \times \left[(1 - f_{k_3} - f_{k_4}) \left(1 - \frac{\xi_{k_1} \xi_{k_2} + \Delta^2}{E_{k_1} E_{k_2}}\right) (e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t'-t)} - e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})(t-t')}) \right. \\ &\quad \left. + (f_{k_3} - f_{k_4}) \left(1 + \frac{\xi_{k_3} \xi_{k_4} + \Delta^2}{E_{k_3} E_{k_4}}\right) (e^{i(-\omega_{k_3} + \omega_{k_4})(t'-t)} + e^{i(\omega_{k_3} - \omega_{k_4})(t'-t)}) \right] \\ &= -\frac{1}{\hbar} \left(\frac{\hbar e}{m}\right)^2 \int d^3 \vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{k_2} \\ &\quad \times \left(-\frac{R^i}{R}\right) \frac{d\rho_{\vec{k}_1}(R)}{dR} \left(\frac{R'^j}{R'}\right) A_{\omega}^j(\vec{r}') \frac{d\rho_{\vec{k}_2}(R')}{dR'} \\ &\quad \times \left[(1 - f_{k_3} - f_{k_4}) \left(1 - \frac{\xi_{k_1} \xi_{k_2} + \Delta^2}{E_{k_1} E_{k_2}}\right) \left(\frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{k_3} + \omega_{k_4} - \omega - is} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{k_3} + \omega_{k_4} + \omega + is}\right) \right. \\ &\quad \left. + (f_{k_3} - f_{k_4}) \left(1 + \frac{\xi_{k_3} \xi_{k_4} + \Delta^2}{E_{k_3} E_{k_4}}\right) \left(\frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{k_4} - \omega_{k_3} - \omega - is} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{k_4} - \omega_{k_3} + \omega + is}\right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{f_{k_3} - f_{k_4}}{\omega_{k_4} - \omega_{k_3}} \right] \quad (\text{J.175}) \end{aligned}$$

最後の項は、 $\omega = 0$ の時に現れる反磁性電流の寄与を差し引くために導入した。

付録 K

Spontaneous Symmetry Break down(SSB)

The spontaneous symmetry break down is the physical description of the phase transition of macroscopic systems. In this chapter, fundamentals of the SSB are introduced by using simplified model of ferromagnetic phase transition.

K.1 Ferromagnetic phase transition

First, the fundamentals of thermal statistical mechanics are summarized. Suppose each ion takes quantum states with energy E_i . The partition function of the system per one ion is described as

$$Q = \sum_i e^{-E_i/k_B T}, \quad (\text{K.1})$$

where T is the temperature of the system. The Helmholtz free energy is defined by

$$F = -k_B T \log Q. \quad (\text{K.2})$$

The probability of finding the ion at energy level of E_i when the system is in thermal equilibrium, is given by

$$P_i = \frac{e^{-E_i/k_B T}}{Q}. \quad (\text{K.3})$$

The entropy is defined as

$$S = -k_B \sum_i P_i \log P_i. \quad (\text{K.4})$$

The derivative of the Helmholtz free energy by temperature with constant volume is given as

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V &= k_B \left[\log Q + T \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial T} \right] \\ &= k_B \left[\log Q + \sum_i \frac{E_i}{k_B T} \frac{e^{-E_i/k_B T}}{Q} \right] \\ &= k_B \left[\sum_i \frac{e^{-E_i/k_B T}}{Q} \log Q + \sum_i \frac{E_i}{k_B T} \frac{e^{-E_i/k_B T}}{Q} \right] \\ &= k_B \sum_i \left[P_i \left(\log Q + \frac{E_i}{k_B T} \right) \right] \\ &= -k_B \sum_i P_i \log P_i \\ &= S. \end{aligned} \quad (\text{K.5})$$

It provides the equation which gives the entropy from the temperature derivative of the Helmholtz free energy.

Consider the macroscopic system composed by a large number of ions with magnetic moment of $\vec{\mu}$. When external magnetic field of \vec{B} is applied, the energy due to the interaction between the field and the magnetic moment is described by

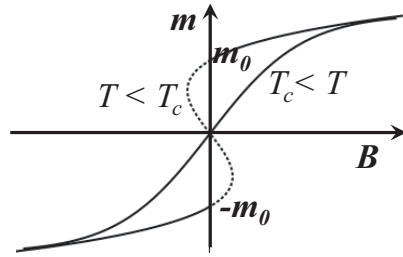
$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (\text{K.6})$$

In the following discussion, we assume that direction of $\vec{\mu}$ takes only parallel to \vec{B} , μ , or antiparallel to \vec{B} , $-\mu$, for simplicity. Therefore, the energy level taken by each ion are two level of $E_1 = -\mu B$ and $E_2 = \mu B$. The average value of the magnetic moment of per one ion, m , is deduced from the Helmholtz free energy as

$$-\frac{\partial F}{\partial B} = \sum_i \mu_i \frac{1}{Q} e^{-E_i/k_B T} = \sum_i \mu_i P_i$$

$$= \langle \mu \rangle = m = \mu \tanh\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right). \quad (\text{K.7})$$

The magnetic moment of the ferromagnetic system as a function of the applied magnetic field strength is shown in figure K.1. The magnetic moment of



⊠ K.1 The magnetic moment of the magnetized system as a function of the applied magnetic field.

the ferromagnetic system in high temperature limit is described by the curve assigned by $T > T_c$ in fig.K.1 which is approximately described by the average magnetic moment of eq.(K.7). However, as decreasing temperature, the deviation of the average magnetic moment of the system from eq. (K.7) becomes significant. When the temperature of the system becomes below T_c , m vs B curve shows two distinct diagnostics. The magnetic moment takes a finite value without applied magnetic field. In other word, the system retains a permanent magnetism. This characteristics that the system takes a finite value of the magnetic moment without applied field when $T < T_c$ is the ferromagnetic phase transition. The values of the magnetic moment becomes discontinuous across $B = 0$. When the magnetic field strength is adiabatically decreased from the positive field strength, m takes m_0 at $B = 0$. On the other hand, when the initial field strength is negative, m takes $-m_0$ at $B = 0$. It is clear from the above discussion that T_c is the critical temperature of the phase transition.

The physical interpretation proposed by Landau to this phenomena is as follows. Introduce Gibbs free energy from Helmholtz free energy by the following Legendre transformation.

$$G = F + BM. \quad (\text{K.8})$$

This transformation transforms the function of magnetic field strength to the function of the magnetic moment. Then, we obtain

$$\begin{aligned} dG &= \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_V dT + \frac{\partial G}{\partial M} dM \\ &= dF + dBM + BdM = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \frac{\partial F}{\partial B} dB + dBM + BdM \\ &= -SdT - MdB + dBM + BdM = -SdT + BdM. \end{aligned} \quad (\text{K.9})$$

and

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_V = -S, \quad (\text{K.10})$$

$$\frac{\partial G}{\partial M} = B. \quad (\text{K.11})$$

Landau proposed that the Gibbs free energy of the ferromagnetic system when $B = 0$ is approximated by following formula at around m_0 .

$$\begin{aligned} G &= a(T)m^2 + \frac{b}{2}m^4, \quad (\text{K.12}) \\ a(T) &= a(T - T_c), \end{aligned}$$

where a and b are constants. When $T > T_c$, $a(T)$ takes positive value. Therefore, G has only one minimum at $m = 0$. This means that at high temperature direction of magnetic moment of each ion is randomized due to thermal fluctuation. On the other hand, when $T < T_c$, $a(T)$ takes negative value. Then, G takes following two minimum at

$$m = \pm m_0 = \pm \sqrt{-\frac{a(T)}{b}}. \quad (\text{K.13})$$

Physical process of this transition is as follows. Due to interaction between magnetic moment of each ion, magnetic moment of each ion tends to align.

In high temperature, thermal fluctuation overcomes this interaction and the direction of the magnetic moment becomes random. Below T_c , the interaction between magnetic moment of each ion overcomes the randomization effect due to thermal fluctuation. In the region where number of ions with positive magnetic moment is dominant by accident, magnetic moment of majority of ions are aligned to have positive value. As a result, the expectation value of the magnetic moment in the region takes $+m_0$. Contrary in the region where number of ions with negative magnetic moment is dominant by accident, magnetic moment of majority of ions are aligned to have negative value. As are result, the expectation value of the magnetic moment in the region takes $-m_0$. From eq.(K.11), we obtain

$$B = 2(a(T)m + bm^3). \quad (\text{K.14})$$

This equation represents characteristics of the curve for $T < T_c$ in fig.K.1 including the curve shown by dotted line well. So we can say that Landau rotated fig.K.1 90 degree and interchange vertical and horizontal axes.

The phenomena described in above paragraph is interpreted as the phase transition of the ground state. Above T_c , the ground state with zero ground state average of the magnetic moment is stable. However below T_c , the ground state which has a finite value of the ground state average of the magnetic moment becomes stable. Therefore, the ground state transition happens across T_c . In the above model, the ground state average of the magnetic moment is the key parameter which characterize the phase transition and is the order parameter of the ferromagnetic phase transition. Below T_c , m takes finite value and the magnetic moment of each ion is ordered in one specific direction. Above T_c , the magnetic moment of each ion is disordered. Since there is no preferred direction in the system above T_c , symmetry of the system against up and down coordinate direction change transformation is kept. On the other hand, below T_c , the magnetic moment directs up or down direction. Therefore, the symmetry of the system against the up and down coordinate direction change

transformation is broken. Because of these reason, the phenomena is called spontaneous symmetry break down. This is the example of the Goldstone's theorem discussed in sec.I.7. It is self evident that the ground state is degenerate. In this example, there are two ground states, one takes $+m_0$ and the other takes $-m_0$. The difference of the free energy at $m = m_0$ and $m = 0$ when $T < T_c$ is the latent heat. The scale of the region where takes the same value of m below T_c is the coherent length. Within the coherent length, m takes the same value. However, beyond the coherent length, m does not have to take the same value. When the m takes the different value in the nested but beyond the coherent length, at the boundary of these regions m transits from m_0 to $-m_0$ gradually across $m = 0$. In this boundary region, the free energy is larger than minimum value of the free energy. This transition region is called topological defect.

付録 L

Gauge Theory

L.1 Introductory review of expressions of a free particle dynamics

The Lagrangian of a free non relativistic particle with mass m is,

$$L = \frac{1}{2}mv^2. \quad (\text{L.1})$$

The canonical momentum is defined by

$$P^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = mv^i. \quad (\text{L.2})$$

The Hamiltonian is defined by the following canonical transformation of coordinate in phase space from (x^i, \dot{x}^i) to (x^i, P^i) as

$$H = \sum_i \dot{x}^i P^i - L = \frac{1}{2m} \sum_i P^i P_i. \quad (\text{L.3})$$

Since a coordinate x^i and its canonical momentum P^i satisfy the Heisenberg uncertainty principle,

$$[x^i, P^i] = i\hbar, \quad (\text{L.4})$$

the canonical momentum is represented by a following operator

$$P^i = -i\hbar \partial_i. \quad (\text{L.5})$$

The energy of the particle E is represented by operator as

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (\text{L.6})$$

The wave function of the particle, ψ , satisfies following Shrödinger equation,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi. \quad (\text{L.7})$$

In the following discussion, the wave function, ψ , is treated as the field variable and it is called as the Shrödinger field. The Lagrangian density of the Shrödinger field is

$$\mathcal{L} = i\hbar \psi^* \partial_t \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \partial_i \psi^* \partial_i \psi. \quad (\text{L.8})$$

L.2 The Noether's theorem of the field

Consider n component field $\phi_a(x)$. Suppose the Lagrangian density of the field is function of ϕ_a and $\partial_\mu \phi_a$, that is $\mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)$. The action is defined by

$$I = \int_V d^4x \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)), \quad (\text{L.9})$$

where V is the 4 dimensional volume and

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right). \quad (\text{L.10})$$

Consider an infinitesimal variation of the field variables as

$$\begin{aligned} \phi_a(x) &\rightarrow \phi_a(x) + \delta\phi_a(x), \\ \partial_\mu \phi_a(x) &\rightarrow \partial_\mu \phi_a(x) + \partial_\mu \delta\phi_a(x), \end{aligned} \quad (\text{L.11})$$

while the field values on the boundary surface, S , enclosing the volume V that is

$$\delta\phi_a(at S) = 0, \quad (\text{L.12})$$

$$\partial \delta\phi_a(at S) = 0. \quad (\text{L.13})$$

The variational principle, that is the variation of the action in the first order of the small variations of the field values, provides the equation for the physically realized field must be satisfied. So

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int_V d^4x [\mathcal{L}(\phi_a(x) + \delta\phi_a(x), \partial_\mu\phi_a(x) + \partial_\mu\delta\phi_a(x)) - \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu\phi_a(x))] \\
&= \int_V d^4x \left[\mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu\phi_a) + \sum_a \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} \delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_a} \partial_\mu\delta\phi_a \right) - \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu\phi_a) \right] \\
&= \sum_a \int_S d^3x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_a} \delta\phi_a + \sum_a \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_a} \right] \delta\phi_a \\
&= \sum_a \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_a} \right] \delta\phi_a \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{L.14}$$

where the boundary conditions (L.12) are used. For the equation (L.14) to be satisfied for arbitrary variations $\delta\phi_\alpha$, the field must be satisfied following equation,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_a} = 0. \tag{L.15}$$

This is the Euler-Lagrange equation for the field ϕ_a .

In the case of Schrödinger field, the field has two components of ψ and ψ^* , the Euler-Lagrange equation gives

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi^*} &= i\hbar\partial_t\psi + \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \partial_i\partial^i\psi \\
&= i\hbar\partial_t\psi + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi = 0,
\end{aligned} \tag{L.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi} &= -i\hbar\frac{1}{c}\partial_t c\psi^* - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \partial_i\partial^i\psi^* \\
&= -\hbar\partial_t\psi^* + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi^* = 0.
\end{aligned} \tag{L.17}$$

These are actually the Schrödinger equations for ψ and ψ^* . Multiplying ψ^* to eq.(L.16) and ψ to eq.(L.17) and takes difference of these two equations provides

$$i\hbar\partial_t(\psi^*\psi) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hbar^2}{2m} (\psi^*\vec{\nabla}\psi - \vec{\nabla}\psi^*\psi) \right). \quad (\text{L.18})$$

If the field describes the electrically charged particle with charge q , eq.(L.18) provides the charge conservation law such as

$$\partial_t\rho_e + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e = 0, \quad (\text{L.19})$$

$$\rho_e \equiv q\psi^*\psi, \quad (\text{L.20})$$

$$\vec{j}_e \equiv -iq\frac{\hbar}{2m}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \vec{\nabla}\psi^*\psi). \quad (\text{L.21})$$

In the case of the scalar field, the Lagrangian density is given as

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V, \quad (\text{L.22})$$

where natural unit is adopted when the scalar field is treated in the following discussion. By inserting it to the Euler-Lagrange equation, gives

$$\begin{aligned} & -\frac{dV}{d\phi} + \frac{1}{2}\partial_\mu\eta^{\alpha\beta}(\delta_\alpha^\mu\partial_\beta\phi + \partial_\alpha\phi\delta_\beta^\mu) \\ & = -\frac{dV}{d\phi} + \square\phi = 0. \end{aligned} \quad (\text{L.23})$$

When

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (\text{L.24})$$

eq.(L.23) reduces to the Klein-Golden equation,

$$-m^2\phi + \square\phi = 0. \quad (\text{L.25})$$

The conservation law is deeply related to the invariance of the system under certain transformation. The Noether's theorem clarifies this situation. Suppose that the action of the system is invariant under the coordinate transformation of

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x), \quad (\text{L.26})$$

where ε^μ takes infinitesimally small value and described as

$$\varepsilon^\mu = X_{\nu\gamma}^\mu\delta\omega^{\nu\gamma}. \quad (\text{L.27})$$

So in the following discussion, the first order of the small variables are taken into account and the higher order of the small variables are neglected. The field variables are transformed according to this coordinate transformation as

$$\phi'_a(x') = \phi_a(x) + \delta\phi_a(x). \quad (\text{L.28})$$

In the first order of the small variable, $\delta\phi_a(x)$ should be a linear in $\delta\omega^{v\gamma}$ and described as

$$\delta\phi_a(x) = \Psi_{a,v\gamma}\delta\omega^{v\gamma}, \quad (\text{L.29})$$

where a runs values to discriminate the species of the field. In this section, we restrict to the case that v and γ runs $0 \sim 3$ to discriminate axis of the coordinate. Define the Lie derivative as

$$\delta^L\phi_a(x) = \phi'_a(x) - \phi_a(x). \quad (\text{L.30})$$

The Lie derivative is expressed as follows

$$\begin{aligned} \delta^L\phi_a(x) &= \phi'_a(x') - \phi_a(x) - (\phi'_a(x') - \phi'_a(x)) \\ &= \delta\phi_a(x) - \partial_\mu\phi'_a(x)\varepsilon^\mu(x) \\ &= \delta\phi_a(x) - \partial_\mu\phi_a(x)\varepsilon^\mu(x), \\ &= \Psi_{a,v\gamma}\delta\omega^{v\gamma} - \partial_\mu\phi_a(x)X_{v\gamma}^\mu\delta\omega^{v\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{L.31})$$

In the last equal sign, taken into account that $\phi'_a(x) - \phi_a(x)$ is the first order in the small variable and the difference only carries higher order in small variables. The system is invariant under a certain transformation means that the action of the system is invariant under the transformation. So let's investigate how the action (L.9) is transformed under the coordinate transformation (L.26). In the following calculation, we use

$$\begin{aligned} d^4x' &= \frac{\partial(x')}{\partial(x)}d^4x \sim (1 + \partial_\mu\varepsilon^\mu(x))d^4x, \\ \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} &= \delta_\mu^\nu + \partial_\mu\varepsilon^\nu, \\ \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} &= \delta_\mu^\nu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu &= \delta_\mu^\nu - \partial_\mu \varepsilon^\nu, \\ \partial'_\mu \phi'_a(x') &= (\partial_\mu - \partial_\mu \varepsilon^\nu \partial_\nu)(\phi_a(x) + \delta\phi_a(x)) \\ &= \partial_\mu \phi_a(x) - \partial_\mu \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi_a(x) + \partial_\mu \delta\phi_a(x)\end{aligned}$$

and the functional form of the Lagrangian density with the field variables is invariant under any transformation since it's scalar., like

$$\vec{A}' \cdot \vec{B}' = \vec{A} \cdot \vec{B}.$$

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{V'} d^4x' \mathcal{L}'(\phi'_a(x'), \partial'_\mu \phi'_a(x')) - \int_V d^4x \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)) \\ &= \int_V d^4x (1 + \partial_\mu \varepsilon^\mu(x)) \mathcal{L}(\phi'_a(x'), \partial'_\mu \phi'_a(x')) - \int_V d^4x \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)) \\ &= \int_V d^4x (1 + \partial_\mu \varepsilon^\mu(x)) [\mathcal{L}(\phi_a(x) + \delta\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x) - \partial_\mu \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi_a(x) + \partial_\mu \delta\phi_a(x))] \\ &\quad - \int_V d^4x \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)) \\ &= \int_V d^4x \left[(\partial_\mu \varepsilon^\mu(x)) \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)) + \sum_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta\phi_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a(x)} (-\partial_\mu \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi_a + \partial_\mu \delta\phi_a) \right) \right] \\ &= \int_V d^4x \left[\partial_\mu (\varepsilon^\mu \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x))) - \varepsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta\phi_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a(x)} (-\partial_\mu \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi_a + \partial_\mu \delta\phi_a) \right) \right] \\ &= \int_V d^4x \partial_\mu (\varepsilon^\mu \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x))) \\ &\quad - \sum_a \left[\int_V d^4x \varepsilon^\mu(x) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \partial_\mu \phi_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi_a(x)} \partial_\mu \partial_\nu \phi_a(x) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_a \int_V d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta\phi_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi_a(x)} (-\partial_\nu \varepsilon^\mu \partial_\mu \phi_a + \partial_\nu \delta\phi_a) \right) \right] \\ &= \int_V d^4x \partial_\mu (\varepsilon^\mu \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x))) \\ &\quad + \sum_a \int_V d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} (\delta\phi_a - \varepsilon^\mu \partial_\mu \phi_a) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi_a} (\partial_\nu \delta\phi_a - \partial_\nu \varepsilon^\mu \partial_\mu \phi_a - \varepsilon^\mu \partial_\mu \partial_\nu \phi_a) \right] \\ &= \int_V d^4x \partial_\mu (\varepsilon^\mu \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x))) \\ &\quad + \sum_a \int_V d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta^L \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \phi_a} \partial_\nu \delta^L \phi_a \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_V d^4x \partial_\mu \left(\varepsilon^\mu \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)) + \sum_a \delta^L \phi_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \right) \\
&\quad + \sum_a \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \right) \right] \delta^L \phi_a \\
&= \int_V d^4x \partial_\mu \left(\varepsilon^\mu \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)) + \sum_a \delta^L \phi_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \right), \\
&= \int_V d^4x \partial_\mu \left(X_{\nu\gamma}^\mu \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)) + \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} (\Psi_{a,\nu\gamma} - \partial_\beta \phi_a(x) X_{\nu\gamma}^\beta) \right) \delta \omega^{\nu\gamma}. \tag{L.32}
\end{aligned}$$

In the last equal sign, we use that the field satisfies the Euler-Lagrange equation. The invariance of the action under the transformation, that is $\delta I = 0$ for arbitrary values of $\delta \omega^{\nu\gamma}$, provides following conservation law.

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{L.33}$$

$$j_{\nu\gamma}^\mu = \left(X_{\nu\gamma}^\mu \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)) + \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} (\Psi_{a,\nu\gamma} - \partial_\beta \phi_a(x) X_{\nu\gamma}^\beta) \right). \tag{L.34}$$

The j^μ is the conserved current and is called the Noether current. This is the Noether's theorem. In the following discussion, natural unit is adopted.

The invariance for the global time and spatial translational transformation of $\varepsilon^\mu = \eta_\nu^\mu \eta^\nu$, provides the energy and momentum conservation. In this case, $X_{\nu\gamma}^\mu$ and $\delta \omega^{\nu\gamma}$ are reduced to

$$\begin{aligned}
X_\nu^\mu &= \eta_\nu^\mu, \\
\delta \omega^{\nu\gamma} &= \varepsilon^\nu,
\end{aligned}$$

where one of suffixes γ is dropped. Therefore,

$$j_\nu^\mu = \left(\eta_\nu^\mu \mathcal{L} + \sum_a \delta^L \phi_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \right). \tag{L.35}$$

In the case of the scalar field, $\delta \phi(x) = 0$ by definition, so $\Psi_{a,\nu\gamma} = 0$ and the Lagrangian density is described by

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V. \tag{L.36}$$

So $\delta^L \phi_a(x) = -\partial_\beta \phi_a(x) \eta_\nu^\beta$. Then, the following energy momentum tensor for

the scalar field is deduced,

$$j_V^\mu = -\eta_V^\mu \mathcal{L} + \eta_V^\beta \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_a} \partial_\beta \phi_a(x). \quad (\text{L.37})$$

The energy density, ρ_ϕ , is

$$\begin{aligned} j_0^0 &= -j^{00} = -\rho_\phi = \mathcal{L} - \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi_a} \partial_0 \phi_a(x), \\ &= -\left(\mathcal{L} - \sum_a \pi_a(x) \dot{\phi}_a(x) \right), \end{aligned} \quad (\text{L.38})$$

$$= -\sum_a \left(\frac{1}{2} (\dot{\phi}_a^2 + (\vec{\nabla} \phi_a)^2) + V \right), \quad (\text{L.39})$$

where

$$\pi_a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a}, \quad (\text{L.40})$$

is the canonical momentum. The term in the parenthesis in the second line of the above equation is definition of the Hamiltonian. And the pressure, P_ϕ , is

$$j_1^1 = P_\phi = \mathcal{L} - \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \phi_a} \partial_i \phi_a(x) = \sum_a \left(\frac{1}{2} (\dot{\phi}_a^2 - (\vec{\nabla} \phi_a)^2) - V \right). \quad (\text{L.41})$$

The i th component of the momentum density is

$$j_0^i = -M_\phi^{i0} = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \phi_a} \partial_0 \phi_a(x) = \sum_a \dot{\phi}_a \partial^i \phi_a = \sum_a \pi_a(x) \partial^i \phi_a(x). \quad (\text{L.42})$$

The invariance of the system against the coordinate rotation provides the conservation of the angular momentum. Consider the following generalized Lorentz transformation.

$$x'^\mu = \Lambda_V^\mu x^\nu. \quad (\text{L.43})$$

In the case of infinitesimal transformation,

$$x'^\mu = x^\mu + \delta \omega_V^\mu x^\nu = x^\mu + \eta_V^\mu x_\gamma \delta \omega^{V\gamma}. \quad (\text{L.44})$$

For the Lorentz transformation,

$$\delta \omega^{\mu\nu} = -\delta \omega_{\nu\mu}, \quad (\text{L.45})$$

is satisfied. So $\delta\omega^{\mu\nu}$ is an antisymmetric tensor. From eq.(L.44), we get

$$X_{\nu\gamma}^{\mu} = \eta_{\nu}^{\mu} x_{\gamma}. \quad (\text{L.46})$$

Since $\delta\omega^{\mu\nu}$ is an antisymmetric tensor, only antisymmetric part of eq.(L.46) provides non zero contribution in eq.(L.44). Therefore, the antisymmetric part of eq.(L.46) is extracted as

$$X_{\nu\gamma}^{\mu} = \frac{1}{2}(\eta_{\nu}^{\mu} x_{\gamma} - \eta_{\gamma}^{\mu} x_{\nu}). \quad (\text{L.47})$$

Then, the Lie derivative becomes

$$\delta^L \phi_a(x) = \Psi_{a,\nu\gamma} - \partial_{\beta} \phi_a \frac{1}{2}(\eta_{\nu}^{\beta} x_{\gamma} - \eta_{\gamma}^{\beta} x_{\nu}). \quad (\text{L.48})$$

For $\nu = i, \gamma = j$,

$$\delta^L \phi_a(x) = \Psi_{a,ij} - \frac{1}{2}(\partial_i \phi_a(x) x_j - \partial_j \phi_a(x) x_i), \quad (\text{L.49})$$

$$X_{ij}^0 = 0. \quad (\text{L.50})$$

So 0th component of the Noether current associated with the invariance of the coordinate rotation is obtained as

$$\begin{aligned} j_{ij}^0 &= \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi_a} \left(\Psi_{a,ij} - \frac{1}{2}(\partial_i \phi_a(x) x_j - \partial_j \phi_a(x) x_i) \right) \\ &= \sum_a \left(\pi_a(x) \Psi_{a,ij} - \frac{1}{2} \pi_a(x) (\partial_i \phi_a(x) x_j - \partial_j \phi_a(x) x_i) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha} 2\pi_{\alpha}(x) \Psi_{\alpha,ij} + M_{\phi}^{j0} x_i - M_{\phi}^{i0} x_j \right), \end{aligned} \quad (\text{L.51})$$

The first term in the parenthesis is the spin angular momentum of the field ϕ_a . The second term is the orbital angular momentum. This result shows that the total angular momentum that is sum of the spin angular momentum and the orbital angular momentum, is the conserved variable.

The transformation is not restricted to the transformation of the coordinate system. Transformations related to Internal degree of freedom plays important role in the nature of the quantum field theory. As for example, the infinitesimal global phase transformation of the Schrödinger field is considered, that is,

$$\psi'(x) = e^{i\theta} \psi(x) \sim (1 + i\theta) \psi(x). \quad (\text{L.52})$$

Since the phase transformation is the transformation of the internal space, that is $\varepsilon^\mu = 0$, the Lie derivative becomes

$$\delta^L \psi = i\theta \psi, \quad (\text{L.53})$$

$$\delta^L \psi^* = -i\theta \psi^*. \quad (\text{L.54})$$

Therefore, j_θ^μ associated with the phase transformation of the wave function is

$$j_\theta^0 = -i\theta \psi i\hbar c \psi^* = \hbar c \theta \psi^* \psi, \quad (\text{L.55})$$

$$j_\theta^i = -i\theta \psi \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial^i \psi^* \right) + i\theta \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial^i \psi \right). \quad (\text{L.56})$$

By eliminating $\theta\hbar$ and multiplying a charge q , we get

$$j^0 = qc|\psi|^2, \quad (\text{L.57})$$

$$j^i = -iq \frac{\hbar}{2m} (\psi^* \partial_i \psi - \partial_i \psi^* \psi), \quad (\text{L.58})$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (\text{L.59})$$

This is the charge conservation of the Schrödinger field. The important conjecture deduced from the above lesson is that the symmetry of the system against the phase transformation of the field may associated with the charge conservation of the system.

The inherent problem associated with the Klein-Gordon equation and how it is resolved by applying the Noether theory to the scalar field for the phase transformation of the field are discussed. Consider the complex scalar field ϕ which satisfies the Klein-Gordon equation. The field is described by two real scalar field ϕ_1 and ϕ_2 as

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2). \quad (\text{L.60})$$

From the Klein-Gordon equations, following continuity equation is led.

$$\partial_t(-\phi^* \dot{\phi} + \dot{\phi} \phi^*) + \vec{\nabla} \cdot (\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^*) = 0. \quad (\text{L.61})$$

This equation claims that

$$j^0 = i\phi^* \dot{\phi} - i\phi \dot{\phi}^*, \quad (\text{L.62})$$

is conserved. By inserting the free scalar field solution

$$\phi \propto e^{-i\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (\text{L.63})$$

$$\omega = \pm \sqrt{m^2 + k^2}, \quad (\text{L.64})$$

into eq.(L.62), we get

$$j^0 = 2\omega |\phi|^2. \quad (\text{L.65})$$

Since ω takes a negative value, j^0 also takes negative value. Therefore, we can not interpret j^0 as a probability density. The Lagrangian density of the complex scalar field is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_1 \partial_\nu \phi_1 + \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_2 \partial_\nu \phi_2) - V, \\ &= -\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi - V, \end{aligned} \quad (\text{L.66})$$

where V is the function of $|\phi|$. The Lagrangian is invariant under the following global phase transformation of the scalar field,

$$\phi'(x) = e^{iq\theta} \phi(x), \quad (\text{L.67})$$

where q is the charge of the particle associated with the field ϕ . The Lie derivative of ϕ and ϕ^* are

$$\delta^L \phi(x) = iq\theta \phi(x), \quad (\text{L.68})$$

$$\delta^L \phi^*(x) = -iq\theta \phi^*(x). \quad (\text{L.69})$$

Since $X_{v\gamma}^\mu = 0$, $\Psi_\phi = iq$, $\Psi_{\phi^*} = -iq$, the associated Noether current is

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} iq + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^*} (-iq), \\ &= -iq\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi^* \delta^L \phi + iq\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi. \end{aligned} \quad (\text{L.70})$$

Then, the conserved variable associated with the global phase transformation of the complex scalar field is

$$j^0 = iq\dot{\phi}^*\phi - iq\phi\dot{\phi}^*. \quad (\text{L.71})$$

Therefore, we now get the answer on the interpretation of j^0 . It is the current density and is not the probability density. The first term in eq.(L.71) represents the contribution from the particle with a charge q . The second term represents the contribution from the antiparticle with a charge $-q$.

L.3 Gauge Invariance

L.3.1 Electrodynamics

It is well known that the Maxwell equations are invariant under the following gauge transformation.

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi, \quad (\text{L.72})$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{c\partial t}. \quad (\text{L.73})$$

By using the four dimensional potential as

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad (\text{L.74})$$

the gauge transformation is described as

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\chi, \quad (\text{L.75})$$

where

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(-\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right). \quad (\text{L.76})$$

Define the electromagnetic field tensor $F_{\mu\nu}$ as

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (\text{L.77})$$

The Lagrangian density of the electromagnetic field when the four current j^μ exists is given by

$$\mathcal{L} = \frac{1}{c}A_\mu j^\mu - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{c} A_\mu j^\mu - \frac{1}{16\pi} \eta^{\mu'\alpha} \eta^{\nu'\beta} (\partial_{\mu'} A_{\nu'} - \partial_{\nu'} A_{\mu'}) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha). \quad (\text{L.78})$$

The Euler-Lagrange equation is given as

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu A_\mu}, \\ &= \frac{1}{c} j^\mu + \frac{1}{16\pi} \partial_\nu \eta^{\mu'\alpha} \eta^{\nu'\beta} \left[(\delta_{\mu'}^\nu \delta_{\nu'}^\mu - \delta_{\nu'}^\nu \delta_{\mu'}^\mu) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) \right. \\ &\quad \left. + (\partial_{\mu'} A_{\nu'} - \partial_{\nu'} A_{\mu'}) (\delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu - \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu) \right] \\ &= \frac{1}{c} j^\mu + \frac{1}{4\pi} \partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu). \end{aligned} \quad (\text{L.79})$$

The final form of the equation is rewritten as

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (\text{L.80})$$

This is derivative forms of the Coulomb law and the Ampere-Maxwell equations. In the free field, that means $j^\mu = 0$, the equations is reduced to

$$\square A^\nu = 0, \quad (\text{L.81})$$

where the Lorentz gauge $\partial_\nu A^\nu = 0$ is selected. This shows that the electromagnetic field is composed by massless particle.

As explained in Chapter L.75, the Lagrangian of an electron interacting with electromagnetic field is given by eq.(F.2). The canonical momentum is described by eq.(F.3) as

$$P^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = mv^i - \frac{e}{c} A^i = p^i - \frac{e}{c} A^i, \quad (\text{L.82})$$

where $p^i = mv^i$ is a physical momentum of a particle. The Hamiltonian of the particle is given by eq.(F.4) as

$$H = \vec{P} \cdot \vec{v} - L = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - e\phi.$$

Therefore, the Schrödinger equation of an electron interacting with electromagnetic field is given as

$$i\hbar\partial_t\psi = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 \psi - e\phi\psi. \quad (\text{L.83})$$

Consider a local phase transformation of the wave function such as

$$\psi'(x) = \text{Exp} \left[-i\frac{e}{\hbar c}\chi(x) \right] \psi(x). \quad (\text{L.84})$$

Suppose that the electromagnetic field is also transformed into $A'^\mu(x)$ due to the phase transformation of the wave function. Then, the Schrödinger equation for ψ' becomes

$$i\hbar\partial_t(e^{ie/\hbar c\chi(x)}\psi') = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 e^{ie/\hbar c\chi(x)}\psi' - e\phi e^{ie/\hbar c\chi(x)}\psi'. \quad (\text{L.85})$$

The left hand side is

$$l.h.s = e^{ie/\hbar c\chi(x)} \left(i\hbar\partial_t\psi' - \frac{e}{c}\partial_t\chi\psi' \right).$$

The right hand side is

$$r.h.s = e^{ie/\hbar c\chi(x)} \left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}(\vec{\nabla}\chi) + \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 \psi' - e\phi\psi' \right].$$

For the Schrödinger equation to be invariant under the local phase transformation of the wave function, the 4D electromagnetic potential must be transformed as following the gauge transformation given in eqs.(L.72) and (L.73). In other word, if the electromagnetic potential suffers the gauge transformation when the local phase transformation is applied to the wave function, the Schrödinger equation is invariant and takes the following form

$$i\hbar\partial_t\psi' = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}' \right)^2 \psi' - e\phi'\psi'. \quad (\text{L.86})$$

Since the invariance of the system under phase transformation of the wave function is directly connected to the charge conservation, the gauge invariance of the system guarantees the charge conservation of the charge associated with the gauge field, in this case A^μ .

The operator defined by

$$D^\mu \equiv \partial^\mu + i\frac{e}{\hbar c}A^\mu, \quad (\text{L.87})$$

is called the covariant derivative because this combination guarantees the invariance of the equation of the quantum field under the gauge transformation. By replacing ∂^μ to the covariant derivative in a free particle Lagrangian, we get the Lagrangian in which the particle interacts with the gauge field. Suppose that the wave function and the vector field transformed by the gauge transformation as

$$\psi'(x) = e^{-i\frac{e}{\hbar c}\chi} \psi(x), \quad (\text{L.88})$$

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x). \quad (\text{L.89})$$

This leads,

$$\begin{aligned} D'^\mu \psi'(x) &= \left(\partial^\mu + i\frac{e}{\hbar c}A^\mu + i\frac{e}{\hbar c}\partial^\mu \chi \right) e^{-i\frac{e}{\hbar c}\chi} \psi(x), \\ &= e^{-i\frac{e}{\hbar c}\chi} \left(\partial^\mu - i\frac{e}{\hbar c}\partial^\mu \chi + i\frac{e}{\hbar c}A^\mu + i\frac{e}{\hbar c}\partial^\mu \chi \right) \psi(x), \\ &= e^{-i\frac{e}{\hbar c}\chi} D^\mu \psi(x). \end{aligned} \quad (\text{L.90})$$

Therefore, $D^\mu \psi$ behaves like ψ for the gauge transformation and $D^\nu D^\mu \psi$ is gauge invariant and so on.

付録 M

Wick theorem

M.1 Wick の定理

場の演算子 $\varphi(x)$ の N 個の時間順序積 T (time ordered product)、正規順序積 N (normal ordered product) の間に以下の関係式を Wick の定理と呼ぶ。

$$\begin{aligned}
 & T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_N)) \\
 &= N(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_N)) \\
 &+ \langle 0|T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)|0\rangle N(\varphi(x_3)\varphi(x_4)\dots\varphi(x_N)) + perms. \\
 &+ \langle 0|T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)|0\rangle \langle 0|T(\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0\rangle N(\varphi(x_5)\varphi(x_6)\dots\varphi(x_N)) + perm. \\
 &+ \dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{M.1}$$

この定理を証明するためまず以下の定理を証明する。

定理： $J(x)$ を c -数の関数とすると、次式が成り立つ。

$$T \left\{ e^{-i \int d^4x J(x)\varphi(x)} \right\} = N \left\{ e^{-i \int d^4x J(x)\varphi(x)} \right\} e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x)J(y) \langle 0|T(\varphi(x)\varphi(y))|0\rangle} \tag{M.2}$$

以下のように時間の関数 $H(t)$ を定義する。

$$H(t) \equiv \int d^3\mathbf{x} J(t, \mathbf{x}) \varphi(t, \mathbf{x})$$

定理 (M.2) の右辺積分を微小時間間隔 Δt での和で以下のように近似できる。

$$T \left\{ e^{-i \int_{t_1}^{t_n} dt H(t)} \right\} \approx T \left\{ e^{-i \Delta t (H(t_n) + H(t_{n-1}) + \dots + H(t_1))} \right\}$$

ここで $t_n > t_{n-1} > \dots > t_1$ の順番である。右辺のテイラー展開は以下のようになる。

$$\begin{aligned} & T \left\{ e^{-i \Delta t (H(t_n) + H(t_{n-1}) + \dots + H(t_1))} \right\} \\ &= 1 - i \Delta t (H(t_n) + H(t_{n-1}) + \dots + H(t_1)) \\ & \quad + \frac{(-i \Delta t)^2}{2!} (H(t_n)^2 + H(t_{n-1})^2 + \dots + 2! H(t_n) H(t_{n-1}) + 2! H(t_n) H(t_{n-2}) + \dots + 2! H(t_{n-1}) H(t_{n-2}) + \dots) \\ & \quad + \sum_{m>2} \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} \frac{(-i \Delta t)^m}{m!} \frac{m!}{m_1! m_2! \dots m_n!} H^{m_n}(t_n) H^{m_{n-1}}(t_{n-1}) \dots H^{m_1}(t_1) \\ &= 1 - i \Delta t (H(t_{n-1}) + \dots) + \sum_{m>2} \sum_{m_{n-1}+\dots+m_1=m} \frac{(-i \Delta t)^{m_{n-1}}}{m_{n-1}!} H^{m_{n-1}}(t_{n-1}) \dots \frac{(-i \Delta t)^{m_1}}{m_1!} H^{m_1}(t_1) \\ & \quad - i \Delta t H(t_n) \left(1 + (-i \Delta t) (H(t_{n-1}) + \dots) + \sum_{m>2} \sum_{m_{n-1}+\dots+m_1=m} \frac{(-i \Delta t)^{m_{n-1}}}{m_{n-1}!} H^{m_{n-1}}(t_{n-1}) \dots \frac{(-i \Delta t)^{m_1}}{m_1!} H^{m_1}(t_1) \right) \\ & \quad + \frac{(-i \Delta t)^2}{2!} H(t_n)^2 \left(1 + (-i \Delta t) (H(t_{n-1}) + \dots) + \sum_{m>2} \sum_{m_{n-1}+\dots+m_1=m} \frac{(-i \Delta t)^{m_{n-1}}}{m_{n-1}!} H^{m_{n-1}}(t_{n-1}) \dots \frac{(-i \Delta t)^{m_1}}{m_1!} H^{m_1}(t_1) \right) \\ & \quad + \sum_{m_n>2} \frac{(-i \Delta t)^{m_n}}{m_n!} H^{m_n}(t_n) \sum_{m \geq 0} \sum_{m_{n-1}+\dots+m_1=m} \frac{(-i \Delta t)^{m_{n-1}}}{m_{n-1}!} H^{m_{n-1}}(t_{n-1}) \dots \frac{(-i \Delta t)^{m_1}}{m_1!} H^{m_1}(t_1) \\ &= \left(1 - i \Delta t H(t_n) + \frac{(-i \Delta t)^2}{2!} + \sum_{m_n>2} \frac{(-i \Delta t)^{m_n}}{m_n!} H^{m_n}(t_n) \right) \\ & \quad \times \left(1 + (-i \Delta t) (H(t_{n-1}) + \dots) + \sum_{m>2} \sum_{m_{n-1}+\dots+m_1=m} \frac{(-i \Delta t)^{m_{n-1}}}{m_{n-1}!} H^{m_{n-1}}(t_{n-1}) \dots \frac{(-i \Delta t)^{m_1}}{m_1!} H^{m_1}(t_1) \right) \\ &= \left(1 - i \Delta t H(t_n) + \frac{(-i \Delta t)^2}{2!} + \sum_{m_n>2} \frac{(-i \Delta t)^{m_n}}{m_n!} H^{m_n}(t_n) \right) \\ & \quad \times \left(1 - i \Delta t H(t_{n-1}) + \frac{(-i \Delta t)^2}{2!} + \sum_{m_{n-1}>2} \frac{(-i \Delta t)^{m_{n-1}}}{m_{n-1}!} H^{m_{n-1}}(t_{n-1}) \right) \\ & \quad \times \dots \\ & \quad \times \left(1 - i \Delta t H(t_1) + \frac{(-i \Delta t)^2}{2!} + \sum_{m_1>2} \frac{(-i \Delta t)^{m_1}}{m_1!} H^{m_1}(t_1) \right) \end{aligned} \tag{M.3}$$

一つ目の等号の変形では、指数をテイラー展開した後、T積の規則にしたがって、各項を右から時間の若い順に並べ替えを行った。各項は

$$1 - i\Delta t H(t_n) + \frac{(-i\Delta t)^2}{2!} + \sum_{m_n > 2} \frac{(-i\Delta t)^{m_n}}{m_n!} H^{m_n}(t_n) \rightarrow e^{-i\Delta t H(t_n)},$$

のように指数にまとめることができる。したがって、式 (M.3) から以下の関係式を得る。

$$T \left\{ e^{-i\Delta t(H(t_n)+H(t_{n-1})+\dots+H(t_1))} \right\} = e^{-i\Delta t H(t_n)} e^{-i\Delta t H(t_{n-1})} \dots e^{-i\Delta t H(t_1)}. \quad (\text{M.4})$$

今 $H(t)$ は、場の演算子をつつしか含まないなので、 $[H(t_i), H(t_j)]$ は c 数となる。したがって、ベーカー・ハウドルフの公式 (G.40) を使って式 (M.4) の右辺は以下のように変形できる。

$$e^{-i\Delta t H(t_n)} e^{-i\Delta t H(t_{n-1})} \dots e^{-i\Delta t H(t_1)} = e^{-i\Delta t \sum_{i=1}^n H(t_i) - \frac{1}{2} \Delta t^2 \sum_{k>l} H(t_k) H(t_l)}$$

以上から以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} T \left\{ e^{-i \int d^4 x J(x) \varphi(x)} \right\} &= e^{-i \int dt H(t)} e^{-\frac{1}{2} \int \int dt_1 dt_2 \theta(t_1 - t_2) [H(t_1), H(t_2)]} \\ &= e^{-i \int d^4 x J(x) \varphi(x)} e^{-\frac{1}{2} \int \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) J(x_2) \theta(t_1 - t_2) [\varphi(x_1), \varphi(x_2)]}. \end{aligned} \quad (\text{M.5})$$

一方、式 (M.2) の右辺の N 積は、 $\varphi(x) = \varphi^a(x) + \varphi^c(x)$ のように場を消滅演算子と生成演算子の項に分離することで以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} &N \left(e^{-i \int d^4 x J(x) \varphi(x)} \right) \\ &= N \left(1 - i \int d^4 x J(x) (\varphi^a(x) + \varphi^c(x)) + \frac{(-i)^2}{2!} \int \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) J(x_2) (\varphi^a(x_1) + \varphi^c(x_1)) (\varphi^a(x_2) + \varphi^c(x_2)) \dots \right) \\ &= 1 - i \int d^4 x J(x) (\varphi^a(x) + \varphi^c(x)) \\ &\quad + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) J(x_2) (\varphi^a(x_1) \varphi^a(x_2) + \varphi^c(x_1) \varphi^a(x_2) + \varphi^c(x_2) \varphi^a(x_1) + \varphi^c(x_1) \varphi^c(x_2)) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - i \int d^4x_1 J(x_1) \varphi^a(x_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1) J(x_2) \varphi^a(x_1) \varphi^a(x_2) \dots \\
&\quad - i \int d^4x_1 J(x_1) \varphi^c(x_1) \left(1 - i \int d^4x_2 J(x_2) \varphi^a(x_2) + \frac{(-i)^2}{2!} \int \int d^4x_2 d^4x_3 J(x_2) J(x_3) \varphi^a(x_2) \varphi^a(x_3) \dots \right) \\
&\quad + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1) J(x_2) \varphi^c(x_1) \varphi^c(x_2) \\
&\quad \times \left(1 - i \int d^4x_3 J(x_3) \varphi^a(x_3) + \frac{(-i)^2}{2!} \int \int d^4x_3 d^4x_4 J(x_3) J(x_4) \varphi^a(x_3) \varphi^a(x_4) \dots \right) \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&= e^{-i \int d^4x_1 J(x_1) \varphi^c(x_1)} e^{-i \int d^4x_2 J(x_2) \varphi^a(x_2)}. \tag{M.6}
\end{aligned}$$

最後の式にベーカー・ハウストルフの公式を適応する。

$$\begin{aligned}
&N \left(e^{-i \int d^4x J(x) \varphi(x)} \right) \\
&= e^{-i \int d^4x_1 J(x_1) (\varphi^c(x_1) + \varphi^a(x_1))} e^{-\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1) J(x_2) [\varphi^c(x_1), \varphi^a(x_2)]} \\
&= e^{-i \int d^4x_1 J(x_1) \varphi(x_1)} e^{-\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1) J(x_2) [\varphi^c(x_1), \varphi^a(x_2)]} \tag{M.7}
\end{aligned}$$

式 (M.5) と式 (M.7) から以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned}
&T \left\{ e^{-i \int d^4x J(x) \varphi(x)} \right\} \\
&= N \left(e^{-i \int d^4x J(x) \varphi(x)} \right) e^{\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1) J(x_2) ([\varphi^c(x_1), \varphi^a(x_2)] - \theta(t_1 - t_2) [\varphi(x_1), \varphi(x_2)])} \tag{M.8}
\end{aligned}$$

この式の N 積の後ろにある C 数の項を T 積を用いて表現するため、式 (M.8) の両辺の真空期待値を取る。右辺の N 積の真空期待値をまず計算する。

$$\begin{aligned}
&\langle 0 | N \left(e^{-i \int d^4x J(x) \varphi(x)} \right) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \left\{ 1 + N \left(-i \int d^4x J(x) \varphi(x) + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1) J(x_2) \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \right) \right\} | 0 \rangle
\end{aligned}$$

$$= 1. \quad (\text{M.9})$$

ここで有限個の場の演算子の積の N 積の真空期待値が必ず 0 になることを用いた。この結果から関係式 (M.8) の両辺の真空期待値は以下のようになる。

$$\langle 0|T \left\{ e^{-i \int d^4x J(x)\varphi(x)} \right\} |0\rangle = e^{\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1)J(x_2) ([\varphi^c(x_1), \varphi^a(x_2)] - \theta(t_1 - t_2)[\varphi(x_1), \varphi(x_2)])} \quad (\text{M.10})$$

この式は、任意の C 数の関数 $J(x)$ に対して成り立つので、 $J(x)$ が 1 と比べて十分小さな値を取る実関数として、式 (M.10) の両辺をテイラー展開する。式 (M.10) が恒等的に成り立つためには、 $J(x)$ の次数毎に両辺が等しくなければならない。左辺のテイラー展開を行う。

$$\begin{aligned} & \langle 0|T \left\{ e^{-i \int d^4x J(x)\varphi(x)} \right\} |0\rangle \\ &= \langle 0|T \left\{ 1 - i \int d^4x_1 J(x_1)\varphi(x_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1)J(x_2)\varphi(x_1)\varphi(x_2) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m>2} \frac{(-i)^m}{m!} \int d^4x_1 \dots d^4x_m J(x_1)\dots J(x_m)\varphi(x_1)\dots\varphi(x_m) \right\} |0\rangle \\ &= 1 + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1)J(x_2) \langle 0|T \{ \varphi(x_1)\varphi(x_2) \} |0\rangle \\ & \quad + \frac{(-i)^4}{4!} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 J(x_1)J(x_2)J(x_3)J(x_4) \langle 0|T \{ \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) \} |0\rangle \dots \end{aligned} \quad (\text{M.11})$$

ここで場の演算子の奇数個の積の真空期待値が 0 になることを用いた。次に $C(x_1, x_2) = ([\varphi^c(x_1), \varphi^a(x_2)] - \theta(t_1 - t_2)[\varphi(x_1), \varphi(x_2)])$ と置いて右辺のテイラー展開を行う。

$$\begin{aligned} & N \left\{ e^{\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1)J(x_2)C(x_1, x_2)} \right\} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J(x_1)J(x_2)C(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2!} \frac{1}{4} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 J(x_1)J(x_2)J(x_3)J(x_4)C(x_1, x_2)C(x_3, x_4) \dots \quad (\text{M.12})$$

式 (M.11) と式 (M.12) の J の二次から次の関係式を得る。

$$C(x_1, x_2) = - \langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)) | 0 \rangle. \quad (\text{M.13})$$

これを用いると J の 4 次は以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 J(x_1)J(x_2)J(x_3)J(x_4) \langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)) | 0 \rangle \\ &= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 J(x_1)J(x_2)J(x_3)J(x_4) \langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\varphi(x_3)\varphi(x_4)) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{3} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 J(x_1)J(x_2)J(x_3)J(x_4) \left(\langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\varphi(x_3)\varphi(x_4)) | 0 \rangle \right. \\ & \quad \left. + \langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_3)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\varphi(x_2)\varphi(x_4)) | 0 \rangle + \langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_4)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\varphi(x_2)\varphi(x_3)) | 0 \rangle \right) \end{aligned} \quad (\text{M.14})$$

これから以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\varphi(x_3)\varphi(x_4)) | 0 \rangle \\ & \quad + \langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_3)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\varphi(x_2)\varphi(x_4)) | 0 \rangle \\ & \quad + \langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_4)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\varphi(x_2)\varphi(x_3)) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{M.15})$$

この結果を式 (M.8) に代入し、両辺をテイラー展開して J の次数毎で両辺が等しいとすることで Wick の定理 (M.1) が証明される。4 つの場合に対する Wick の定理の真空期待値が、関係式 (M.15) の両辺の真空期待値に等しいことは自明である。また、関係式 (M.13) は $C(x_1, x_2)$ の真空期待値を取ることも証明できる。

$$\begin{aligned} & \langle 0 | C(x_1, x_2) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | ([\varphi^c(x_1), \varphi^a(x_2)] - \theta(t_1 - t_2)[\varphi(x_1), \varphi(x_2)]) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (\varphi^c(x_1)\varphi^a(x_2) - \varphi^a(x_2)\varphi^c(x_1) - \theta(t_1 - t_2)[\varphi(x_1), \varphi(x_2)]) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (-\varphi^a(x_2)\varphi^c(x_1) - \theta(t_1 - t_2)[\varphi(x_1), \varphi(x_2)]) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (-\varphi(x_2)\varphi(x_1) - \theta(t_1 - t_2)(\varphi(x_1)\varphi(x_2) + \varphi(x_2)\varphi(x_1))) | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle 0 | (-\theta(t_1 - t_2) + \theta(t_2 - t_1))\varphi(x_2)\varphi(x_1) - \theta(t_1 - t_2)(\varphi(x_1)\varphi(x_2) + \varphi(x_2)\varphi(x_1)) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | (-\theta(t_2 - t_1)\varphi(x_2)\varphi(x_1) - \theta(t_1 - t_2)\varphi(x_1)\varphi(x_2)) | 0 \rangle \\
&= -\langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)) | 0 \rangle. \tag{M.16}
\end{aligned}$$

計算の煩雑さを取り除くため $J(x) = iK(x)$ で定義される $K(x)$ に置き換えて式 (M.2) の両辺の $K(x)$ の n 次のテーラー展開の項の比較を行う。整数 m を用いて $n = 2m$ と表されるとき左辺は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
&T \left\{ e^{\int d^4x K(x)\varphi(x)} \right\} \\
&\rightarrow \frac{1}{(2m)!} \int d^4x_1 \dots d^4x_{2m} K(x_1) \dots K(x_{2m}) T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2m})) \tag{M.17}
\end{aligned}$$

一方右辺は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
&N \left\{ e^{\int d^4x K(x)\varphi(x)} \right\} e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4y K(x)K(y)C(x,y)} \\
&\rightarrow \sum_{l=0}^m \frac{1}{(2l)!(m-l)!} \frac{1}{2^{m-l}} \int d^4x_1 \dots d^4x_{2l} K_1 \dots K_l N(\varphi_1 \dots \varphi_{2l}) \int d^4x_{2l+1} \dots d^4x_{2m} K_{2l+1} \dots K_{2m} C_{2l+1,2l+2} \dots C_{2m-1,2m} \tag{M.18}
\end{aligned}$$

右辺の $1/(2l)!$ は、 N 積のテーラー展開の $2l$ 次をとったことからきており、 $1/(m-l)!$ は C 数部の指数の $m-l$ 次のテーラー展開の項を採用したことがきている。式 (M.17) と (M.18) から以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned}
&\int d^4x_1 \dots d^4x_{2m} K_1 \dots K_{2m} T(\varphi_1 \dots \varphi_{2m}) \\
&= \frac{m!}{(2l)!(2m-2l)!!} \int d^4x_1 \dots d^4x_{2m} K_1 \dots K_{2m} N(\varphi_1 \dots \varphi_{2l}) C_{2l+1,2l+2} \dots C_{2m-1,2m} \tag{M.19}
\end{aligned}$$

右辺は、 N 積に入る場を $2m$ 個から $2l$ 個選択する $(2m)!/(2l)!(2m-2l)!$ 個の組み合わせが取りうる。それぞれの組み合わせに対して、 $m-l$ 個の C_{ij} の組み合わせとしてどういう組み合わせを取るかという自由度が存在する。この自由度の数は以下のように数えられる。 φ_{2l+1} の組みとして残りの $2m-2l-1$ 個の場が取りうる。この組みを決めると残り $2m-2l-2$ 個の

場から一つの場を選択してその組みなる場を決める自由度が $2m - 2l - 3$ 個存在する。したがって、全場合の数は、

$$(2m - 2l - 1)(2m - 2l - 2) \dots 3 \cdot 1 = \frac{(2m - 2l)!}{(2m - 2l)!!}$$

である。したがって、式 (M.19) の右辺に取りうる独立な組み合わせの場合の数は

$$\frac{(2m)!}{(2l)!(2m - 2l)!} * \frac{(2m - 2l)!}{(2m - 2l)!!} = \frac{(2m)!}{(2l)!(2m - 2l)!!}$$

であり、式 (M.19) の右辺の係数と一致する。以上で Wick の定理 (M.1) が証明された。