令和 7 年度博士課程前期 2 年の課程一般選抜　天文学専攻　筆記試験出題意図

英語　大問 1
出題意図：冥王星を惑星と考えるべきだという研究者 A と準惑星と考えるべきだという研究者 B が議論をしている英文からの出題でした。学術的な内容の文章に関して、文章の流れを論理的に理解し、研究者 A と B の意見の共通点と相違点を正確かつ的確に把握する能力を問う問題でした。

英語　大問 2
出題意図：英語で書かれた簡単な算数や理科の問題を正確に題意を読み取ったうえで答えられるかを問う問題でした。

英語　大問 3
出題意図：トピックを与え、それに対する自分の意見を適切に英語で表現できるかを問う問題でした。

物理　大問 1
出題意図：支点の位置が時間変化可能な単振り子の運動をラグランジュ形式で一般的に記述し、運動方程式を導出させる基本的な問題です。ラグランジュアンの定義、一般座標変換などのラグランジュ形式の要点の理解度も確認できる問題です。特に、支点が水平方向や垂直方向に微小振動している場合で、それぞれ強制振動とパラメータ励振をする単振り子の運動について、線形の範囲で求める問題になっています。

物理　大問 2
出題意図：この問題の前半は輻射圧が重要である高温な気体を，後半は完全縮退した高密度な気体を題材とした熱統計力学の問題です。これらの気体は単純な理想気体と全く異なる性質を持ちますが宇宙の天体を構成する物質として重要であり理解しておくことが求められます。この問題では、これらの気体の特異的な性質を各基礎物理法則・定義に基づいて正確に導出および計算する能力を問うています。

物理　大問 3
出題意図：真空中に平行に置かれた 2 本の直線状導線による分布定数回路についての問題です。クーロンの法則やビオ・サバールの法則といった電磁気学の基本的な法則から出発し、この導線対が持つ単位長さあたりの電気容量や自己インダクタンスを求め、交流信号がどう伝搬していくのか取り上げました。天文学においては観測装置の開発の中などで登場する題材であり、電磁気学の基礎や信号の伝搬についての理解を確認する問題を目指しまし

た。

物理　大問４

出題意図：調和振動子の量子力学的取扱いに関する問題で、前半ではエルミート多項式を用いて波動関数を求め、量子化されたエネルギー準位を求めます。後半ではそれを応用し、一様磁場中の荷電粒子のサイクロトロン運動・ランダウ準位について論じます。前半の問題は、物理学の最も基本的な系の一つである調和振動子を題材として量子力学の基礎的な理解を問うものです。後半の問題ではより複雑ですが本質的に同じ性質の系に対して基礎的な理解を応用することができるかを問う共に、グラフの読み取りを含む現実的な問題を通じて天文学における物理学の役割と面白さを感じてもらうことを意図しています。

物 理（1）

長さ ℓ の軽い棒の一端を支点に固定し, もう一端に質量 m の質点を付け, 鉛直平面内で運動させる. 鉛直上向きに z 軸を取り, xz 平面内での運動を考える. 支点の位置は時間変化可能で, 重力加速度の大きさを g とする. 質点の位置を (x, z), 無次元量 ξ, η を用いて, 支点の位置を $(\ell\xi, \ell\eta)$, 棒が鉛直線 (z 軸) に対してなす角度を (反時計回りを正として) θ として, 以下の問いに答えよ. (下図参照)

問 1. **(a)** x, z を用いて, 質点の位置エネルギー（重力ポテンシャル）U を求めよ. ただし, ポテンシャルの基準点は $z = -\ell$ とせよ.

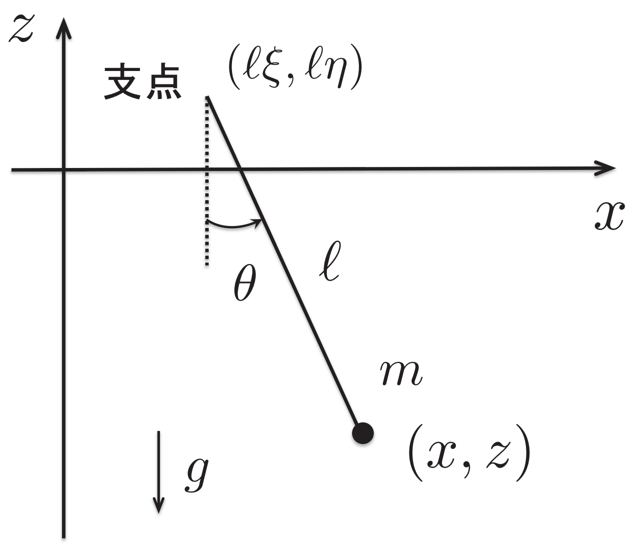
(b) x, z を用いて, 系のラグランジアンを求めよ.

(c) 一般座標 θ の関数として系のラグランジアンを表せ.

(d) (c) で求めたラグランジアンを用いて, 質点の運動方程式が次のように与えられることを示せ.

$$\ddot{\theta} + \ddot{\xi}\cos\theta + \ddot{\eta}\sin\theta + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

ただし, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.



図

※次のページにも問題があるので注意すること

問 2. 支点が原点に固定されている場合 $((\xi, \eta) = (0,0))$ の質点の運動を考える.

(a) 力学的エネルギー $E = \dfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + U$ が保存することを示せ.

(b) ポテンシャル $U(\theta)$ のグラフを描き, 運動の定性的な様子を, 場合分けして述べよ.

(c) $\theta = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$ まで質点を引き上げ, 静かに質点を離し, 運動させた. このときの解を $t = F(\theta)$ の形で求めよ. ただし、時刻 $t = 0$ で $\theta = 0$ とせよ. また, 関数 $F(\theta)$ は θ の関数の積分として表されることに注意せよ.

(d) $\theta = \pi$ まで質点を引き上げ, 静かに質点を離し, 運動させた場合の θ を求めよ. ただし, 時刻 $t = 0$ に $\theta = 0$ とせよ. また、このときの運動の様子を説明せよ.

(e) 運動の大まかな様子は, 相空間 ($\theta\dot{\theta}$ 平面) 上で見ると分かり易い. **(b)** の場合分けを考慮して、エネルギー一定曲線の概形を, 運動の向きを矢印で示しつつ, 相空間上に描け.

問 3. $(\xi, \eta) = \left(\dfrac{A}{\omega^2}\sin\omega t, 0\right)$ のように支点が左右に微小振動している場合の質点の運動を考える. ただし, $|\theta| \ll 1$, $0 < A \ll 1$ とする.

(a) 時刻 $t = 0$ に $\theta = \alpha$, $\dot{\theta} = \beta$ として, 解を求めよ.

(b) 支点の振動の振動数 ω を $\omega \to \omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ とした場合の θ を求めよ. また, このときの解の振る舞いについて説明せよ.

問 4. $(\xi, \eta) = \left(0, \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\delta\sin\omega t\right)$ のように支点が上下に微小振動しているの場合の質点の運動を考える. ただし, $|\theta| \ll 1$, $0 < \delta \ll 1$ とする.

(a) $\theta(t) = B\left(\sin\omega_0 t + \delta f(t)\right)$ と仮定し (B は定数), $f(t)$ の満たすべき方程式を δ の一次の精度で求めよ.

(b) **(a)** の結果から振動の振幅が時間とともに増大するような ω の値を求めよ.

物 理（2）

問 1. 温度 T の熱平衡状態にある輻射場について考える。

(a) この輻射場の単位体積当たりのヘルムホルツの自由エネルギー $F_{\rm rad}$ は $-aT^4/3$ と与えられる。ここで、a は輻射定数である。この輻射場の単位体積当たりの内部エネルギー $E_{\rm rad}$ が $-3F_{\rm rad}$ に等しいことを示せ。

次に、輻射場と単原子分子理想気体が、温度 T の熱平衡状態にある系を考える。気体粒子の内部自由度の効果は無視でき、系の質量密度は気体の密度 ρ に等しいとする。この系の単位体積当たりの内部エネルギー E は

$$E = \frac{3kT\rho}{2m} + aT^4$$

と和の形で与えられる。ここで、k はボルツマン定数、m は気体の 1 粒子の質量である。系の圧力 P も気体の圧力 $P_{\rm gas}$ と輻射圧 $P_{\rm rad}$ の和で与えられる。

(b) この系の定積比熱 (単位質量あたりの定積熱容量) c_V を k、m、および $\beta = P_{\rm gas}/P$ で表せ。

(c) この系の定圧比熱 c_P も k、m、β で表せ。

問 2. 温度 T、 化学ポテンシャル μ の熱浴かつ粒子浴の系と熱平衡にある理想気体を考える。

(a) 気体粒子の i 番目の 1 粒子量子状態のエネルギーを e_i で表す。このとき各状態 i にある粒子数の平均値 $\bar{n}_i$ は次式で与えられることを示せ。

$$\bar{n}_i = 1/\left[\exp\left(\frac{e_i - \mu}{kT}\right) \pm 1\right]$$

ここで、複号の上は粒子がフェルミ粒子、下はボーズ粒子の場合に対応している。

(b) 温度 T が十分に低く完全縮退とみなせる理想フェルミ気体に対し、状態 i の平均粒子数 $\bar{n}_i$ が e_i のどのような関数になるかを説明せよ。導出も書くこと。

次に、完全縮退した電子気体について考える。運動量の絶対値が p から $p + dp$ までの狭い区間にある電子の単位体積当たりの量子状態数は、スピンを考慮して $8\pi p^2 dp/h^3$ と与えられる。ここで、h はプランク定数である。以下では、静電エネルギーの効果は無視でき、また電子の運動に対する相対論的効果は無視できるとする。

(c) 電子 1 つの運動量の大きさの最大値 p_F は、電子の数密度 n の関数であり $h\left(\dfrac{3n}{8\pi}\right)^{1/3}$ と与えられることを示せ。

※次のページにも問題があるので注意すること

(d) 電子 1 つのエネルギーは $e = \dfrac{p^2}{2m}$ と与えられる。ここで m は電子の質量である。このとき完全縮退電子気体の化学ポテンシャル μ、単位体積当たりのエネルギー E、および圧力 P をそれぞれ n の関数で書き下せ。

(e) さらに、磁場の中にある完全縮退電子気体を考え、その電子気体のスピンに関する磁化率について調べる。磁場 H の中で電子 1 つのエネルギーは

$$e = \frac{p^2}{2m} \mp \mu_B H$$

と与えられる。複号の上はスピン磁気モーメントが磁場と平行な場合、下は逆向きの場合を表す。また μ_B はボーア磁子であり、電子 1 つのスピン磁気モーメントの大きさである。電子の化学ポテンシャル μ とボーア磁子 μ_B を混同しないよう気をつけること。

(i) 磁場に平行なスピン磁気モーメントをもつ電子の最大運動量 p_{para} と、磁場と逆向きのスピン磁気モーメントをもつ電子の最大運動量 p_{anti} をそれぞれ μ の関数で表せ。

(ii) $\mu_B H \ll \mu$ である弱い磁場の場合に対し、完全縮退電子気体のスピンに関する単位体積あたりの磁化率を μ の関数で表せ。

物 理 (3)

問 1.　以下の設問に答えよ。真空中の誘電率を $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2\ N^{-1}\ m^{-2}}$ とする。

(a)　真空中に線密度 λ で直線上に分布する電荷が距離 r に作る電場 $\mathbf{E}$ を、クーロンの法則から求めよ。大きさだけでなく、向きも示すこと。

(b)　図 1 のように、真空中に 2 本の十分に長い半径 a の導線を中心軸の間隔が d $(d \gg a)$ となるように平行に置き、2 本の導線の間に電圧をかけ、導線 1 と導線 2 にそれぞれ単位長さあたり λ と $-\lambda$ の電荷が生じたとする。導線 1 の中心軸からの距離を r として、2 つの導線の中心軸を含む平面内で導線 1 と導線 2 に挟まれた領域 $(a \leq r \leq d - a)$ における電場を求めよ。

(c)　問 1(b) において、2 本の導線の間の電位差を求めよ。そこから、この導線対の単位長さあたりの電気容量 C を求めよ。

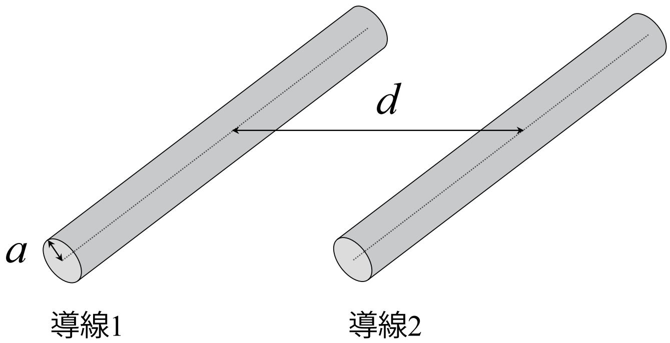


図1

問 2.　以下の設問に答えよ。真空中の透磁率を $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N\ A^{-2}}$ とする。

(a)　真空中の直線電流 I が距離 r に作る磁場 $\mathbf{B}$ を、ビオ・サバールの法則から求めよ。大きさだけでなく、向きも示すこと。

(b)　図 2 のように、図 1 と同じ平行導線対に、互いに方向が逆の大きさが等しい電流 I が流れているとする。導線 1 の中心軸からの距離を r として、2 つの導線の中心軸を含む平面内で導線 1 と導線 2 に挟まれた領域 $(a \leq r \leq d - a)$ における磁場を求めよ。

(c)　問 2(b) において、2 本の導線に挟まれた領域を貫く単位長さあたりの磁束を求めよ。そこから、この導線対の単位長さあたりの自己インダクタンス L を求めよ。

※ 次のページにも問題があるので注意すること

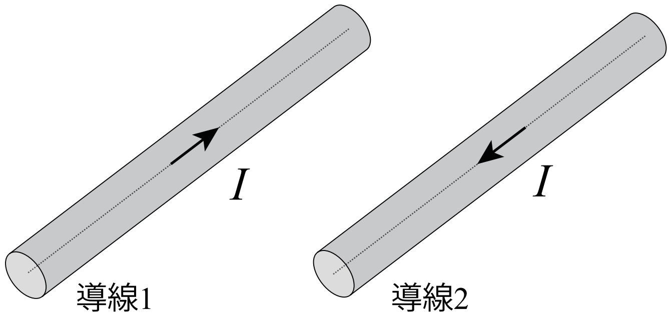


図2

問 3. 図 1、図 2 と同じ平行導線対の一端に交流電圧をかけた際にどのような交流が流れるか考える。図 3 のように導線対と平行に x 軸を取り、位置 x、時間 t における導線間の電圧を $V(x,t)$ とし、2 本の導線には互いに方向が逆の大きさが等しい電流 $I(x,t)$ が流れているとする。ここでは、抵抗による減衰がなく、長さ Δx ごとに自己インダクタンス $L\Delta x$ と電気容量 $C\Delta x$ のセットが導線対に沿って一様に分布した回路とみなす。

(a) x と $x+\Delta x$ の間の誘導起電力を考え、$\dfrac{\partial V}{\partial x}$ を C、L、I、$\dfrac{\partial I}{\partial t}$ の中から必要なものを用いて表せ。また、x と $x+\Delta x$ の間に供給される電荷の時間変化に伴う電流の変化を考え、$\dfrac{\partial I}{\partial x}$ を C、L、V、$\dfrac{\partial V}{\partial t}$ の中から必要なものを用いて表せ。

(b) 問 3(a) から $V(x,t)$ と $I(x,t)$ に対する波動方程式を導け。速さ v で進行する波動をこの方程式の解とした時、v を L と C を用いて表せ。 さらに、問 1(c)、問 2(c) の結果を用いて v の値を求め、光速と比較せよ。

(c) $V = Z_{\mathrm{LC}}I$ を満たす特性インピーダンス Z_{LC} を求めよ。真空中にある半径 0.3 mm、間隔 8 mm の平行導線対の Z_{LC} の値を有効数字 1 桁で求めよ。ここで、$\ln(7.7) \fallingdotseq 2$、$\ln(0.3) \fallingdotseq -1$ を用いて良い。

(d) この平行導線対を別の導線対に接続して高周波信号を伝搬させたい。この時、接続する導線対の特性インピーダンスがどうであれば、反射による損失を最小限にして信号を伝搬できるか論ぜよ。

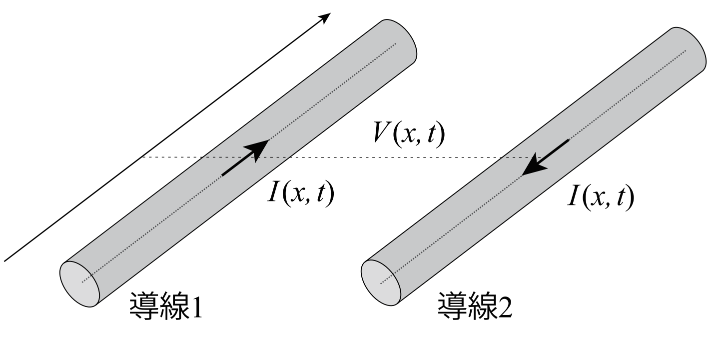


図3

物 理（4）

以下の問に答えよ。プランク定数を h、換算プランク定数を $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ とする。

問 1. 質量 m、角振動数 ω の一次元調和振動子を考える。

(a) 波動関数を $\phi(x)$、エネルギーを E として、この系の時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。

(b) 無次元化した座標 $\xi \equiv \sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}x$ 及びエネルギー $\epsilon \equiv \dfrac{2E}{\hbar\omega}$ を導入して、無次元化したシュレディンガー方程式を書け。

(c) ξ が大きい極限で波動関数が $\phi(\xi) \simeq \exp\left(-\dfrac{1}{2}\xi^2\right)$ の形に漸近することを示せ。波動関数の規格化は考えなくて良い。

(d) 前問から、波動関数が次の形を持つとする。

$$\phi(\xi) = H(\xi)\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right)$$

$H(\xi)$ が従う方程式を示せ。

(e) $H(\xi)$ を以下のべき級数に展開する。

$$H(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$$

a_n が従う漸化式を導け。

(f) ξ が大きい極限で波動関数が発散しないためには a_n が有限の n でゼロにならなければならない。この条件から調和振動子のエネルギー E が

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

のように量子化されることを示せ。

問 2. z 方向に一様で時間的に不変な磁場 $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$ 中の電子の運動を考える。電子のスピン自由度については無視する。光速度を c、電子の質量を m、電荷を $-e$ として以下の問いに答えよ。

(a) 電磁場のスカラーポテンシャルを $\phi(\boldsymbol{x},t)$、ベクトルポテンシャルを $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ とする。電磁場が任意のスカラー関数 λ について $\phi(\boldsymbol{x},t) \to \phi'(\boldsymbol{x},t) = \phi(\boldsymbol{x},t) + \dfrac{\partial}{\partial t}\lambda(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) \to \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) - \nabla\lambda(\boldsymbol{x},t)$ という変換に対して不変であることを示せ。この性質を何と呼ぶか答えよ。

(b) 磁場 $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$ を与えるベクトルポテンシャルの中で $A_x = A_z = 0$ を満たすものを考える。A_y を最も簡単な形で求めよ。

古典力学では磁場中の電子のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A})^2$$

で与えられる。

（※次のページにも問題があるので注意すること）

古典力学と量子力学の対応から、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}$ を演算子 $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{p}}$ に置き換えることで量子力学的なハミルトニアンを求めると

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}})\right]\left[\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}})\right]$$

となる。以下では (b) で求めたベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = A_y(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_y$（$\boldsymbol{e}_y$ は y 方向の単位ベクトル）を用いる。

(c)　z 方向の運動量 p_z が保存することを示せ。

(d)　前問から z 方向には粒子は等速運動をすることがわかったので、以下 x-y 平面内での運動だけを考える。するとハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2 + (\hat{p}_y + eA_y)^2\right]$$

と書ける。$\hat{p}_y$ と $\hat{H}$ が可換であることを示せ。

(e)　前問から $\hat{p}_y$ と $\hat{H}$ は同時に対角化することができる。$\hat{p}_y$ の固有値が k_y である時、x 方向の運動が調和振動子と対応していることを示せ。

(f)　この系の量子化されたエネルギー準位を求めよ。これをランダウ準位と呼ぶ。

(g)　この系の基底状態と第 n 励起状態のエネルギー差は

$$\Delta E_n = nX\left(\frac{B}{1\,\mathrm{Tesla}}\right)\mathrm{eV}$$

と書けることを示せ。単位に注意して、比例定数 X を有効数字一桁で求めよ。必要なら以下を用いて良い：$\hbar = 6.6\times10^{-16}\,\mathrm{eV\,s}$, $m = 9.1\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $e = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$, $1\,\mathrm{Tesla} = 1\,\mathrm{kg\,C^{-1}\,s^{-1}}$。

(h)　ある天体を X 線観測装置で分光観測したところ、図 1 に矢印で示すようにほぼ等間隔に強い吸収構造があるスペクトルが得られた。この吸収が天体周辺に存在するプラズマ電子のランダウ準位に対応していると考えてこの天体の磁場強度 B を推定せよ。

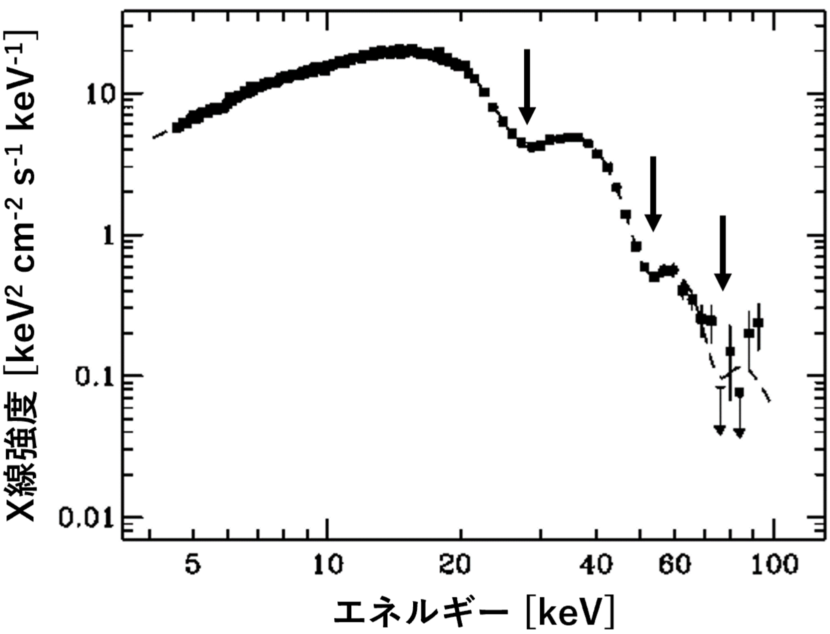


図 1　(Walter et al. 2015, The Astronomy and Astrophysics Review, 23, 2 をもとに改訂)