

Radiation from moving charges#2

— Liénard-Wiechert potential —

Yuji Chinone

実際に Liénard-Wiechert potential を計算する直前までは、http://www.astr.tohoku.ac.jp/~chinone/Radiation_from_moving_charges/index.html の 1 とほぼ同じ。違う所は

- 単位系が 1 では MKS、ここでは CGS-Gauss を使っている
- Green 関数の導出^{*1}

である。

1 では Liénard-Wiechert potential の導出、つまりは遅延ポテンシャルの微分を純粹に数学的に扱ったが^{*2}、今回は物理学的考察を元に導出する。

1 計算準備

1.1 考えている状況

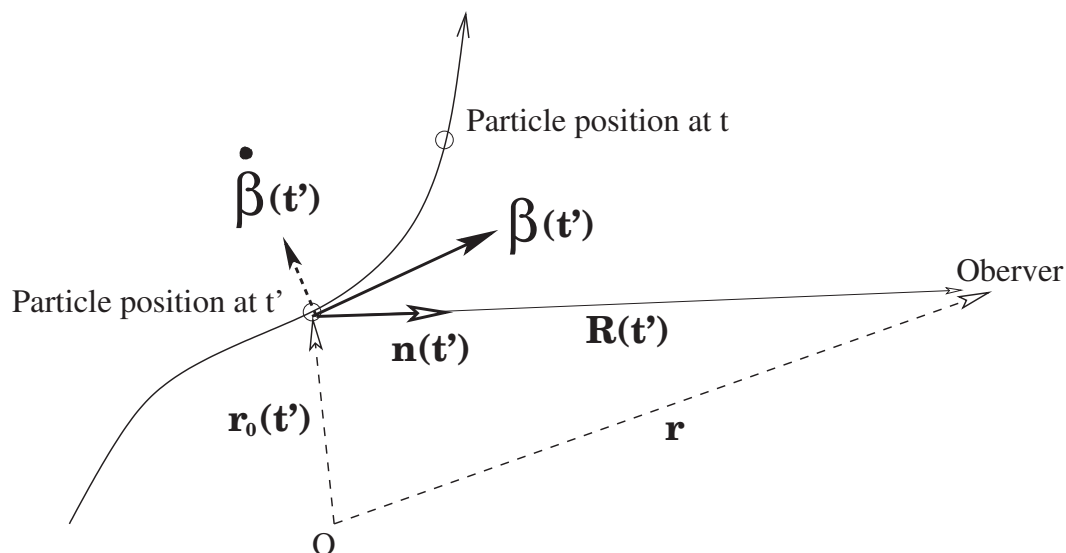


図 1 Geometry for calculation of the radiation field at $R(\mathbf{r}, t)$ from the position of the radiating particle at the retarded time ($t' = t_{\text{ret}}$).

^{*1} 違う点については <http://www.astr.tohoku.ac.jp/~chinone/TentaibuturiIII/Report02/index.html> の 9,10 を参照。

^{*2} この扱いについては、砂川の理論電磁気学の第 9 章「§3 点電荷による電磁波の放射」が詳しい。

$$t' = t_{\text{ret}} \quad (1)$$

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t') \quad (2)$$

$$R(t') = |\mathbf{R}(t')| \quad (3)$$

$$t' = t - \frac{R(t')}{c} \quad (4)$$

$$\mathbf{n}(t') = \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} \quad (5)$$

$$\kappa(t') = 1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t') \quad (6)$$

1.2 時間微分

$$\frac{\partial f(t')}{\partial t'} \equiv \dot{f}(t'), \quad \frac{\partial \mathbf{f}(t')}{\partial t'} \equiv \dot{\mathbf{f}}(t') \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{R}}(t') = -\dot{\mathbf{r}}_0(t') = -c\boldsymbol{\beta}(t') \quad (8)$$

$$\begin{aligned} R^2(t') = \mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{R}(t') &\rightarrow 2\dot{R}(t')R(t') = 2\dot{\mathbf{R}}(t') \cdot \mathbf{R}(t') = -2c\boldsymbol{\beta}(t') \cdot \mathbf{R}(t') \\ \therefore \dot{R}(t') &= -c\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t') \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{n}}(t') = \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} \right) = \frac{\dot{\mathbf{R}}(t')R(t') - \mathbf{R}(t')\dot{R}(t')}{R^2(t')} = c \frac{(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')}{R(t')} \quad (10)$$

$$\dot{\kappa}(t') = \frac{\partial}{\partial t'} (1 - (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))) = -\dot{\mathbf{n}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t') - \mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t') = c \frac{\beta^2(t') - (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))^2}{R(t')} - (\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')) \quad (11)$$

$\partial/\partial t$ とは観測者の座標 \mathbf{r} を固定して、観測者の時間 t のみを変化させたときの物理量の変化を計算させる演算である。観測者の時刻 t と遅延時間 t' との関係は Eq.(4) で与えられる。

t での微分と t' での微分の間係を得るために次のような時空図を考える。簡単の為に系は空間一次元としている。観測者は座標 x の位置に静止している。

時刻 t の観測者の事象 A と微小時間 dt 後の観測者の事象 B とで、それぞれ観測した電磁ポテンシャルの差分をとり、 dt で割るのが、 t による偏微分である。事象 A,B で観測される電磁ポテンシャルは因果律より、事象 A',B' に居た荷電粒子によって生成されたものである。事象 A と A' の時刻の関係は、

$$t' = t - \frac{|x - x_0(t')|}{c}$$

で与えられる。同様に事象 B と B' の時刻の関係は、

$$t' + dt' = t + dt - \frac{|x - x_0(t' + dt')|}{c}$$

である。この二つの事象間での観測者-粒子間の距離の変化量は、

$$|x - x_0(t' + dt')| - |x - x_0(t')| = -\dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{n}(t')(t')dt' = -c(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) dt'$$

で与えられるので、以上より dt と dt' の関係は、

$$dt = [1 - (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))] dt' = \kappa(t') dt' \quad (12)$$

であることが分かる。従って偏微分の変換式として、以下の関係式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (13)$$

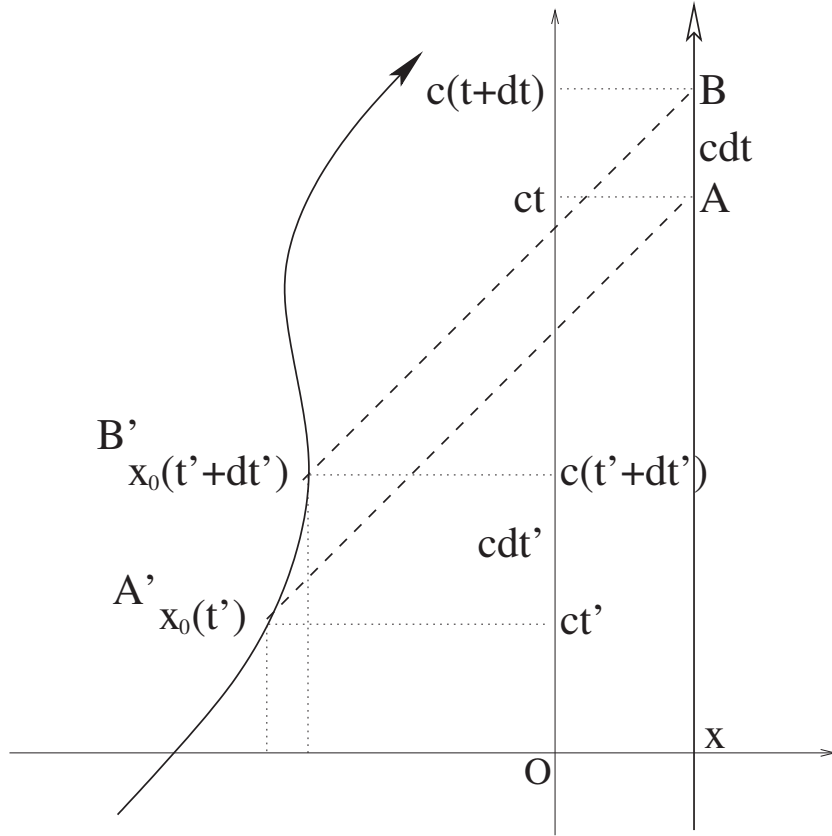


図2 静止した観測者の時間微分

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\kappa(t')R(t')) &= \frac{1}{\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} [\kappa(t')R(t')] = \frac{\dot{\kappa}(t')R(t')}{\kappa(t')} + \dot{R}(t') = c \frac{\beta^2(t') - (\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))^2}{\kappa(t')} - \frac{R(t')}{\kappa(t')} (\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')) - c (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \\
&= -\frac{c}{\kappa(t')} (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) + \frac{c\beta^2(t')}{\kappa(t')} - \frac{R(t')}{\kappa(t')} (\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')) \quad (14)
\end{aligned}$$

1.3 空間微分

$$\nabla_{\mathbf{r}_0} f \equiv \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}_0} \quad (15)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}_0} R(t') = \mathbf{n}(t') \quad (16)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}_0} (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) = -\frac{1}{c} \nabla_{\mathbf{r}_0} \dot{R}(t') = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} (\nabla_{\mathbf{r}_0} R(t')) = -\frac{\dot{\mathbf{n}}(t')}{c} \quad (17)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}_0} \kappa(t') = \nabla_{\mathbf{r}_0} [1 - (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))] = -\nabla_{\mathbf{r}_0} [(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))] = \frac{\dot{\mathbf{n}}(t')}{c} = \frac{(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')}{R(t')} \quad (18)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}_0} \times \boldsymbol{\beta}(t') = -\frac{1}{c} \nabla_{\mathbf{r}_0} \times \dot{R}(t') = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} (\nabla_{\mathbf{r}_0} \times R(t')) = 0 \quad (19)$$

∇ は事象 A に居る観測者と同時刻 t で微小距離 dr 離れた事象 C に居る観測者でそれぞれ観測した電磁ポテンシャルの勾配を求める演算である。荷電粒子が運動していない場合 $\nabla = \nabla_{\mathbf{r}_0}$ であるが、速度 $\dot{\mathbf{r}}_0(t')$ で運動し

ている場合、 ∇ に新たな項が加わり、

$$\nabla = \nabla_{\mathbf{r}_0(t')=\text{Const}} + \nabla_{\mathbf{r}_0(t')\neq\text{Const}} = \nabla_{\mathbf{r}_0} + \nabla_{\mathbf{r}_0(t')\neq\text{Const}} \quad (20)$$

となる。後者について時空図をもとに考える。ここでも簡単の為に空間を一次元とする。

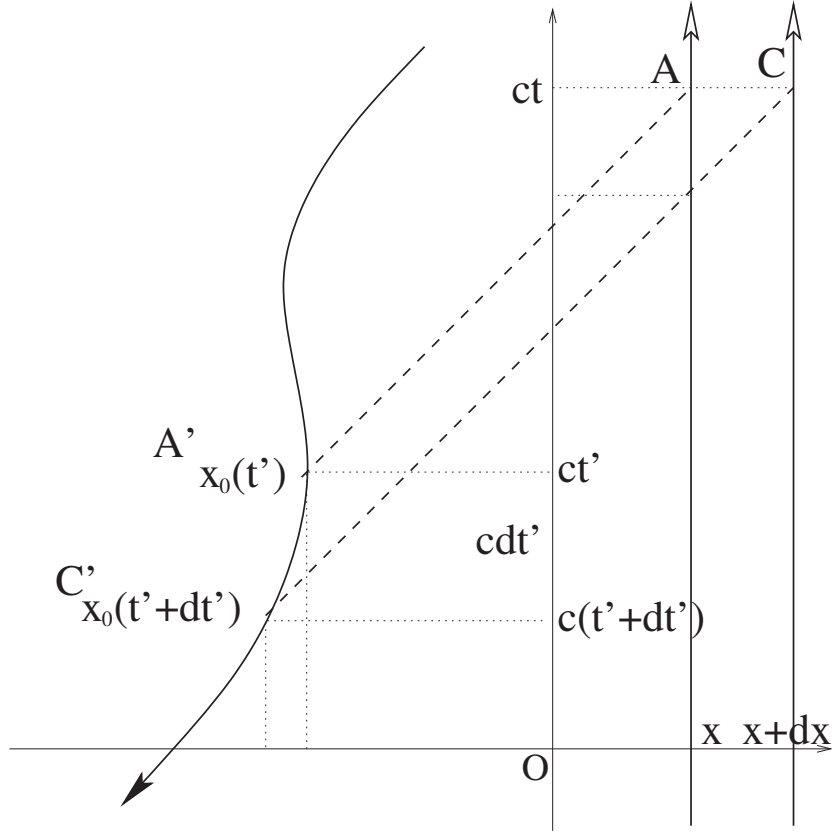


図3 観測者の空間微分

事象 C で観測される電磁ポテンシャルは事象 C' に居た荷電粒子によって生成されたものである。事象 A, C で観測が行われる時刻は同じ t であるが、それぞれ観測される電磁ポテンシャルが生成された時刻、場所は異なることが分かる。事象 C の観測者から事象 C' の粒子までの距離と、事象 A の観測者から事象 A' の粒子までの距離の差は、 dt' 間に粒子が運動により移動した分と、C が A より $d\mathbf{r}$ だけ離れたことによる効果の足し合わせである。従って、

$$|(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \mathbf{r}_0(t' + dt')| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(t') - \dot{\mathbf{r}}_0(t') \cdot \mathbf{n}(t') dt' = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(t') - c(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) dt'$$

であり時刻の関係は、事象 A と A' で、

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c}$$

であり、事象 C と C' で

$$t' + dt' = t - \frac{|\mathbf{r} + d\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t' + dt')|}{c}$$

であることから、

$$d\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}(t') = c[(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) - 1] dt' = -c\kappa(t') dt'$$

を得るの。よって

$$\nabla_{\mathbf{r}_0(t')\neq\text{Const}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{n}(t')}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (21)$$

となる。以上より空間微分について以下の関係式を得る。

$$\nabla = \nabla_{\mathbf{r}_0} - \frac{\mathbf{n}(t')}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \nabla(\kappa(t')R(t')) &= \left(\nabla_{\mathbf{r}_0} - \frac{\mathbf{n}(t')}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \kappa(t')R(t') = \nabla_{\mathbf{r}_0} [\kappa(t')R(t')] - \frac{\mathbf{n}(t')}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} [\kappa(t')R(t')] \\ &= \kappa(t')\nabla_{\mathbf{r}_0} R(t') + R(t')\nabla_{\mathbf{r}_0} \kappa(t') - \frac{R(t')\dot{\kappa}(t')}{c\kappa(t')} \mathbf{n}(t') - \frac{\dot{R}(t')}{c} \mathbf{n}(t') \\ &= \kappa(t')\mathbf{n}(t') + (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t') - \frac{R(t')}{c\kappa(t')} \left[c \frac{\beta^2(t') - (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))^2}{R(t')} - (\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')) \right] \mathbf{n}(t') + (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t') \\ &= \frac{\kappa^2(t') + 2\kappa(t')(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) + (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))^2}{\kappa(t')} \mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t') - \frac{\beta^2(t')}{\kappa(t')} + \frac{R(t')(\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))}{c\kappa(t')} \mathbf{n}(t') \\ &= \frac{\mathbf{n}(t')}{\kappa(t')} - \boldsymbol{\beta}(t') - \frac{\beta^2(t')}{\kappa(t')} \mathbf{n}(t') + \frac{R(t')(\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))}{c\kappa(t')} \mathbf{n}(t') \\ &= \mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t') + \frac{\mathbf{n}(t')}{\kappa(t')} (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) - \frac{\beta^2(t')}{\kappa(t')} \mathbf{n}(t') + \frac{R(t')(\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))}{c\kappa(t')} \mathbf{n}(t') \end{aligned} \quad (23)$$

2 Liénard-Wiechert potential (再掲)

電磁場は電磁ポテンシャル $\phi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ を用いて、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (24)$$

と書ける。加速荷電粒子の電磁ポテンシャルを Liénard-Wiechert potential といい、

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{\kappa(t_{\text{ret}})R(t_{\text{ret}})} = \frac{q}{\kappa(t')R(t')} = q \left[\frac{1}{\kappa R} \right] \quad (25)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\boldsymbol{\beta}(t_{\text{ret}})}{\kappa(t_{\text{ret}})R(t_{\text{ret}})} = \frac{q\boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa(t')R(t')} = q \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right] \quad (26)$$

で与えられる。ここで角括弧は括弧中の値を遅延時間で評価せよ、という意。

3 電場の導出

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{q}{\kappa(t')R(t')} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q\boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa(t')R(t')} \right) \\
&= q \frac{\nabla\{\kappa(t')R(t')\}}{\kappa^2(t')R^2(t')} - q \frac{\kappa(t')R(t') \frac{\partial \boldsymbol{\beta}(t')}{\partial t} - \boldsymbol{\beta}(t') \frac{\partial \{\kappa(t')R(t')\}}{\partial t}}{c\kappa^2(t')R^2(t')} \\
&= q \frac{\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t') + \frac{(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))}{\kappa(t')} \mathbf{n}(t') - \frac{\beta^2(t')}{\kappa(t')} \mathbf{n}(t') + \frac{R(t')(\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))}{c\kappa(t')} \mathbf{n}(t')}{\kappa^2(t')R^2(t')} \\
&\quad - q \frac{R(t')\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') - \left\{ -\frac{c(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))}{\kappa(t')} + \frac{c\beta^2(t')}{\kappa(t')} - \frac{R(t')(\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))}{\kappa(t')} \right\} \boldsymbol{\beta}(t')}{c\kappa^2(t')R^2(t')} \\
&= q \frac{\kappa(t')\mathbf{n}(t') - \kappa(t')\boldsymbol{\beta}(t') + (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \mathbf{n}(t') - \beta^2(t')\mathbf{n}(t') - (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) \boldsymbol{\beta}(t') + \beta^2(t')\boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa^3(t')R^2(t')} \\
&\quad + q \frac{(\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')) \mathbf{n}(t') - \kappa(t')\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') - (\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')) \boldsymbol{\beta}(t')}{c\kappa^3(t')R(t')} \\
&= q \frac{(1 - \beta^2(t'))\mathbf{n}(t') - (1 - \beta^2(t'))\boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa^3(t')R^2(t')} + q \frac{-\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') + (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') + (\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))\mathbf{n}(t') - (\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))\boldsymbol{\beta}(t')}{c\kappa^3(t')R(t')} \\
&= q \frac{(1 - \beta^2(t'))(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t'))}{\kappa^3(t')R^2(t')} + q \frac{\mathbf{n}(t') \times \{(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\}}{c\kappa^3(t')R(t')} \\
&= q \left[\frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\kappa^3 R^2} \right] + q \left[\frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{c\kappa^3 R} \right] = \mathbf{E}_{\text{vel}} + \mathbf{E}_{\text{rad}} \tag{27} \\
&\quad \because \mathbf{n}(t') \times \{(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\} = -\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') + (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') + (\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))\mathbf{n}(t') - (\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))\boldsymbol{\beta}(t')
\end{aligned}$$

4 磁場の導出

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \left(\frac{q\boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa(t')R(t')} \right) = \frac{q}{\kappa(t')R(t')} \nabla \times \boldsymbol{\beta}(t') - q\boldsymbol{\beta}(t') \times \nabla \left(\frac{1}{\kappa(t')R(t')} \right) \\
&= \frac{q}{\kappa(t')R(t')} \left(\nabla_{\mathbf{r}_0} - \frac{v\mathbf{n}(t')}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \times \boldsymbol{\beta}(t') - q \frac{\nabla \{ \kappa(t')R(t') \}}{\kappa^2(t')R^2(t')} \times \boldsymbol{\beta}(t') \\
&= \frac{q}{\kappa(t')R(t')} \nabla_{\mathbf{r}_0} \times \boldsymbol{\beta}(t') - \frac{q}{c\kappa^2(t')R(t')} \mathbf{n}(t') \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t') \\
&\quad - q \frac{\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t') + \frac{(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))}{\kappa(t')} \mathbf{n}(t') - \frac{\beta^2(t')}{\kappa(t')} \mathbf{n}(t') + \frac{R(t')(\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))}{c\kappa(t')} \mathbf{n}(t')}{c\kappa^2(t')R^2(t')} \times \boldsymbol{\beta}(t') \\
&= 0 + q\mathbf{n}(t') \times \frac{-\kappa(t')\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') - (\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))\boldsymbol{\beta}(t')}{c\kappa^3(t')R(t')} + q\mathbf{n}(t') \times \frac{-\kappa(t')\boldsymbol{\beta}(t') - (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))\boldsymbol{\beta}(t') + \beta^2(t')\boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa^3(t')R^2(t')} \\
&= \mathbf{n}(t') \times q \frac{(\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))\mathbf{n}(t') - \kappa(t')\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') - (\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))\boldsymbol{\beta}(t')}{c\kappa^3(t')R(t')} \\
&\quad + \mathbf{n}(t') \times q \frac{\kappa(t')\mathbf{n}(t') - \kappa(t')\boldsymbol{\beta}(t') + (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))\mathbf{n}(t') - \beta^2(t')\mathbf{n}(t') - (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))\boldsymbol{\beta}(t') + \beta^2(t')\boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa^3(t')R^2(t')} \\
&= \mathbf{n}(t') \times q \frac{(1 - \beta^2(t'))(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t'))}{\kappa^3(t')R^2(t')} + \mathbf{n}(t') \times q \frac{\mathbf{n}(t') \times \{(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\}}{c\kappa^3(t')R(t')} \\
&= q\mathbf{n}(t') \times \left[\frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\kappa^3 R^2} \right] + q\mathbf{n}(t') \times \left[\frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{c\kappa^3 R} \right] = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \\
&\quad \because \mathbf{n}(t') \times \mathbf{n}(t') = 0
\end{aligned} \tag{28}$$

別解

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(t') \times (-\nabla\phi(\mathbf{r}, t)) &= \mathbf{n}(t') \times \left\{ -q\nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{1}{\kappa(t')R(t')} \right) + \frac{\mathbf{n}(t')}{c\kappa(t')} \frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t'} \right\} = q\mathbf{n}(t') \times \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} \{ \kappa(t')R(t') \}}{\kappa^2(t')R^2(t')} \\
&= q\mathbf{n}(t') \times \frac{\kappa(t')\mathbf{n}(t') + (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa^2(t')R^2(t')} = -q \frac{\mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa^2(t')R^2(t')} \tag{30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \nabla_{\mathbf{r}_0} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{\mathbf{n}(t')}{c\kappa(t')} \times \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t'} = q\nabla_{\mathbf{r}_0} \times \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right] - \frac{\mathbf{n}(t')}{c\kappa(t')} \times \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t'} \\
&= q \frac{(\nabla_{\mathbf{r}_0} \times \boldsymbol{\beta}(t'))\kappa(t')R(t') + \boldsymbol{\beta}(t') \times \nabla_{\mathbf{r}_0}(\kappa(t')R(t'))}{\kappa^2(t')R^2(t')} - \frac{\mathbf{n}(t')}{c\kappa(t')} \times \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t'} \\
&= q \frac{0 + \boldsymbol{\beta}(t') \times \{ \kappa(t')\mathbf{n}(t') + (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t') \}}{\kappa^2(t')R^2(t')} - \frac{\mathbf{n}(t')}{c\kappa(t')} \times \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t'} = -q \frac{\mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa^2(t')R^2(t')} - \frac{\mathbf{n}(t')}{c\kappa(t')} \times \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t'} \\
&= \mathbf{n}(t') \times \left\{ -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\} \quad \because Eq.(30) \\
&= [\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \tag{31}
\end{aligned}$$

5 加速荷電粒子からの輻射

以上より、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = q \left[\frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\kappa^3 R^2} \right] + \frac{q}{c} \left[\frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{\kappa^3 R} \right] \quad (32)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \quad (33)$$

である。 $1/R^2$ に比例する **Velocity Field** (速度場) は、

$$\mathbf{E}_{\text{vel}}(\mathbf{r}, t) = q \left[\frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\kappa^3 R^2} \right] \quad (34)$$

$$\mathbf{B}_{\text{vel}}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{vel}}] \quad (35)$$

と書け、 $1/R$ に比例する **Radiation Field** (輻射場) は、

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{c} \left[\frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{\kappa^3 R} \right] \quad (36)$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}] \quad (37)$$

と書ける。

遅延時間に於ける速度で粒子が等速度運動した場合、

$$\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}_0(t') + \dot{\mathbf{r}}_0(t')(t - t') = \mathbf{r}_0(t') + c\boldsymbol{\beta}(t') \left(\frac{R(t')}{c} \right) = \mathbf{r}_0(t') + R(t')\boldsymbol{\beta}(t')$$

と書けることから、時刻 t に粒子の居る位置と観測者を結ぶベクトルは、

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r} - [\mathbf{r}_0(t') + R(t')\boldsymbol{\beta}(t')] = R(t') [\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')] \quad \parallel \quad \mathbf{E}_{\text{vel}}, \mathbf{B}_{\text{vel}}$$

であり、速度場ベクトルと平行になる。

輻射場ベクトルは

$$(\text{Radiation field}) \propto \mathbf{n}(t') \times \mathbf{C}$$

であるから、ベクトル積の性質より $\mathbf{n}(t')$ と直交している。また、

$$(\text{Radiation field}) \propto \mathbf{n}(t') \times \{(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')\} = C_1 (\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) + C_2 \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')$$

より、粒子の速度ベクトル $\boldsymbol{\beta}(t')$ が加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')$ と $\mathbf{n}(t')$ が作る平面内にあるとき、輻射場は同一平面内電場成分を持つ直線偏光になる。

又、粒子が非相対論的な運動をしている場合 $\beta(t') \ll 1$ より、Radiation field は $\mathbf{n}(t')$ と $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')$ の面内に存在する。

輻射場が $1/R$ に比例することは次のような物理的な考察からも説明できる。

図のように軸上を粒子が等速度 $c\beta$ で運動しており、 $x = 0, t = 0$ の瞬間 Δt の間に停止、つまり減速運動したとする。このとき粒子はほぼ原点で静止したとする。図中点 P は、停止しなかった場合の粒子の位置である。

半径 ct の球面外側では粒子が減速した情報は伝わっていないので、電気力線は点 P を中心とした放射状に分布する。一方半径 $c(t - \Delta t)$ の球面内側では、粒子が減速した情報が伝わっているため、電気力線は点 O を中心とした放射状に分布する。この二つの球面に挟まれた球殻状の領域は減速が起きている間に生成された電場が存在する領域である。

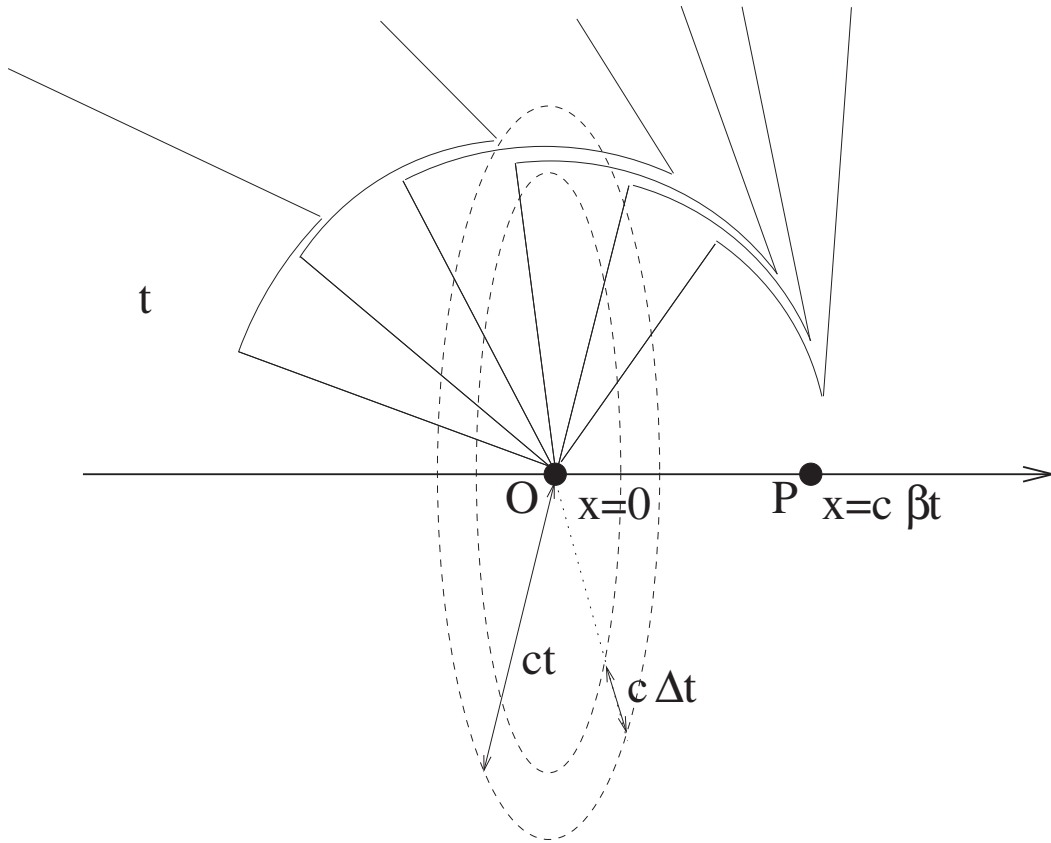


図4 Graphical demonstration of the $1/R$ acceleration field. Charged particle moving at uniform velocity in positive x direction is stopped at $x = 0$ and $t = 0$.

- 系の対称性から、この領域内の電気力線は同一平面内に存在しなければならない
- 荷電粒子以外に電荷が存在しないことから、電気力線は連続

の条件より、電気力線の分布は図のようになる。球殻内の電場の球面に沿った成分を E_t とすると、これは輻射場である。図の点線で示した様に、点 O を中心としたリング状の領域を考えると、このリングを貫く電気力線は $E_t \{2\pi(ct)(c\Delta t)\}$ であり、電気力線の保存から、保存される

$$2\pi c^2 t \Delta t E_t = \text{Const.}$$

従って、

$$E_{\text{rad}} = E_t \propto \frac{1}{ct} = \frac{1}{R}$$

を得る。

6 非相対論的な場合

粒子の速度が非相対論的な場合を考える。 $\beta \ll 1$ が成り立つためには、 $\beta \Delta t < O(\beta)$ でなければならない。ここで Δt は系の特徴的な時間スケールであり、例えば輻射の周期 $\Delta t \sim 1/\nu$ 等である。輻射場を β の一次までの近似で表すと、

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{c^2} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{u}})}{R} \right] \quad (38)$$

となる。 $\mathbf{n}(t')$ と $\dot{\mathbf{u}}(t')$ とが成す角を Θ とすると、

$$E_{\text{rad}} = |\mathbf{E}_{\text{rad}}| = \left[\frac{q\dot{u}}{Rc^2} \sin \Theta \right] \quad (39)$$

を得る。これは Lamor の公式である。

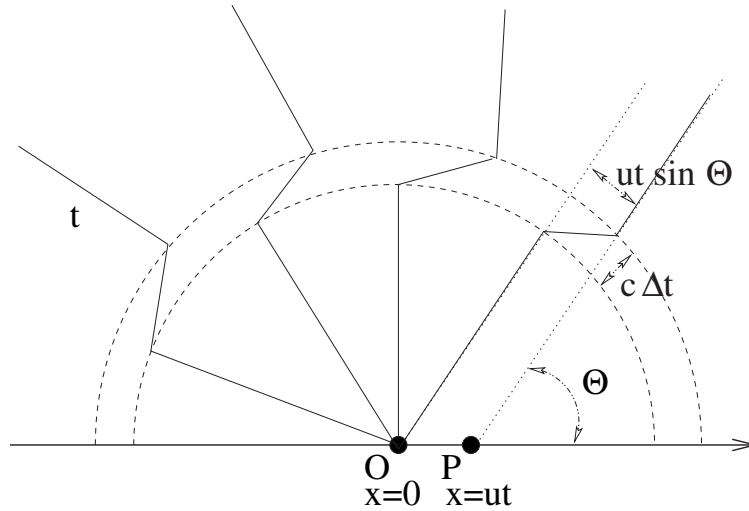


図5 非相対論的運動をする荷電粒子の作る電場

前と同じ様に物理的な考察による導出を考える。前回同様に考えると電気力線の分布は図のようになる。違いは、非相対論的運動であるから、 ct の球面外側の電気力線が点 P を中心として等方的になることである。球殻状の領域での電場の動経方向成分を E_r とすると、これは速度場なので

$$E_r = E_{\text{vel}} = \frac{q}{R^2} = \frac{q}{(ct)^2}$$

と書ける。図から、

$$\frac{E_t}{E_r} = \frac{ut \sin \Theta}{c\Delta}$$

であるから、 E_t は、

$$E_{\text{rad}} = E_t = \frac{q\dot{u}}{c^2 R} \sin \Theta \quad (40)$$

となり、Eq.(39) と一致する。ここで $\dot{u} = u/\Delta t$, $R = ct$ の置き換えを行った。