

Radiation from moving charges#1

— Liénard-Wiechert potential —

Yuji Chinone

1 真空中の Maxwell 方程式

加速運動している荷電粒子の放出する電磁波を計算することを考える。真空中の Maxwell 方程式は MKS 単位系で

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}_0(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

で与えられる。ここで ϵ_0 は真空の誘電率、 μ_0 は真空の透磁率であり、

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

の関係を満たし、 \mathbf{E} は電場、 \mathbf{B} は磁束密度である。また ρ_0 や \mathbf{j}_0 は電荷密度と電流密度である。

2 電磁ポテンシャルと電磁場

電磁ポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ と $\phi(\mathbf{x}, t)$ とを用いて電磁場を

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \phi(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (6)$$

と書く。このとき

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \phi$$

である。又このとき、電磁ポテンシャルはローレンツゲージ

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

を満たしている。このとき、Maxwell 方程式から、

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \mathbf{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi - \nabla \times \mathbf{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi \\ &= -\mu_0 \mathbf{j}_0(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi(\mathbf{x}, t) &= \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_0(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

となるので、電磁ポテンシャルは、

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}_0(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_0(\mathbf{x}, t) \quad (9)$$

で与えられる比同次微分方程式を満たしていることが分かる。

3 Green 関数

電磁ポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ などの、物理量の時間について Fourroer 変換を $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega)$ と書けば、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (10)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \quad (11)$$

などの関係を満たす。Eq.(8) や Eq.(9) に Fourier 変換をした量を代入すれば

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) = -\mu_0 \mathbf{j}_0(\mathbf{x}, \omega) \quad (12)$$

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \phi(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{\rho_0(\mathbf{x}, \omega)}{\epsilon_0} \quad (13)$$

が得られる。有限領域で \mathbf{j}_0 や ρ_0 が与えられたときの非同次微分方程式 Eq.(12) と Eq.(13) の解 \mathbf{A} と ϕ のうちで、無限遠で十分速く大きさが減少するものを考える。このとき、次の方程式を満たす **Green** 関数 $G(\mathbf{x}, \omega)$ を考えると便利である。

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} G(\mathbf{x}, \omega) = -\delta^3(\mathbf{x}) = -\delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (14)$$

ここで $\delta^3(\mathbf{x})$ は δ 関数で、

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} dk, \quad \delta^3(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k}, \quad f(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'$$

等の関係を満たす。

4 Maxwell 方程式を満たす解

Green 関数を用いて、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) = \mu_0 \int d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \omega) \mathbf{j}_0(\mathbf{x}', \omega) \quad (15)$$

$$\phi(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \omega) \rho_0(\mathbf{x}', \omega) \quad (16)$$

とする。Eq.(14) を $(\mathbf{x}, \omega) \rightarrow (\mathbf{x} - \mathbf{x}', \omega)$ に置き換え、両辺に $\mu_0 \mathbf{j}_0(\mathbf{x}', \omega) d^3\mathbf{x}'$ をかけ、全領域に渡り積分を実行すると、

$$\begin{aligned} & \mu_0 \int d^3\mathbf{x}' \nabla^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{j}_0(\mathbf{x}', \omega) + \mu_0 \int d^3\mathbf{x}' \frac{\omega^2}{c^2} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{j}_0(\mathbf{x}', \omega) = -\mu_0 \int d^3\mathbf{x}' \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{j}_0(\mathbf{x}', \omega) \\ \Rightarrow & \nabla^2 \left[\mu_0 \int d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{j}_0(\mathbf{x}', \omega) \right] + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\mu_0 \int d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{j}_0(\mathbf{x}', \omega) \right] = -\mu_0 \mathbf{j}_0(\mathbf{x}, \omega) \\ \Rightarrow & \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) = -\mu_0 \mathbf{j}_0(\mathbf{x}, \omega) \end{aligned}$$

となり Eq.(12) を満たしている。同様に、Eq.(14) を $(\mathbf{x}, \omega) \rightarrow (\mathbf{x} - \mathbf{x}', \omega)$ に置き換え、両辺に $\rho_0(\mathbf{x}', \omega)/\varepsilon_0 d^3\mathbf{x}'$ をかけ、全領域に渡り積分を実行すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \nabla^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho_0(\mathbf{x}', \omega) + \frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\omega^2}{c^2} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho_0(\mathbf{x}', \omega) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho_0(\mathbf{x}', \omega) \\ \Rightarrow & \nabla^2 \left[\frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho_0(\mathbf{x}', \omega) \right] + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho_0(\mathbf{x}', \omega) \right] = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_0(\mathbf{x}, \omega) \\ \Rightarrow & \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \phi(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{\rho_0(\mathbf{x}, \omega)}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

となり、Eq.(13) を満たしている。

Eq.(14) を満たす Green 関数を求めることを考える。 $G(\mathbf{x}, \omega)$ の \mathbf{x} についての Fourier 変換を

$$\hat{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{x} e^{-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \omega), \quad G(\mathbf{x}, \omega) = \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{G}(\mathbf{k}, \omega)$$

などとして、第二式を Eq.(14) に代入すれば

$$-\int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} k^2 \hat{G}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{G}(\mathbf{k}, \omega) = -\delta^3(\mathbf{x})$$

が得られる。この両辺に $e^{-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}$ をかけて $d^3\mathbf{x}$ で積分を実行すれば、形式的に

$$\hat{G}(\mathbf{k}', \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{k'^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{k'^2 - \mu^2} \quad (17)$$

が得られ、これを逆変換することで

$$G(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2 - \mu^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^{+1} dv \frac{e^{ikrv}}{k^2 - \mu^2} = \frac{1}{4i\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ke^{ikr}}{k^2 - \mu^2} dk$$

となる。ここで $k' = |\mathbf{k}'|$ 、 $\mu^2 = \omega^2/c^2$ 、 $r = |\mathbf{x}|$ 、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = krv$ 、 $v = \cos \theta$ である。

k について実軸上で積分するとき積分経路に極 $\pm\mu$ が現れるので、そのままでは積分は不十分で、極の回避の仕方を決めることで積分の結果が決まることになる。ここでは、複素 k 平面を考え、その実軸上上半面内

の無限半円周上を反時計回りにまわるような閉じた曲線上の複素積分を考える。このとき無限半円周上の積分による寄与は

$$\exp[(ik_R - k_I)r] = \exp(ik_R r) \exp(-k_I r)$$

の $\exp(-k_I r)$ の項により零になることが保証されるので、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ke^{ikr}}{k^2 - \mu^2} dk = \oint_C \frac{ke^{ikr}}{k^2 - \mu^2} dk = \frac{1}{2} \left[\oint_C \frac{e^{ikr}}{k + \mu} dk + \oint_C \frac{e^{ikr}}{k - \mu} dk \right]$$

としてよく、このとき右辺について Cauchy の積分定理が使える。

4.1 複素積分

複素 k 平面上の、上と同じ積分経路について留数定理を使えば、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikr}}{k \pm \mu - i\epsilon} dk = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \oint_C \frac{e^{ikr}}{k \pm \mu - i\epsilon} dk = 2\pi i e^{\mp i\mu r}$$

そして、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikr}}{k \pm \mu + i\epsilon} dk = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \oint_C \frac{e^{ikr}}{k \pm \mu + i\epsilon} dk = 0$$

が得られるが、左辺の実軸上での積分を

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikr}}{k \pm \mu - i\epsilon} dk = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikr}}{k \pm \mu} dk + \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\pi}^0 \frac{e^{(\mp\mu + \epsilon e^{i\phi})r}}{\epsilon e^{i\phi}} i\epsilon e^{i\phi} d\phi = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikr}}{k \pm \mu} dk + i\pi e^{\mp i\mu r}$$

そして、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikr}}{k \pm \mu + i\epsilon} dk = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikr}}{k \pm \mu} dk + \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\pi}^0 \frac{e^{(\mp\mu + \epsilon e^{i\phi})r}}{\epsilon e^{i\phi}} i\epsilon e^{i\phi} d\phi = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikr}}{k \pm \mu} dk - i\pi e^{\mp i\mu r}$$

と書くことができる。ここで、

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(k)}{k \pm \mu} dk \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{\mp\mu - \epsilon} \frac{f(k)}{k \pm \mu} dk + \int_{\mp\mu + \epsilon}^{+\infty} \frac{f(k)}{k \pm \mu} dk \right)$$

で定義される **Cauchy's Principal Values** である。これから、いずれの場合も上の主値積分に関しては、

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikr}}{k \pm \mu} dk = i\pi e^{\mp i\mu r}$$

が得られる。又一般に、実軸上で解析的な関数 $f(x)$ の実軸に沿った積分について

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\epsilon} dx = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \mp i\pi f(x_0)$$

が成り立ち、これを記号的に

$$\frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = P \frac{1}{x - x_0} \mp i\pi \delta(x - x_0)$$

と書く。

4.2 解、吉

無限遠で running wave に対応する解が得られるように、

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{4i\pi^2 r} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ke^{ikr}}{k^2 - (\mu \pm i\epsilon)^2} dk = \frac{1}{4i\pi^2 r} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \oint \frac{ke^{ikr}}{k^2 - (\mu \pm i\epsilon)^2} dk$$

として、極を $\pm i\epsilon$ ($\epsilon > 0$) だけずらして経路積分し、その後 $\epsilon \rightarrow +0$ とするものとする。留数定理を用いると

$$\begin{aligned} G_{\pm}(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{4i\pi^2 r} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \oint \frac{ke^{ikr}}{k^2 - (\mu \pm i\epsilon)^2} dk = \frac{1}{4i\pi^2 r} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} 2\pi i \left[\frac{ke^{ikr}}{k \pm (\mu \pm i\epsilon)} \right]_{k=\pm(\mu \pm i\epsilon)} \\ &= \frac{1}{4i\pi^2 r} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} 2\pi i \left[\frac{\pm(\mu \pm i\epsilon) e^{i[\pm(\mu \pm i\epsilon)]r}}{\pm(\mu \pm i\epsilon) \pm (\mu \pm i\epsilon)} \right] = \frac{1}{4i\pi^2 r} 2\pi i \left[\frac{\pm\mu e^{i(\pm\mu)r}}{\pm\mu \pm \mu} \right] \\ &= \frac{e^{\pm i\mu r}}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \end{aligned} \quad (18)$$

となる。実軸を上極の別の迂回路を用いた極限操作を行えば、違った $G(\mathbf{x}, \omega)$ が得られる。やはり複素 k 平面上半面内の無限半円周上を反時計回り、実軸を含むような閉曲線上の複素積分をするとき、

$$G_{\pm}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{4i\pi^2 r} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ke^{ikr}}{(k \mp i\epsilon)^2 - \mu^2} dk = \frac{1}{4i\pi^2 r} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \oint \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{ikr}}{k - (\mu \pm i\epsilon)} + \frac{e^{ikr}}{k - (-\mu \pm i\epsilon)} \right\} dk$$

とすれば、 $G_+(\mathbf{x}, \omega)$ は極を含むので、主値積分より

$$\begin{aligned} G_+(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{4i\pi^2 r} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \oint \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{ikr}}{k - (\mu + i\epsilon)} + \frac{e^{ikr}}{k - (-\mu + i\epsilon)} \right\} dk = \frac{1}{4i\pi^2 r} \frac{1}{2} i\pi (e^{i\mu r} + e^{-i\mu r}) \\ &= \frac{\cos \mu r}{4\pi r} \end{aligned} \quad (19)$$

となる。 $G_-(\mathbf{x}, \omega)$ のときは、極を含まないので、

$$G_-(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad (20)$$

である。これらは定常波に対応する解である。

4.3 解、式

同様に、

$$G(\mathbf{k}, \mu) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + \mu^2}$$

の Fourier 変換をとるとき、

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mu) &= \int d^3\mathbf{k} G(\mathbf{k}, \mu) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2 + \mu^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} k^2 dk \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \frac{e^{ikr \cos\theta}}{k^2 + \mu^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{k^2}{k^2 + \mu^2} \frac{\sin(kr)}{kr} dk = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi \quad kr = \xi, \frac{d\xi}{dk} = r \end{aligned}$$

と書ける。ここで、

$$\frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2}$$

は偶関数であるから

$$\int_0^{\infty} \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi$$

であるので

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi$$

を計算する。複素平面で考えると

$$\begin{aligned} \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz &\leq \left| \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1} dz \right| \leq \int_{C_R} \frac{|z||e^{iz}|}{|z^2 + 1|} |dz| \leq \int_{C_R} \frac{Re^{-R \sin \theta}}{R^2 - 1} |dz| \\ z &= Re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi), \quad |dz| = |z'(\theta)|d\theta = |iRe^{i\theta}|d\theta = Rd\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{Re^{-r \sin \theta}}{R^2 - 1} \cdot Rd\theta = \frac{R^2}{R^2 - 1} \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = \frac{R^2}{R^2 - 1} \left(\int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta + \int_{\pi/2}^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta \right) \\ &= \frac{R^2}{R^2 - 1} \left(\int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta + \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \psi} d\psi \right) = \frac{2R^2}{R^2 - 1} \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \\ &< \frac{2R^2}{R^2 - 1} \cdot \frac{\pi}{2R} < \frac{R^2}{R^2 - 1} \cdot \frac{\pi}{R} = \frac{\pi R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

となるから、留数定理より

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi = \text{Im} [2\pi i R(+ir\mu)] \quad (\text{上半円であることに注意})$$

で与えられることが分かる。これを計算すると

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi = \text{Im} \left[2\pi i \left\{ (z - ir\mu) \frac{ze^{iz}}{(z + ir\mu)(z - ir\mu)} \right\}_{z=+ir\mu} \right] = \text{Im} \left[2\pi i \frac{ir\mu e^{-r\mu}}{2ir\mu} \right] = \text{Im} \left[2\pi i \frac{e^{-r\mu}}{2} \right] = \pi e^{-r\mu}$$

となり、結局次のようになる。

$$G(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \sin \xi}{\xi^2 + r^2 \mu^2} d\xi = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{1}{2} \pi e^{-\mu r} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (21)$$

また時間 t の関数 $h(t)$ を

$$h(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ixt}}{x - i\epsilon}, \quad \epsilon > 0$$

で定義する（ヘビサイドのステップ関数の積分表示）。今までと同様に考えて、 $t > 0$ に対しては積分経路を上半面の半円にとることができ、これを計算すると

$$h(t > 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ixt}}{x - i\epsilon} = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i e^0 = 1$$

となる。 $t < 0$ のときは、極を含まないので

$$h(t < 0) = 0$$

となる。

4.4 電磁ポテンシャルの解

t と t' の間に

$$t' = t \pm \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \quad (22)$$

なる関係が成り立つとする。このとき Eq.(18) で与えられる関数 $G_{\pm}(\mathbf{x}, \omega)$ を用いるとき、Eq.(8) の解は、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mu_0 \int_{V'} d^3 \mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \omega) \mathbf{j}_0(\mathbf{x}', \omega) \right] e^{-i\omega t} d\omega = \mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_{V'} d^3 \mathbf{x}' G_{\pm}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{j}_0(\mathbf{x}', t') e^{i\omega t'} dt' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} d^3 \mathbf{x}' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathbf{j}_0(\mathbf{x}', t') \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega \left(\pm \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} + t - t' \right)} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} d^3 \mathbf{x}' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta \left(t' - t \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned} \quad (23)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} d^3 \mathbf{x}' \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (24)$$

と表すことができる。同様に Eq.(9) の解は、

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\epsilon_0} \int_{V'} d^3 \mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \omega) \rho_0(\mathbf{x}', \omega) \right] e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_{V'} d^3 \mathbf{x}' G_{\pm}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\mathbf{x}', t') e^{i\omega t'} dt' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3 \mathbf{x}' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \rho_0(\mathbf{x}', t') \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega \left(\pm \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} + t - t' \right)} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3 \mathbf{x}' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta \left(t' - t \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \frac{\rho_0(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} d^3 \mathbf{x}' \frac{\rho_0(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (26)$$

と表せる。Eq.(23) と Eq.(25) は時間積分を行っていないので、Eq.(22) の条件が δ 関数の積分の形で含まれることになるが、 t' と t はお互いに独立であると考えられるので、後の微分演算がしやすくなる利点がある。

4.5 Liénard-Wiechert ポテンシャル

電流密度や電荷密度が点電荷やその運動によって作られると考え、

$$\rho_0(\mathbf{x}, t) = q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0(t)), \quad \mathbf{j}_0(\mathbf{x}, t) = qu(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0(t)) \quad (27)$$

と書く。またここで t' は

$$h(\mathbf{x}, t, t') \equiv t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')|}{c}$$

を満たし、

$$R(\mathbf{x}, t') = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0(t')|, \quad \mathbf{n}(\mathbf{x}, t') = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0(t')}{R(\mathbf{x}, t')}, \quad \mathbf{u}(t') = \frac{d\mathbf{x}_0(t')}{dt'} = c\boldsymbol{\beta}(t')$$

とする。これを Eq.(23) と Eq.(25) に代入すると、 δ 関数の

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \delta(f(t)) g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \frac{dt}{df} \delta(f) g(t(f)) = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{df(t_i)}{dt} \right|} g(t_i) \Big|_{f(t_i)=0} \quad (28)$$

なる関係を用いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta(h(\mathbf{x}, t, t')) \frac{q\mathbf{u}(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0(t')|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\frac{d}{dt'} \left(t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')|}{c} \right)} \frac{q\mathbf{u}(t')}{R(\mathbf{x}, t')} \Big|_{h(\mathbf{x}, t, t')=0} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{q\mathbf{u}(t')}{R(\mathbf{x}, t')} \Big|_{h(\mathbf{x}, t, t')=0} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta(h(\mathbf{x}, t, t')) \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0(t')|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\frac{d}{dt'} \left(t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')|}{c} \right)} \frac{q}{R(\mathbf{x}, t')} \Big|_{h(\mathbf{x}, t, t')=0} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{q}{R(\mathbf{x}, t')} \Big|_{h(\mathbf{x}, t, t')=0} \end{aligned} \quad (30)$$

と表すことができる。Eq.(29) と Eq.(30) は **Liénard-Wiechert** ポテンシャルである。

5 電磁場の導出準備

Eq.(5) を計算して

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta^2(t'))(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t'))}{\kappa^3(t')R^2(\mathbf{x}, t')} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\mathbf{n}(t') \times [(\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')]}{\kappa^3(t')R(\mathbf{x}, t')} \quad (31)$$

を導くことを考える。ここで

$$\kappa(t') = 1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t') \quad (32)$$

である。様々な方法があるが、ここでは以下のように求める。

5.1 スカラーポテンシャルの座標微分

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\partial}{\partial x} [\delta(h(\mathbf{x}, t, t'))] \frac{q}{R(\mathbf{x}, t')} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta(h(\mathbf{x}, t, t')) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q}{R(\mathbf{x}, t')} \right]$$

であるが、それぞれの項について計算を次のように行う。

$$\begin{aligned} (\text{第2項}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta(h(\mathbf{x}, t, t')) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q}{R(\mathbf{x}, t')} \right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta(h(\mathbf{x}, t, t')) \frac{q(\mathbf{n})_x}{R^2(\mathbf{x}, t')} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\frac{d}{dt'} \left(t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')|}{c} \right)} \frac{(\mathbf{n})_x}{R^2(\mathbf{x}, t')} \Big|_{h(\mathbf{x}, t, t')=0} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{(\mathbf{n})_x}{R^2(\mathbf{x}, t')} \Big|_{h(\mathbf{x}, t, t')=0} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\kappa(t')} \frac{(\mathbf{n})_x}{R^2(\mathbf{x}, t')} \Big|_{h(\mathbf{x}, t, t')=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{第3項}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\partial}{\partial x} [\delta(h(\mathbf{x}, t, t'))] \frac{q}{R(\mathbf{x}, t')} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\partial}{\partial x} \left[\delta \left(t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')|}{c} \right) \right] \frac{1}{R(\mathbf{x}, t')} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{dt'}{dy} \frac{(\mathbf{n})_x}{R(\mathbf{x}, t')} \frac{\partial}{\partial y} \delta(t-y), \quad y = t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')|}{c} \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dt'}{dy} \frac{(\mathbf{n})_x}{R(\mathbf{x}, t')} \right) \delta(t-y) \quad \because \text{部分積分} \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{dt'}{dt} \frac{(\mathbf{n})_x}{R(\mathbf{x}, t')} \right]_{h(\mathbf{x}, t, t')=0} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} \left[\frac{dt'}{dt} \frac{(\mathbf{n})_x}{R(\mathbf{x}, t')} \right]_{h(\mathbf{x}, t, t')=0} \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{1}{\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \left[\frac{1}{\kappa(t')} \frac{(\mathbf{n})_x}{R(\mathbf{x}, t')} \right]_{h(\mathbf{x}, t, t')=0} \quad \because \frac{dt'}{dt} = \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\kappa(t')}
\end{aligned}$$

よって、

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{1}{\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \left[\frac{1}{\kappa(t')} \frac{(\mathbf{n})_x}{R(\mathbf{x}, t')} \right]_{h(\mathbf{x}, t, t')=0} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\kappa(t')} \frac{(\mathbf{n})_x}{R^2(\mathbf{x}, t')} \Big|_{h(\mathbf{x}, t, t')=0} \quad (33)$$

となる。

5.2 単位ベクトルの時間微分

$\mathbf{n}(t')$ を t' で偏微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{n}(t') = \dot{\mathbf{n}}(t') &= \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')}{R(\mathbf{x}, t')} = -\dot{\mathbf{x}}(t') \frac{1}{R(\mathbf{x}, t')} + (\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')) \frac{dR(\mathbf{x}, t')}{dt'} \frac{d}{dR(\mathbf{x}, t')} \left(\frac{1}{R(\mathbf{x}, t')} \right) \\
&= -\frac{\mathbf{u}(t')}{R(\mathbf{x}, t')} + (\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')) \left(-\frac{1}{R^2(\mathbf{x}, t')} \right) \left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t')}{R(\mathbf{x}, t')} \right) \\
&= c \frac{-\boldsymbol{\beta}(t') + \mathbf{n}(t') (\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'))}{R(\mathbf{x}, t')} \quad (34)
\end{aligned}$$

を得るが、

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})$$

なる公式を使うと

$$\frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{n}(t') = c \frac{\mathbf{n}(t') \times \mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t')}{R(\mathbf{x}, t')} \quad (35)$$

と書ける。

5.3 ベクトルポテンシャルの時間微分

$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ を t で偏微分すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{q\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \delta\left(t' - t + \frac{R(\mathbf{x}, t')}{c}\right) \frac{\mathbf{u}(t')}{R(\mathbf{x}, t')}\right\} \\
 &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\mathbf{u}(t')}{R(\mathbf{x}, t')} \frac{\partial}{\partial R(\mathbf{x}, t')} \left\{ \delta\left(t' - t + \frac{R(\mathbf{x}, t')}{c}\right)\right\} \\
 &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{R(\mathbf{x}, t')} \frac{\partial}{\partial R(\mathbf{x}, t')} \left\{ \delta\left(t' - t + \frac{R(\mathbf{x}, t')}{c}\right)\right\} \\
 &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{d}{dy} \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{R(\mathbf{x}, t')} \frac{\partial}{\partial y} \delta(t-y), \quad y = t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')|}{c} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{R(\mathbf{x}, t')} \right) \delta(t-y) \quad \because \text{部分積分} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{R(\mathbf{x}, t')} \right]_{h(\mathbf{x}, t, t')=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} \left[\frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{R(\mathbf{x}, t')} \right]_{h(\mathbf{x}, y, t')=0} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{1}{\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \left[\frac{1}{\kappa(t')} \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{R(\mathbf{x}, t')} \right]_{h(\mathbf{x}, t, t')=0}
 \end{aligned}$$

を得る。

6 電場の導出

以上の結果を Eq.(5) に代入すると

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}(t')}{R^2(\mathbf{x}, t')\kappa(t')} + \frac{1}{c} \frac{1}{\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\mathbf{n}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa(t')R(\mathbf{x}, t')} \right) \right]$$

と書けることが分かる。また Eq.(6) より、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int_{V'} d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t')) (\mathbf{n}(t') \times \mathbf{u}(t')) \frac{\partial}{\partial R(\mathbf{x}, t')} \left(\frac{\delta\left(t - t' - \frac{R(\mathbf{x}, t')}{c}\right)}{R(\mathbf{x}, t')} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' (\mathbf{n}(t') \times \mathbf{u}(t')) \frac{\partial}{\partial R(\mathbf{x}, t')} \left(\frac{\delta\left(t - t' - \frac{R(\mathbf{x}, t')}{c}\right)}{R(\mathbf{x}, t')} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' (\mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t')) \left[-\frac{\delta\left(t - t' - \frac{R(\mathbf{x}, t')}{c}\right)}{R^2(\mathbf{x}, t')} + \frac{1}{R(\mathbf{x}, t')} \frac{\partial}{\partial R(\mathbf{x}, t')} \delta\left(t - t' - \frac{R(\mathbf{x}, t')}{c}\right) \right]
 \end{aligned}$$

と書けることから、時間積分を $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ のときと同様に実行すると、

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \left[\frac{\boldsymbol{\beta}(t') \times \mathbf{n}(t')}{R^2(\mathbf{x}, t')\kappa(t')} + \frac{1}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\boldsymbol{\beta}(t') \times \mathbf{n}(t')}{R(\mathbf{x}, t')\kappa(t')} \right]$$

となる。

電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ について Eq.(35) を用いて更に変形していくと、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}(t')}{R^2(\mathbf{x}, t')\kappa(t')} + \frac{\mathbf{n}(t') \times \mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t')}{R^2(\mathbf{x}, t')\kappa^2(t')} + \frac{\mathbf{n}(t')}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{\kappa(t')R(\mathbf{x}, t')} \right) - \frac{1}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa(t')R(\mathbf{x}, t')} \right) \right]$$

で与えられることになる。ここで右辺第一項と第三項と（ t' で偏微分していない項）をまとめると、

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{n}(t')}{R^2(\mathbf{x}, t')\kappa(t')} + \frac{\mathbf{n}(t') \times \mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t')}{R^2(\mathbf{x}, t')\kappa^2(t')} &= \frac{\mathbf{n}(t')\kappa(t')}{R^2(\mathbf{x}, t')\kappa^2(t')} + \frac{\mathbf{n}(t') \times \mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t')}{R^2(\mathbf{x}, t')\kappa^2(t')} \\ &= \frac{\mathbf{n}(t')}{\kappa^2(t')R^2(\mathbf{x}, t')} - \frac{\mathbf{n}(t')(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) - \mathbf{n}(t')(\mathbf{n}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t'))}{\kappa^2(t')R^2(\mathbf{x}, t')} \\ &= \frac{\mathbf{n}(t')}{\kappa^2(t')R^2(\mathbf{x}, t')} - \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa^2(t')R^2(\mathbf{x}, t')} \end{aligned}$$

であるから、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}(t')}{R^2(\mathbf{x}, t')\kappa^2(t')} + \frac{\mathbf{n}(t')}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{\kappa(t')R(\mathbf{x}, t')} \right) - \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{R^2(\mathbf{x}, t')\kappa^2(t')} - \frac{1}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{\kappa(t')R(\mathbf{x}, t')} \right) \right] \quad (36)$$

を得る。

Eq.(36) に残された時間微分を実行する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} \boldsymbol{\beta}(t') &= \dot{\boldsymbol{\beta}}(t') \\ \frac{d}{dt'} (\kappa(t')R(\mathbf{x}, t')) &= \frac{d\kappa(t')}{dt'} R(\mathbf{x}, t') + \kappa(t') \frac{dR(\mathbf{x}, t')}{dt'} = \left\{ \frac{d}{dt'} \left(1 - \frac{\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')}{c} \right) \right\} R(\mathbf{x}, t') - \kappa(t') (\mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{u}(t')) \\ &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\mathbf{n}(t') \times (\mathbf{n}(t') \times \mathbf{u}(t'))}{R(\mathbf{x}, t')} \cdot \mathbf{u}(t') + \mathbf{n}(t') \cdot \dot{\mathbf{u}}(t') \right) R - \left(1 - \frac{1}{c} \mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{u}(t') \right) (\mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{u}(t')) \\ &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\mathbf{n}(t')(\mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{u}(t')) - \mathbf{u}(t')}{R(\mathbf{x}, t')} \cdot \mathbf{u}(t') + \mathbf{n}(t') \cdot \dot{\mathbf{u}}(t') \right) R - \left(1 - \frac{1}{c} \mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{u}(t') \right) (\mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{u}(t')) \\ &= c\boldsymbol{\beta}^2(t') - c(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) - R(\mathbf{x}, t') (\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t')) \end{aligned}$$

であるから、これを用いると $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ は以下のように書くことができる。ここで t' は省略して書いている。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2\kappa^2} + \frac{\mathbf{n}}{c\kappa} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) - \frac{\boldsymbol{\beta}}{R^2\kappa^2} - \frac{1}{c\kappa} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right) \right]_{t'} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2\kappa^2} + \frac{\mathbf{n}}{c\kappa} \left(-\frac{1}{\kappa^2 R^2} \right) (c\boldsymbol{\beta}^2 - c(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - R(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\boldsymbol{\beta}}{R^2\kappa^2} - \frac{1}{c\kappa} \left\{ \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\kappa R} + \boldsymbol{\beta} \left(-\frac{1}{\kappa^2 R^2} \right) (c\boldsymbol{\beta}^2(t') - c(\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')) - R(\mathbf{x}, t') (\mathbf{n}(t') \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(t'))) \right\} \right]_{t'} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{n} - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}^2 + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{n} - (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^2 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta}}{\kappa^3 R^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}}(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{c\kappa^3 R} \right]_{t'} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\kappa^3} \frac{(\dot{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}^R + \kappa \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + \frac{R}{c} \kappa \dot{\mathbf{n}} + \kappa^2 \mathbf{n}}{R^2} \right]_{t'} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{1}{\kappa^3} \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) - \kappa \dot{\boldsymbol{\beta}}}{R} \right]_{t'} \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \boldsymbol{\beta}^2)}{\kappa^3 R^2} + \frac{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}))}{c\kappa^3 R} \right]_{t'} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1 - \boldsymbol{\beta}^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\kappa^3 R^2} \right]_{t'} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{\kappa^3 R} \right]_{t'} \quad (38) \end{aligned}$$

となり、Eq.(31) が導かれた。無限遠で効いてくる部分（ $1/R$ に比例する部分）は、粒子の加速度運動に起因していることが分かる。

7 磁場の導出

Eq.(36) の場合と同様に磁場を考えると、

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \left[\frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{R^2(\mathbf{x}, t')\kappa^2(t')} + \frac{1}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{R(\mathbf{x}, t')\kappa(t')} \right) \right] \times \mathbf{n}(t') \quad (39)$$

を得る。このとき Eq.(36) と Eq.(39) とを比較すると、

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{n}(t') \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{c} \quad (40)$$

なる関係があることが分かる。よって、電場さえ分かれば磁場は Eq.(40) より求めることができる。

8 Poynting Vector (Larmor の公式)

Poynting Vector を

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\mu_0} \quad (41)$$

で定義すれば、これは単位時間当たり単位面積を通る電磁波のエネルギー流束である。従って、加速度運動をしている粒子を取り囲む無限に大きな球を考えて、その球面を通過する全エネルギーを計算してやれば、粒子の発する電磁波の全エネルギーの放射率を計算できる。球面の面積は $4\pi R^2$ で与えられることを考えれば、Eq.(31) と Eq.(40) の中で、無限遠の球面上で積分をして生き残る項は $1/R$ に比例する部分、従って Poynting Vector としては $1/R^2$ に比例する項である。そこで無限遠で生き残る部分を取り出して、

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x}, t') \times [(\mathbf{n}(\mathbf{x}, t') - \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}, t')) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}, t')]}{\kappa^3(\mathbf{x}, t')R(\mathbf{x}, t')} \quad (42)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x}, t') \times \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t)}{c} \quad (43)$$

とする。

定義通り Poynting Vector を計算すると

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t)}{\mu_0} = \frac{\mathbf{E} \times \{\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}\}}{c\mu_0} = \frac{\mathbf{E}_{\text{rad}}^2 \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}}) \mathbf{E}_{\text{rad}}}{c\mu_0} \\ &= \frac{\mathbf{E}_{\text{rad}}^2}{c\mu_0} \mathbf{n}, \quad \because \mathbf{E}_{\text{rad}} \perp \mathbf{n} \longrightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

となる。 $|\boldsymbol{\beta}| \ll 1$ の極限では、 $\kappa \rightarrow 1$ となり、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c\mu_0} \left(\frac{q}{4\pi\mu_0 c} \right)^2 \frac{[\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]^2}{R^2} \mathbf{n} = \frac{1}{c\mu_0} \left(\frac{q}{4\pi\mu_0 c} \right)^2 \frac{[(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}]^2}{R^2} \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{c\mu_0} \left(\frac{q}{4\pi\mu_0 c} \right)^2 \frac{[|\dot{\boldsymbol{\beta}}| \cos \Theta \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}]^2}{R^2} \mathbf{n} = \frac{1}{c\mu_0} \left(\frac{q}{4\pi\mu_0 c} \right)^2 \frac{|\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 \cos^2 \Theta + |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 - 2|\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 \cos^2 \Theta}{R^2} \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{c\mu_0} \left(\frac{q}{4\pi\mu_0 c} \right)^2 \frac{|\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 \sin^2 \Theta}{R^2} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (45)$$

と書ける。ここで Θ は \mathbf{n} と $\hat{\beta}$ が成す角である。従って、半径無限大の球面上で積分を実行すると、微小立体角 $d\Omega$ を使って、 $dS \cdot \mathbf{n} d\Omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = R^2 d\Omega$ であるから、

$$\begin{aligned}
 P &\equiv \int_{R \rightarrow \infty} dS \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \frac{q^2}{16\pi^2 c^3 \mu_0 \epsilon_0^2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\Theta R^2 \sin \Theta \frac{\dot{\mathbf{u}}^2 \sin^2 \Theta}{c^2 R^2} \\
 &= \frac{q^2 \dot{\mathbf{u}}}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi d\Theta \sin^3 \Theta = \frac{q^2 \dot{u}^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi d\Theta \frac{3 \sin \Theta - \sin 3\Theta}{4} = \frac{q^2 \dot{u}^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \frac{4}{3} \\
 &= \frac{q^2 \dot{\mathbf{u}}}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q^2 \dot{\mathbf{u}}^2}{c^3}
 \end{aligned} \tag{46}$$

となる。これは加速度運動をする非相対論的な荷電粒子から放出される電磁波が単位時間あたりに発するエネルギーであり、Eq.(46) は **Larmor** の公式と呼ばれている。

9 MKS 単位系と cgs Gauss 単位系の変換

MKS 単位系から cgs Gauss 単位系に変換するには、

$$\begin{aligned}
 \text{MKS} &\iff \text{Gaussian} \\
 cB_{\text{MKS}} &\iff B_{\text{Gaussian}} \\
 \epsilon_0 &\iff (4\pi)^{-1} \\
 \mu_0 &\iff \frac{4\pi}{c^2} \\
 \mu_0 \epsilon_0 &\iff \frac{1}{c^2}
 \end{aligned}$$

などとする必要がある。