物 理（１）

図１に示すような、固定された半径 r の球内部の表面をなめらかに運動する質量 m の質点を考える。鉛直方向には重力加速度 g がかかっている。このような系を球面振子という。この質点の運動を記述するために、座標原点を球の中心にし、球座標 (r, θ, ϕ) をとる。ここで、θ は図のように鉛直下向き方向からの角度、ϕ は鉛直方向を軸として回転する方向の角度とする。以下の問に答えよ。

問 1. 質点の θ 方向、ϕ 方向それぞれの共役な運動量 p_θ、p_ϕ を与えられた記号であらわせ。

問 2. 質点の ϕ 方向の共役な運動量 p_ϕ は保存されることを、式を用いて示せ。

問 3. $p_\phi = 0$ の場合、質点は $\theta = 0$ のまわりを振動する。$|\theta| \ll 1$ としてその振動周期を書け。

問 4. 一般に質点の θ 方向の運動は有限な領域 $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$ に限られる。質点のエネルギーを E として、θ_1 と θ_2 を求めるための式（$\cos\theta$ についての 3 次式）を書け。また、$p_\phi \neq 0$ の場合、質点は $\theta = 0$ を通ることができない。その理由を記述せよ。

問 5. 質点の運動が $p_\phi > 0$ で ϕ 方向に円運動をするとき、その角速度 $\Omega \equiv d\phi/dt$ を与える式を書け。また、その θ 依存性を図示せよ。

問 6. 2 個の質量 m_A、m_B の質点が、それぞれ $\theta = \theta_A$、θ_B（ただし $0 < \theta_A < \theta_B$）の位置で円運動をしている系を考える。それぞれの ϕ 方向の共役な運動量を $p_{\phi A}$、$p_{\phi B}$、エネルギーを E_A、E_B とする。今、系の全角運動量 $p_\phi = p_{\phi A} + p_{\phi B}$ が保存したままで、円運動を保ったまま θ_A と θ_B を動かして、全エネルギー $E = E_A + E_B$ をより小さな状態にする変化（質点間の角運動量交換によって円運動のエネルギーを小さくする変化）を考える。そのためには、θ_A を大きくし θ_B を小さくして、2 つの円運動の位置を互いに近づけるように変化させればよいことを示せ。ヒント：$dp_\phi = dp_{\phi A} + dp_{\phi B} = 0$ （$dp_{\phi A} = -dp_{\phi B}$）の条件の下で、$dE = dE_A + dE_B < 0$ となる円運動の位置の変化を考える。

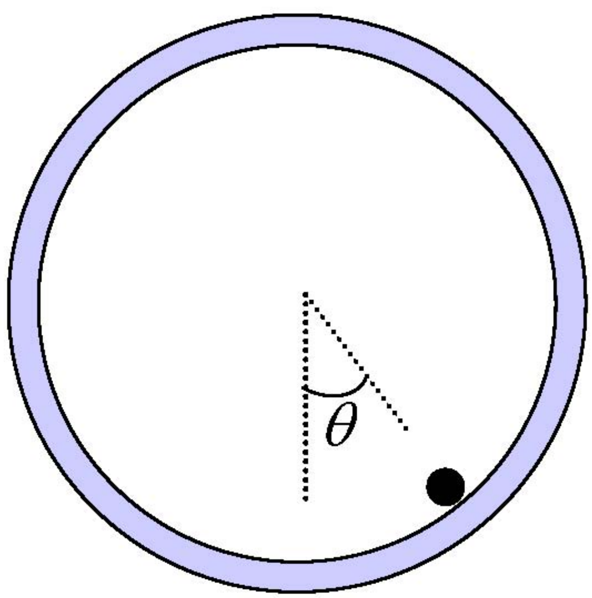

図1

物 理（2）

問. 強さ H の一様な磁界中に大きさ μ の磁気モーメントを持った粒子が N 個存在している。粒子の磁気モーメントの方向が磁場と平行及び反平行の時の粒子のエネルギーはそれぞれ $-\mu H$、$+\mu H$ である。粒子はこれら二つのエネルギー状態のみ取りうるとする。粒子間の相互作用は無視でき、系は温度 T の熱浴と接して熱平衡状態にあるとする。以下、$\mu > 0, H > 0$ とし k_B はボルツマン定数である。

(a) ある一つの粒子がエネルギー $+\mu H$ の状態に存在する確率を書け。

(b) N 個の内 m 個がエネルギー $+\mu H$ の状態に、$N - m$ 個が $-\mu H$ の状態にある確率を書け。

(c) 系の平均のエネルギーが

$$U = k_B T^2 \frac{\partial \log Z}{\partial T}$$

で求まることを示せ。ここで log は自然対数、Z は系の分配関数で以下の式で与えられる。

$$Z = \left(2\cosh \frac{\mu H}{k_B T}\right)^N$$

(d) 以下の式で定義される F をヘルムホルツの自由エネルギーと呼ぶ。

$$F \;=\; U - TS \tag{1}$$

ここで S は系の平均のエントロピーである。以下の式で平均のエントロピーが求まることを示せ。

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

ここで V は系の体積である。

(e) 熱力学第三法則によれば、絶対零度では粒子は全て基底状態にはいり、系のエントロピーはその縮退度の対数に比例する。この事を用いて、この系のエントロピーが絶対零度でゼロになることを示せ。

(f) ヘルムホルツの自由エネルギーとして以下の式を仮定する。

$$F \;=\; -k_B T \log Z \tag{2}$$

この時式 (1) を満たすことを示せ。

(g) ヘルムホルツの自由エネルギーとして式 (2) の形を仮定し系の平均のエントロピーを求め、絶対零度でエントロピーがゼロになることを示せ。

(h) 熱浴との接触を断ち、系の磁界の強さを断熱的に H から H_1 に変化させた。磁場強度が H_1 になった時の系の温度 T_1 を求めよ。但し、$H_1 > 0$ である。

物 理（3）

以下の静電場に関する問題に答えよ。ただし、真空の誘電率は ϵ_0 とせよ。

問 1. 二点 $\mathrm{Q}_1 : (x, y, z) = (0, 0, \frac{d}{2})$、$\mathrm{Q}_2 : (x, y, z) = (0, 0, -\frac{d}{2})$ に、それぞれ、$+e$ と $-e$ の電荷が固定されているとき、任意の点 $\mathrm{P} : (x, y, z)$ の静電ポテンシャル Φ を求めよ。ただし、$d > 0$、$e > 0$ とする。

問 2. $d \ll r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ を満たす任意の点 $\mathrm{P} : (x, y, z)$ での静電ポテンシャル Φ を d/r の一次の精度で求めよ。

問 3. 電気双極子モーメント $\mathbf{q} \equiv e(0, 0, d)$ を用いて、問 2 で求めた静電ポテンシャル Φ をベクトル $\mathbf{q}$ と $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ で表せ。また、このときの電場 $\mathbf{E}$ を求めよ。

問 4. 静電場 $\mathbf{E}$ の中に電気双極子モーメント $\mathbf{p}$ を置いたときのポテンシャルエネルギー U を求めよ。

問 5. 電気双極子モーメント $\mathbf{q}$ による電場 $\mathbf{E}$ の中に、電気双極子モーメント $\mathbf{p}$ を置いたときのポテンシャルエネルギー U を電気双極子モーメント $\mathbf{q}$ と $\mathbf{p}$ を用いて表せ。ただし、電気双極子 $\mathbf{q}$ を原点に置き、電気双極子 $\mathbf{p}$ の位置は $\mathbf{r}$ とせよ。

物 理（4）

問 1. 量子力学における「重ね合わせの原理」を説明し、具体例をあげよ。

問 2. 次のラグランジアンで与えられる 1 次元調和振動子について以下の問に答えよ。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

(a) ハミルトニアンを求め、この系を量子化せよ。

(b) 以下の演算子を用いてハミルトニアンを表せ。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(q + \frac{i}{m\omega}p\right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(q - \frac{i}{m\omega}p\right)$$

(c) 次の交換関係を証明せよ。

$$[a,\, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}$$

(d) 次式の状態が設問 (b) で定義した演算子 a の固有状態であることを示せ。

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2}\, e^{\lambda a^\dagger}|0\rangle$$

ここで $|0\rangle$ は、$a|0\rangle = 0$ で定義されるこの系の基底状態である。 $e^{-|\lambda|^2/2}$ は規格化因子である。

(e) 設問 (d) で定義した状態における q, p の期待値とそれらの分散を計算せよ。

(f) 設問 (e) の計算をもとに状態 $|\lambda\rangle$ の物理的意味を考えよ。