物 理（1）

質量 m の質点に中心力 $mF(r)$ が働くときの運動を考える。ただし運動は平面内に限られるとし、平面における極座標を (r,θ) とする。また、時間を t とする。

問 1. 質点の極座標を用いて、運動エネルギー T、ポテンシャルエネルギー U、ラグランジュ関数 L をあらわせ。

問 2. 質点の運動方程式を導け。

問 3. 質点が半径 r_0 の円運動をする場合、角速度 ω_0 および角運動量 h_0 を求めよ。

問 4. 上記の円運動からわずかにずれた運動を考える。このとき、$r = r_0 + x$、$\dfrac{d\theta}{dt} = \omega_0 + y$、そして角運動量は $h = h_0 + \xi$ と書ける。ただし x、y、ξ は微小量である。このとき、 x のみたすべき微分方程式を導け。

問 5. $F(r)$ が

$$F(r) = -\frac{a}{r^2} - \frac{b}{r^4}$$

と与えられるとき、安定な円運動の最小半径を求めよ。ただし a と b は定数で $a > 0$、$b \geq 0$ とする。

問 6. 上記で $b = 0$ とする。円運動する粒子が $t = 0$ において $r = r_0$、$\theta = 0$ にあったとする。$t = 0$ において粒子が動径方向に微小な速度 v を与えられた場合、その後の x と θ を時間の関数としてあらわせ。簡単のため円運動の角速度は ω_0 と記してよい。

物 理（２）

問 1. z 方向を向いた一様な磁場 $\mathbf{B}$ の中を運動する質量 m、電荷 q $(q>0)$ のテスト粒子を考える。ただし、磁場の z 成分を B_z とし、$B_z>0$ とする。

(a) デカルト座標系 (x,y,z) でのテスト粒子の運動方程式を導け。

(b) 運動方程式の解を用いて次の粒子の運動の性質を示せ。

(i) 粒子は、一般に、磁力線の周りを螺旋運動する。

(ii) 粒子は z 軸の正の方向から見て時計回りに回転する。

(iii) 粒子の回転角振動数 ω_c は $\omega_c = qB_z/m$ で与えられる。

問 2. 円筒座標系 (R,ϕ,z) において、$\mathbf{B}=(B_R(R,z),0,B_z(z))$ なる磁場が存在するとする。このとき、B_R を B_z を用いてあらわせ。ただし、$dB_z/dz=0$ のとき、$B_R=0$ であるとする。また、必要があれば円筒座標系 (R,ϕ,z) での次のベクトル解析の公式を利用してよい。

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RA_R)+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi+\frac{\partial}{\partial z}A_z$$

ただし、$\mathbf{A}=(A_R,A_\phi,A_z)$ である。

問 3. 問 2 の磁場 $\mathbf{B}$ 中の質量 m、電荷 q $(q>0)$ のテスト粒子の運動を考える。ただし、$B_z>0$、$dB_z/dz>0$ とする。このとき、荷電粒子は z 軸方向に力 F_z を受け、z 方向の運動は、次の運動方程式に従う。

$$m\frac{dv_z}{dt}=F_z=-qv_\phi B_R$$

ただし、v_z と v_ϕ は、それぞれ、粒子の z 方向と ϕ 方向の速度である。

初期に $v_z>0$ を持つ粒子が z 軸周りを半径 R、$v_\phi=-R\omega_c$ で螺旋運動し、

$$\frac{(v_\phi)^2}{B_z}=一定$$

が成り立つとする。ただし、ω_c は問 1 で求めた粒子の回転角振動数である。

このとき、粒子は、ある z の位置で $v_z=0$ となり、z の負の方向にはね返ることを示せ。

物 理（３）

問 1. 量子力学では、固有振動数 ν の一次元調和振動子のエネルギー準位は

$$\epsilon_n = h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1}$$

で与えられる。ここで、h はプランク定数であり、また、ボルツマン定数を k_B とする。この調和振動子が、温度 T の熱浴と熱平衡状態にあるとする。このとき、分配関数 Z_1 は次の式で与えられる。

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\epsilon_n/k_B T} \tag{2}$$

(a) 系のエネルギー ϵ の平均 $\langle\epsilon\rangle$ を計算せよ。

(b) 系のエネルギーの分散 $\langle(\Delta\epsilon)^2\rangle$ を計算せよ。ここで $\Delta\epsilon = \epsilon - \langle\epsilon\rangle$ である。

(c) $h\nu \ll k_B T$ の極限での、系のエネルギーの平均および分散の近似式を求めよ。

問 2. 長さ L で N 個の原子からなる一次元結晶体を考える。この結晶体中に伝わる振動は、固有振動数 $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \cdots, \nu_N$ を持つ N 個の独立な調和振動子の重ね合わせで近似できるとする。ここで、固有振動数は、結晶体中の音速を c_S とすると、

$$\nu_j = c_S \frac{1}{L} j \qquad j = 1, 2, 3, \cdots, N \tag{3}$$

で与えられる。以下では、結晶体は温度 T の熱浴と熱平衡状態にあり、$N \gg 1$ とする。

(a) 結晶体の内部エネルギー U の平均 $\langle U\rangle$ を与える式を導け。

(b) 高温の極限（$h\nu_N \ll k_B T$）及び低温の極限（$h\nu_N \gg k_B T$ かつ $h\nu_1 \ll k_B T$）の二つの極限について定積比熱 C_V の近似式を求めよ。必要なら次の式を用いよ。

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{(e^x-1)^2} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3} \tag{4}$$

(c) 高温の極限での定積比熱の結果を古典熱力学におけるエネルギー等分配の法則を用いて考察せよ。

(d) 低温の極限での定積比熱が、高温の極限での定積比熱と異なる結果になる事について物理的に考察せよ。

(e) 任意の温度に対して、結晶体の内部エネルギーの分散 $\langle(\Delta U)^2\rangle$ が

$$\langle(\Delta U)^2\rangle = k_B T^2 C_V \tag{5}$$

をみたすことを示せ。

物 理（4）

中心力場中における定常状態のシュレディンガー方程式を考える。この場合、極座標系 (r, θ, φ) を用いるのが便利であり、波動関数 $\Psi(\boldsymbol{r})$ はシュレディンガー方程式

$$\hat{H}\Psi(\boldsymbol{r}) \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\boldsymbol{L}}^2}{2mr^2} + V(r) \right]\Psi(\boldsymbol{r}) = E\Psi(\boldsymbol{r})$$

に従う。ここで、$V(r)$ は中心力場のポテンシャル、E はエネルギー固有値、$\hat{\boldsymbol{L}}^2$ は角運動量演算子

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 \quad \equiv \quad -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

である。ただし、m は質量、$\hbar$ はプランク定数、ポテンシャル $V(r)$ は動径座標 r にのみ依存する関数で $V(r) \le 0$ を満たすものとする。この系について以下の問いに答えよ。

問 1. 角運動量演算子の z 成分 $\hat{L}_z$ が、極座標系で次のように書けることを示せ。

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

問 2. 演算子 $\hat{H}$, $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, $\hat{L}_z$ について交換関係

$$[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{L}}^2] = 0, \quad [\hat{H}, \hat{L}_z] = 0, \quad [\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_z] = 0$$

が成り立つことを示せ。また、これらの交換関係の物理的意味についても議論せよ。

問 3. 関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ が角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ の固有関数

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \phi)$$

であるとき (l は $l \ge 0$ の定数)、シュレディンガー方程式は次の 1 次元問題

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l(r)}{dr}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_l(r) = 0, \tag{1}$$

に帰着されることを示せ。

問 4. 同一の角運動量の固有状態 l を考えたとしても、波動関数の動径成分 $R_l(r)$ は離散的なエネルギー準位を持ち得る。微分方程式 (1) を用い、波動関数 $R_l(r)$ の直交性

$$\int_0^\infty dr\ r^2 R_{El}(r) R_{E'l}(r) = 0 \qquad (E \ne E')$$

を示せ。ここで、R_{El}、$R_{E'l}$ は、固有エネルギー E、E' を持つ動径波動関数である (l は同一)。ただし、$\left\{r^2 R_{El}(dR_{E'l}/dr)\right\}$ あるいは $\left\{r^2 R_{E'l}(dR_{El}/dr)\right\}$ が $r = 0$ と $r = \infty$ でゼロになるとする。

問 5. ポテンシャル $V(r)$ が有限であり、$l \ne 0$ の場合に、式 (1) に従う波動関数の動径成分 $R_l(r)$ の $r \to 0$ における解の振る舞いについて議論せよ。ただし、$R_l(r)$ は $r = 0$ で発散しないものとする。